U.O.J.
24/71

ASTRONOMIE
THÉORIQUE
ET
PRATIQUE

stron.
B.

BIBLIOTHÈQUE SCIENTIFIQUE
de l'INGÉNIEUR ET DU PHYSICIEN
Beaucoup de Science,
mais en vue des Applications!

ASTRONOMIE
THÉORIQUE
ET
PRATIQUE

PAR
H. BOUASSE
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

DEUXIÈME ÉDITION

172038
10/6/22

PARIS
LIBRAIRIE DELAGRAVE
15, RUE SOUFFLOT, 15
1921

NOTE DE L'ÉDITEUR

Les thèses scientifiques et la méthode pédagogique qui font l'originalité de ce Cours sont exposées, tant dans la Préface que dans le corps du volume, avec une précision et une vigueur dont la vivacité de forme et l'énergie d'affirmation peuvent heurter certains points de vue et certains modes d'enseigner habituellement admis. Mais il doit être compris dès le principe que ces discussions et ces critiques, à l'égard desquelles l'éditeur ne saurait prendre parti, ne visent en rien les personnes ni le principe des Institutions.

Tous droits de reproduction, de traduction et d'adaptation réservés pour tous pays.

Copyright by Librairie Delagrave, 1918.

DE LA MANIÈRE D'ENSEIGNER LES SCIENCES INUTILES

Sursauter ne servirait à rien.

L'Astronomie est une science à peu près inutile.

Pourtant il serait fâcheux que nos étudiants cessassent de l'étudier.

En conséquence il faut modifier son enseignement de manière que les jeunes Français, utilitaires par nécessité, ne prennent pas son étude pour du temps perdu, ce qui est actuellement le cas : de l'Astronomie qu'on enseigne dans nos facultés, ils font bien de se détourner avec horreur.

Les considérations suivantes s'appliquent à toutes les sciences dont les applications industrielles ou professionnelles sont restreintes; elles ont un intérêt actuel évident. Il s'agit de déterminer à quelle condition une science presque *inutile* peut devenir un instrument d'éducation générale et de formation intellectuelle *pour les futurs ingénieurs eux-mêmes.*

*
* *

Que l'*Astronomie de position* soit presque sans application, que son utilité décroisse de jour en jour, n'est que trop facile à prouver. Je ne prendrais même pas cette peine légère pour l'*Astronomie physique*, tant la chose est évidente : la constitution du Soleil ou des étoiles est de pure curiosité.

L'Astronomie de position n'a jamais eu que trois fins *pratiques : déterminer l'heure de temps moyen, établir un calendrier raisonnable, mesurer les latitudes et longitudes géographiques.*

De ces trois fins, deux sont réalisées par des considérations très élémentaires, à une approximatiou plus que suffisante. A preuve que notre calendrier date de 1582, pour ne pas dire de 44 avant J.-C. ; à preuve que voici deux siècles et demi que le temps moyen est d'usage courant, sinon dans la vie civile, du moins dans les observatoires, avec des constantes numériques et des procédés de détermination identiques à ceux qu'on utilise aujourd'hui.

Reste la troisième fin. De tous temps les latitudes géographiques ont

été bien connues. Quant aux longitudes, leur mesure a présenté d'abord de grandes difficultés. Toujours est-il qu'aujourd'hui, avec les chronomètres que nous possédons, avec la télégraphie sans fil, la question est entièrement renouvelée. Les connaissances nécessaires à la mesure des longitudes sont très élémentaires, pour une précision largement suffisante. L'*Extrait de la Connaissance des Temps* à l'usage des marins et des explorateurs n'est qu'une humble plaquette qu'on réduirait sans inconvénient au quart de son volume. On n'utilise que les tables du Soleil, les digressions de la polaire, les positions des étoiles fondamentales et les tables « diverses ». Personne ne songerait à se servir des planètes ou de la Lune, ce qu'avoue la *Connaissance des Temps* elle-même.

Vous ne raccrocherez donc pas les étudiants en leur racontant que l'Astronomie sert à quelque chose : ils s'apercevront qu'on se paie leur tête. Leur temps est trop précieux pour user une année, voire un semestre, à l'acquisition de connaissances qui ne leur serviront à rien ou qu'au besoin ils mettront huit jours à se procurer.

J'excepte les futurs astronomes. Mais à ce qui sort de nos observatoires, on finira par trouver les dépenses disproportionnées aux résultats : il est stupide de nourrir un bataillon mâle et femelle pour la besogne de manœuvre qui consiste à photographier le ciel par tranches ou à déterminer successivement les spectres des trois millions d'étoiles visibles, *alors que les enseignements fondamentaux sont dans la purée.*

Pour recruter vos étudiants, vous *donnerez* donc le certificat d'Astronomie APPROFONDIE à de braves garçons, à de gentes demoiselles incapables d'une règle de trois.

Un professeur d'Astronomie me confiait qu'à la fin de l'année, c'est au plus si son auditoire ne confondait pas les ascensions droites et les déclinaisons, ce qui n'empêche pas de le recevoir avec mention « dans l'intérêt pécuniaire de la Faculté ».

Avec l'enseignement actuel de l'Astronomie, on n'a pas d'élèves ou bien on vend le certificat. Il est cependant possible d'intéresser les étudiants qui consentent à user un semestre à cette étude, mais qui de ce sacrifice veulent tirer (outre un diplôme) un AMUSEMENT et un profit intellectuel incontestable.

*
* *

Pour éviter toute contestation j'accorde que les Traités d'Astronomie français sont admirables, *étant donné le but que les auteurs se proposent d'atteindre.*

Mais ils ne visent pas le même but que moi.

Je crois être juste en posant que ces ouvrages sont écrits par des professionnels, pour de futurs professionnels; s'ils ont toutes les qualités contenues dans cette définition, ils en ont tous les défauts.

Or, pour ce qui nous occupe, ces défauts sont rédhibitoires.

Je précise par quelques exemples.

Pour ne pas me faire la partie trop belle, je néglige dans les Astronomies les chapitres consacrés à la trigonométrie sphérique, aux erreurs, à la réfraction, aux instruments d'optique, à la chronométrie, toutes questions hors du sujet, et que les astronomes feraient mieux de ne pas traiter *incidemment*.

Bornons-nous aux questions de pure Astronomie.

Prenons le calcul des éclipses de Soleil.

Pour qu'on ne m'accuse pas de dénigrer, je transcris l'opinion de Gruey sur les formules de Hansen : « Cependant ces formules peuvent s'établir très simplement par la Géométrie et prendre une place intéressante dans un cours public. Je m'en suis assuré à la Faculté des Sciences de Besançon. »

Suivent *vingt* pages de calculs à révolter le plus patient.

Si les formules de Hansen sont adoptées par les praticiens, est-ce une raison d'en assommer les étudiants? Croit-on difficile de leur expliquer *à moins de frais* la nature d'une éclipse et la manière d'en déterminer les circonstances?

Lisez La Caille et Lalande : vous y verrez qu'on les calcule, à la minute près, par des procédés élémentaires qui laissent la satisfaction « d'avoir compris », le plaisir de dire « Ce n'est pas malin! »

Comme les éclipses sont aujourd'hui parmi les phénomènes les plus inutiles, que personne ne songerait à les prendre comme critérium d'une théorie, à quoi riment pédagogiquement les vingt pages de Gruey et sa méthode géométrique « simple! » C'est un praticien qui éduque de futurs praticiens; ce n'est pas un professeur qui forme des cerveaux!

*
* *

Certains défauts des professionnels en font généralement des professeurs lamentables.

Ainsi les professionnels ne définissent jamais les notions fondamentales; ils sautent par-dessus les préliminaires essentiels. Ces notions, ces préliminaires, qui sont parfois toute la science puisqu'ils en constituent les principes, sont devenus pour eux des choses si banales qu'ils ne les distinguent plus : en raison de leur importance même, ils perdent à leurs yeux toute existence propre.

Je précise par quelques exemples.

Certes les coordonnées qu'on utilise en Astronomie n'ont rien de mystérieux. Ascensions droites, déclinaisons, angles horaires, longitudes, latitudes, il suffit de quelques figures pour en savoir le fin du fin, de quelques formules pour les relier. Encore faut-il les donner ces figures, avec les sens adoptés; pour définir ces sens, faut-il prendre la peine de montrer qu'ils changent en apparence suivant qu'on est dans la sphère de projection ou hors de cette sphère.

Dans nos « savants » traités ces figures sont absentes, paraissant inutiles à nos professionnels.

Autre exemple. En Astronomie presque tous les mouvements ont le même sens. Nos auteurs se gardent de l'indiquer, ce qui rend leur texte illisible. Ils ne s'en aperçoivent pas, ces notions leur étant à ce point familières qu'ils s'imaginent les avoir sucées avec le lait de leur nourrice. C'est la mentalité du chef de gare à qui l'on demande l'heure d'un train : « Est-il bête, ce public ! voilà 30 000 fois que je donne le renseignement ! »

Au reste ces principes, les professionnels les ignorent souvent. Certains astronomes ne savent pas d'où l'on a tiré la valeur actuellement admise du jour de temps moyen. Mon ahurissement fut extrême quand discutant avec l'un d'eux la précision des observations méridiennes, je m'aperçus qu'il ignorait pourquoi les *fondamentales* étaient *fondamentales* et servaient de termes de comparaison. Il utilisait les fondamentales tous les jours (?); il ne s'était jamais soucié d'apprendre de quelle manière elles avaient acquis leur rang. Respect hiérarchique probablement !

L'Astronomie est une science historique : mais nos professionnels ignorent tout de son histoire.

Bref nos professionnels sont des professionnels. Adroits dans leur petit truc, sachant couper la seconde en 10 ou 20 morceaux à l'œil et à l'oreille, sachant régler leur lunette méridienne, ou même sachant développer la solution d'une équation différentielle jusqu'à la puissance $n+1$ des excentricités, alors que le précurseur ne l'a développée que jusqu'à la puissance n, ils font leur métier avec une conscience admirable.

D'autres qualités sont nécessaires pour enseigner proprement.

Les défauts des professionnels s'expliquent par le caractère actuel de l'Astronomie : c'est une science parfaite ou finie, comme vous voudrez.

Les découvertes du XIX^e^ siècle devant lesquelles les prêtres du temple font un si beau vacarme, ont une importance théorique médiocre, pratique nulle. Depuis cinquante ans on gratte des décimales. Les mathématiciens démontrent des théorèmes : ils cherchent par exemple ce que deviendra la stabilité du système après que les corps qui le constituent, seront réduits en poudre par leurs chocs : ils appellent ce beau travail « prolonger analytiquement la destinée ». Les professionnels ne sont plus intéressants. Au XVIII^e^ siècle ils l'étaient à un point dont la prodigieuse Astronomie de Lalande donne l'idée. Il fallait alors élever le monument : il ne s'agit plus que d'en ramoner les cheminées. Au XVIII^e^ siècle les professionnels étaient des philosophes; aujourd'hui ce sont des manœuvres, manœuvres mathématiques, manœuvres spectroscopiques, manœuvres photographes.

Ils sont embêtants comme des manœuvres !.....

Les vices pédagogiques caractéristiques des professionnels s'étalent

dans les *Exercices astronomiques* de Gruey qui sont bien intéressants comme caricature. Le malheureux arrive à transformer en rébus les questions les plus instructives.

Voici des exemples.

Supposons un équatorial parfaitement réglé. Si la réfraction n'existait pas, une étoile ferait son image constamment sur la croisée des fils d'un réticule. La réfraction existe : trouver la courbe décrite par l'étoile apparente dans le plan du réticule, pour une forme simple de la réfraction. Le problème est théorique, un équatorial parfaitement réglé n'existant pas. Néanmoins il est intéressant pour fixer les idées.

Là-dessus Gruey écrit 23 pages, sans figure, sans rien qui puisse accrocher l'attention! De sorte que d'un problème d'un intérêt pratique nul mais bon comme exercice, il fait une colle de taupin.

Gruey calcule le temps que met le Soleil à traverser un vertical d'azimut donné. Il étale une solution *rigoureuse*; puis satisfait, il consent à donner la solution approchée immédiate et pratiquement ultra suffisante.

Gruey pose de « jolis » problèmes : Quelle est la courbe formée par les lieux qui voient rigoureusement le Soleil à leur zénith au moins une fois par an? Il trouve deux spirales, ce qui est évident; mais il détermine l'équation de ces spirales, ce qui est inutile.

Je serais curieux de savoir combien d'exemplaires de ces exercices ont jamais servi,... si ce n'est à donner un problème pour le certificat d'Astronomie.

Si la divination de ces rébus est nécessaire aux futurs « praticiens », ce dont je n'ai pas à m'occuper, toujours est-il que par un tel enseignement vous chassez les étudiants non férus du singulier désir d'entrer dans un observatoire.

*
* *

Les étudiants désertent les cours d'Astronomie, quand l'appeau d'un diplôme acquis à peu de frais intellectuels ne les retient pas. Il savent la carrière d'astronome encombrée par les fils et les neveux à papa; ils n'ont pas envie de lutter contre une concurrence népotique pour aboutir à de maigres appointements.

C'est par d'autres moyens qu'on séduira les plus intelligents.

Ils s'intéresseraient, non pas à l'histoire de l'Astronomie, mais à l'exposé des moyens employés pour fonder l'Astronomie. Ils seraient curieux de connaître, avec nombres et observations à l'appui, comment on a déterminé les constantes de notre système, les éléments des orbites des planètes, les paramètres fondamentaux. Mais on déverse inlassablement sur leur tête des formules qu'ils n'appliqueront jamais; on les assomme avec des développements en série.

Systématiquement avec des arbres on leur cache la forêt.

Les premiers astronomes furent des bergers. Les conséquences qu'ils

tirèrent de leurs observations, souvent ingénieuses, furent donc toujours très naturelles. L'Astronomie s'est développée chez les Grecs et chez les Arabes, alors que les mathématiques étaient dans l'enfance. Nos étudiants concluent de là que l'Astronomie, dans ses parties fondamentales, est à la portée de ceux qui raisonnent bien et savent regarder autour d'eux.

Imaginez leurs réflexions alors qu'inlassablement on déverse sur leurs têtes des formules et de l'algèbre.

Que ces formules, que cette algèbre soient indispensables à de futurs astronomes, je ne le discute pas. Mais nos étudiants ne sont que des gens curieux de l'ensemble d'une science unique en son genre. Au lieu d'un édifice, on leur décrit minutieusement les caves, sous le prétexte qu'ils ont toute leur vie pour visiter les étages supérieurs : c'est toujours le professionnel serinant de futurs professionnels.

*
* *

Les astronomes objectent que dans une année (mais une année de faculté fait six mois d'enseignement), ils ne peuvent que poser les bases sur lesquels *plus tard* l'étudiant construira l'édifice de ses connaissances.

Nous voici dans le cœur du sujet.

L'Astronomie est une science d'approximations, de développements en série (la définition est de Pontécoulant). Ces développements vous pouvez les limiter au premier terme; vous pouvez en mettre 1967 comme dans la théorie de la Lune par Delaunay. Et vous pouvez être également intelligent, également scientifique en vous limitant au premier terme ou en écrivant les 1967.

Assurément pour tous les termes, une année scolaire ne suffit pas.

En vous bornant aux premiers, mon ouvrage prouve qu'on fait le tour de l'Astronomie dans un an.

Reste mon affirmation : *ne conserver que le premier terme n'enlève rien à la valeur scientifique de l'exposé.* Si vous en doutez, lisez Newton, les astronomes du XVIII^e^ siècle parmi lesquels Laplace.

Prenons des exemples.

L'équation qui donne la position du Soleil sur l'écliptique en anomalie, est :

$$\theta = \omega t + 2e \sin \omega t + \frac{5e^2}{4} \sin 2\omega t + \ldots\ldots$$

Dans cette formule remplacez e par sa valeur 0,0167.

Les coefficients deviennent :

$$2e = 0{,}0335 = 115' \qquad 5e^2 : 4 = 0{,}000349 = 1'$$

Êtes-vous plus intéressant, plus scientifique, en introduisant cette minute supplémentaire? Vous compliquez la formule : en êtes-vous plus éducatif?

L'erreur est importante pour le *Bureau des Longitudes*; mais nous faisons de l'Astronomie pour regarder autour de nous, mettre des faits dans une forme, non pour gratter les décimales.

Je veux expliquer la théorie de la libration en longitude. Les choses vont d'elles-mêmes dans *l'hypothèse elliptique simple* qui correspond aux deux premiers termes de la formule : je trouve suffisant de les conserver.

Le résultat de votre bluff de précision est que, dans l'impossibilité d'être *parfaitement* précis, le bafouillage règne en maître dans l'Université. C'est la théorie de tout ou rien, commode pour l'ignorance et la paresse. Le tout est impossible; le rien s'ensuit. Ils ont du mot *rigueur* plein la bouche; mais leurs élèves ne savent pas le commencement. Il leur faut les 1967 termes de Delaunay; ils considèrent avec mépris la série réduite au premier terme ..... que la plupart du temps ils ne savent comment établir.

Leur précision (!?) transforme l'Astronomie en un orgue de barbarie abrutissant. Je précise par un exemple.

Au XVIII^e^ siècle on avait classé les inégalités lunaires fondamentales. Des génies, authentiques ceux-là, en avaient découvert les causes concrètes, en avaient calculé la grandeur approchée. Comme on ne les tirait pas automatiquement du développement en série des équations différentielles, on se rendait compte de leurs causes *mécaniques*.

Que pour le calcul des inégalités lunaires, le développement en série soit préférable, je ne le conteste pas. Croyez-vous que ce soit comprendre que de tourner une manivelle, fût-elle algorithmique?

N'est-il pas plus intelligent de calculer directement les quatre grandes inégalités, même par des moyens de fortune, que de les noyer dans un fatras où l'intelligence disparaît devant la mécanique algébrique?

Même pour les futurs *praticiens* il n'est pas inutile d'avoir compris la raison des phénomènes, avant de se confiner dans leur métier, serait-il de développer en série.

Un brave homme qui s'est cassé la figure en tombant de 1 800 mètres (l'aéroplane qu'il avait construit s'étant retourné), avait écrit un volume suivant la quintessence des méthodes que je critique. Il y montrait que la théorie de l'aéroplane dépend d'une équation différentielle du 9^e^ ordre.

Il simplifiait ensuite et ne laissait que LES TERMES FINIS que tout le monde pose en l'espèce. Il donne une figure dans son livre : *le centre de gravité y est placé de travers*. Je ne m'étonne donc pas que son biplan ait capoté. Au lieu des équations différentielles du 9^e^ ordre, il aurait mieux valu placer correctement le centre de gravité.

L'Université possède une collection d'idiots néfastes qui veulent qu'on dise : « Dieu! que c'est fort! ». Je n'ai qu'un rêve ..... que mon lecteur pense : « Ce n'est pas malin! » Mes livres sont assez longuement travaillés pour donner l'impression qu'il est impossible de faire

autrement, alors que, pour être intelligent, je dois prendre le contre-pied de ce qu'on trouve dans tous nos ouvrages classiques.

Au lycée Saint-Louis j'avais un professeur qui bafouillait à plaisir. Quand il ne savait plus à quel saint se vouer, il s'écriait : « Je vais appliquer le calcul intégral! » Son « application » faisait passer le temps... jusqu'au tambour. Nos idiots « appliquent le calcul intégral ». Mais il n'y a pas de tambour pour leur sauver la face!

Voici ce que dit Lalande, le plus étonnant professeur qui ait jamais existé : « Il faut se rendre chaque proposition assez familière pour n'être point étonné qu'elle ait été trouvée. Il faut qu'elle paraisse si naturelle qu'on eût pu soi-même la découvrir au moyen de ce qui précède.

« Il faut exercer son imagination beaucoup plus que sa mémoire, lire peu et penser beaucoup, chercher par soi-même les démonstrations, essayer ses forces le plus souvent qu'on le peut, développer les choses qu'on a lues, ne chercher dans le livre que la confirmation de ce qu'on a trouvé. »

Ces conseils, admirables dans leur évidence, vous pourrez les suivre avec mon livre. Aussi bien je me ferais un grand honneur d'avoir adapté Lalande à nos procédés modernes d'enseignement : au reproche de l'avoir lu, relu et médité, j'éprouverais un grand plaisir. Certes nos livres n'ont à première vue que des différences : mais il n'est qu'une chose essentielle, *l'état d'âme* : il est le même pour Lalande, illustre, et pour son admirateur, astronome d'occasion et très humble élève.

*
* *

Je vous entends : « En définitive cet assommant réformateur, hargneux et mal embouché, vante ce qu'on publie sous les noms de Cosmographie et d'Astronomie populaire. »

Vous êtes en plein dans l'erreur.

Juste milieu j'ai toujours été (avec quelque violence, je l'accorde), juste milieu je reste. Énergiquement centre gauche, je mets à défendre le bon sens, l'ardeur et la fougue que d'aucuns dépensent à l'attaquer.

Je suis donc à égale distance des Astronomies populaires, des Cosmographies de nos programmes, — et des Astronomies pour professionnels.

Si j'admets que mon lecteur n'est pas ambitieux de continuer Pontécoulant, Le Verrier ou Delaunay, de construire une table des satellites de Cupidon ou de donner le bilan des inégalités de Pégase, j'admets aussi que le vague le dégoûte; il veut qu'on soit précis dans la description des phénomènes. On peut se borner aux premiers termes des séries; faut-il encore établir ces premiers termes. Je pense qu'il y a place à prendre entre les continuateurs d'Arago et ceux de... Delambre, pour ne pas remonter à La Caille et citer le premier exemple moderne

de ces Astronomies assommantes écrites par des professionnels pour de futurs professionnels.

J'ai défini mon site en vous disant que je m'efforce d'adapter l'Astronomie de Lalande, merveilleuse, malheureusement illisible en 1918 pour ceux dont le métier n'est pas d'étudier les sciences. Cent cinquante ans d'efforts permettent des démonstrations plus courtes et plus simples que celles de Lalande, pour simples et courtes qu'elles paraissaient de son temps.

A la vérité, de son propre aveu, Lalande écrivait pour les amateurs et pour les professionnels; mais il craint de mécontenter les uns et les autres. Je n'écris ni pour les amateurs, ni pour les professionnels. J'exige de mon lecteur des connaissances que n'ont pas les premiers. Quant aux seconds, imparfaitement revêtus de peaux de lion, ils ne manqueront pas de déclarer que je ne suis pas assez profond pour leur plaire.

Caractérisons les Astronomies populaires que je m'efforce de ne pas imiter.

*
* *

Deux Astronomies populaires sont de premier ordre : celles d'Arago et d'Herschel. Elles n'ont qu'un défaut : on n'y comprend rien qu'à la condition de savoir ce qu'elles ont la prétention de vous apprendre.

A part cela, ce sont des ouvrages parfaits, écrits par des hommes très intelligents, dont la lecture est un agréable passe-temps.

Ils n'ont pas réussi, par ce qu'il est impossible de réussir.

Il y a contradiction dans leur tentative : LA VULGARISATION SCIENTIFIQUE EST UN GENRE FAUX ET, SOMME TOUTE, NUISIBLE.

L'homme qui pour des raisons faciles à démêler, fit un chef-d'œuvre d'esprit d'une entreprise désespérée, Fontenelle, dans sa *Pluralité des mondes*, n'a pas d'illusions sur la valeur de ce qu'il tente.

« J'ai voulu, dit-il, traiter la philosophie d'une manière qui ne fût pas philosophique : j'ai tâché de l'amener à un point où elle ne fût ni trop sèche pour les gens du monde, ni trop badine pour les savants. Mais si on me dit à peu près comme à Cicéron qu'un pareil ouvrage n'est propre ni aux savants qui n'y peuvent rien apprendre, ni aux gens du monde qui n'auront pas envie d'y rien apprendre, je n'ai garde de répondre ce qu'il répondit. Il se peut bien faire qu'en cherchant un milieu où la philosophie convînt à tout le monde, j'en aie trouvé un où elle ne convînt à personne : les milieux sont trop difficiles à tenir, et je ne crois pas qu'il me prenne envie de me mettre une seconde fois dans la même peine.

« Je dois avertir ceux qui liront ce livre et qui ont quelque connaissance de la physique que je n'ai point du tout prétendu les instruire, mais seulement les divertir en leur présentant d'une manière un peu plus agréable et plus égayée, ce qu'ils savent déjà plus solidement. J'avertis ceux à qui ces matières sont nouvelles, que j'ai cru pouvoir les instruire et les divertir tout à la fois. Les premiers iront contre mon intention s'ils cherchent ici de l'utilité; et les seconds s'ils n'y cherchent que de l'agrément. »

C'est fort bien dit. J'ai plaisir à lire Fontenelle parce que je connais mieux que lui ce dont il parle.

Mais je doute qu'un ignorant y trouve la même distraction et en retire de l'utilité sans un commentaire trois fois long comme le texte.

Aussi bien un genre d'ouvrages utile en 1680, ne l'est plus en 1918 où les magazines pullulent, où la presse quotidienne, hebdomadaire, semi-mensuelle, mensuelle, est pleine de chroniques pseudo-scientifiques dans lesquelles les lecteurs ignorants recueillent au moins quelques idées fausses. Elles prouvent que beaucoup de savants, tirant le diable par la queue, éprouvent le besoin de parfaire leur terme ou de mettre du beurre dans leurs épinards. A la vérité je trouverais plus digne de copier de la musique, comme Rousseau, que de vendre des morceaux de ma cervelle; mais pour ce que vaut leur cervelle, j'approuve qu'ils n'hésitent pas à en tirer de l'argent, puisqu'ils trouvent des imbéciles pour la payer.

Impossible d'être utile sans exiger du lecteur de la peine et des connaissances préalables. De vagues renseignements sont des poisons intellectuels; ils apprennent à pérorer!

Arago, Herschel étaient des hommes fort au-dessus de la moyenne. Leurs Astronomies, qui ont les défauts du genre, en ont toutes les qualités. Depuis, les Astronomies populaires et les journaux populaires d'Astronomie se sont multipliés, caricatures de ces remarquables modèles.

*
* *

Première caractéristique de ces ouvrages : ignorer les mathématiques élémentaires.

Les Astronomies populaires détestent ce qui sent la précision.

Pour populaire qu'on tienne à rester, il est facile d'expliquer l'emploi des coordonnées équatoriales (déclinaison, ascension droite). Nos vulgarisateurs n'osent pas exiger cet effort : en conséquence leurs ouvrages contiendront par exemple cent figures de constellations non orientées, à des échelles différentes mais non précisées, ne pouvant servir au lecteur qui veut poursuivre ses études.

La vulgarisation apparaît dans son rôle néfaste : habituer les gens à se payer de mots, à croire comprendre ce qu'au fond ils n'entendent pas, à se déclarer satisfaits de demi-lumières, de clairs obscurs plus trompeurs que l'obscurité complète.

Il n'est pas indispensable de savoir ce qu'est la précession des équinoxes; mais, si l'on en parle, qu'on explique au moins la façon de déterminer le phénomène et les conséquences qu'il peut avoir. Le genre d'intérêt du fait que le Soleil passe d'un hémisphère à l'autre en ne recouvrant pas toujours les mêmes étoiles, est d'un ordre tel qu'on peut décemment l'ignorer : il est donc absurde d'en parler sans précision

*
* *

Seconde caractéristique des astronomies populaires : ramener certains clichés historiques qui tiennent beaucoup de place.

Qu'il soit impossible en Astronomie d'oublier le passé, est évident : l'Astronomie, *science historique*, se construit automatiquement du seul fait que les résultats sont conservés, pour peu précis qu'ils soient. L'accumulation de petites inégalités finit par produire des différences énormes. Nous profitons aujourd'hui des observations d'Hipparque.

Mais entre utiliser leurs observations et raconter leurs erreurs théoriques, est un abîme. Nous devons élaguer ce qui n'est pas éducatif. Que nous importent les épicycles alors qu'il est infiniment plus difficile d'imaginer le mouvement épicycloïdal que l'elliptique?

A l'inverse il faut montrer comment les anciens résolvaient certains problèmes expérimentaux, grossièrement il est vrai. Leurs méthodes, rudimentaires mais non pas fausses, ont l'immense avantage pédagogique d'être claires et concrètes.

La partie expérimentale de l'Astronomie antique reste debout. C'est une première, une grossière approximation : mais nos faiseurs de précision devraient savoir, pour citer un exemple, que le jour moyen déterminé par Cassini, il y a deux siècles, à partir des observations d'Hipparque, est le même qu'on trouve dans la *Connaissance des Temps*, avec toutes ses décimales.

De l'Astronomie des anciens, ils choisissent ce que je laisse, ils oublient ce que je garde.

La mesure de la Terre par Eratosthène me paraît aussi intéressante que celle de Maupertuis; la mesure de la parallaxe solaire par Aristarque me semble merveilleuse : les résultats sont pourtant grossièrement erronés. A l'inverse, toute l'Astronomie *théorique* antérieure à Képler m'assomme effroyablement. C'est qu'une expérience subsiste alors même que le résultat manque de précision : une théorie mauvaise encombre.

*
* *

Troisième caractéristique des Astronomies populaires : l'éloquence.

Certains Sanchos bien caractérisés deviennent « poètes » quand ils parlent d'espaces interstellaires. Kant avait une belle âme et toutes les qualités intellectuelles qu'on voudra. Mais je grince des dents en lisant ce passage dont je copie la traduction dans une revue astronomique; elle est tirée de l'opuscule sur la *Constitution du Ciel*.

« L'aspect du ciel étoilé pendant une nuit pure et tranquille procure une jouissance qu'éprouvent seules les âmes supérieures. Au sein du silence général de la nature et dans le calme de tous nos sens, l'entendement secret de l'âme immortelle parle un langage indéfinissable et *enfante des conceptions*

difficiles à exprimer. Si parmi les êtres pensants de notre planète, il se trouve des esprits vulgaires qui restent esclaves de la vanité, ce globe est à plaindre d'avoir donné le jour à de telles créatures. Mais sa valeur est grande de porter à sa surface des intelligences capables de s'élever vers les plus hautes contemplations de la nature. »

Bon exemple des inimitables bouffonneries que l'Astronomie (qui n'a cependant rien d'excitant) fait éclore dans la tête des philosophes.

Toutes les dix lignes les vulgarisateurs s'abîment dans la stupeur. Ils s'étonnent d'être assez prodigieux pour comprendre les merveilles de la nature; ils n'en reviennent pas d'avoir pu mesurer la distance de la Terre à la Lune et que cette distance vaille 60 rayons terrestres; ce qui, à la vérité, n'est pas plus difficile que de mesurer l'intervalle de deux bornes kilométriques.

Voici un exemple des sottises auxquelles aboutit cette manie grandiloquente.

Dans son Astronomie populaire, Herschel fils se demande quel aspect offre la Terre pour d'hypothétiques habitants de la Lune : « Ils ont, dit-il, ce spectacle *extraordinaire* d'un satellite de 2° de diamètre apparent! » Mais en quoi le spectacle est-il *extraordinaire* puisqu'il existe d'une manière permanente pour les habitants de la Lune, les *nouvelles terres* exceptées?

D'autres décrivent l'extase des habitants d'une planète dont les nombreux satellites n'ont pas même couleur. Ils oublient que le clair de Lune est franchement bleu, le plein Soleil franchement jaune. Nous y sommes habitués; ..... de même les habitants de la planète à leurs satellites multicolores.

J'entends : « Comment demeurer insensible devant l'immensité des mondes? »

Pour ma part je trouverais affolant que la sphère céleste fût une voûte opaque de rayon petit. Car, alors, que se passerait-il derrière?...

L'immensité d'un Sahara inquiète moins que la réclusion dans une enceinte dont jamais vous ne franchirez les murs qu'on vous autorise cependant à toucher. En Beauce l'horizon ne vous inquiète pas : en montagne, on veut toujours voir ce qu'il y a derrière la crête qui coupe la vue. Il n'y a rien d'intéressant? — qu'importe!

Le savant est blasé, depuis le temps qu'il regarde les phénomènes grands ou petits. L'ignorant s'étonne quand il apprend que le Soleil est distant de 149 millions de kilomètres. L'énormité du chiffre le frappe et non ce qu'il représente. Aussi les vulgarisateurs ont soin d'écrire tous les zéros : on s'y perd, le gros effet est produit.

Le spectacle du monde amuse le savant; il ne l'émeut jamais. Pour l'homme intelligent la Science n'a que de l'ironie. Quand on voit les ficelles du spectacle, il perd sa splendeur; ce n'est pas la peine de se gratter pour simuler un enthousiasme que personne n'éprouve. Alors

qu'il se bat les flancs pour entasser les épithètes, le faiseur d'articles de Revue pense aux 150 francs qu'on le paiera!

Le savant vit de la science : idole pour le public, vache à lait pour le pontife. Quand deux augures se rencontraient, ils pouffaient de rire en se tapant sur le ventre : nos savants sont trop dans la peau du bonhomme pour sourire en se regardant; ils ont perdu le sens du ridicule. Je fais scandale en crevant leur baudruche.

Résultat de la grandiloquence : les vulgariseurs « tirent à la ligne ». Mettre en 100 lignes ce qui tient en 5, me paraît inepte. Mieux vaut passer des intermédiaires que de prétendre ne laisser aucune peine au lecteur. Incapable de faire le pont entre deux propositions voisines, il n'est pas intéressant.

Ne travaillons pas pour qui veut surtout ménager ses méninges.

AIDE-TOI, LE CIEL T'AIDERA!

*
* *

Les vulgarisateurs font de l'esprit!

Le type du genre est feu l'inoubliable Immortel, qui, reçu à l'École Polytechnique dans les bras de sa nourrice, fut toute sa vie l'enfant prodige, copieux et médiocre. Il faisait de l'esprit comme Gaudissart des calembours. Ces gens-là me sont insupportables : je vais donc vous les présenter en liberté. Je tire ce qui suit de l'éloge de feu Urbain Jean Joseph Y, ce qui me permettra de montrer l'état d'âme d'un grand savant, en même temps que celui de son panégyriste.

L'Immortel commence par des idées générales : « Au temps seul appartient de consacrer la gloire ». « Les travaux d'un homme de science sont une trop grande part de sa vie pour que l'on puisse séparer les deux souvenirs. C'est dans un même récit que leurs histoires se déroulent et s'expliquent, qu'elles s'éclairent mutuellement en s'unissant sans se confondre, dans une mesure qu'un vain caprice ne saurait régler! »

Je passe les gentillesses du début. Y est nommé répétiteur d'Astronomie. Voici la lettre *intime* que l'Immortel croit nécessaire de transmettre à la postérité.

« En osant accepter les fonctions qui ont été successivement remplies par Arago, Mathieu et Savary, je me suis imposé l'obligation de ne pas laisser baisser dans l'estime publique le poste qu'ils ont occupé, et pour cela je dois non seulement accepter mais rechercher les occasions d'étendre mes connaissances. »

Étrange style pour écrire à son père!

Ne montez donc pas sur des échasses pour déclarer que vous ferez votre devoir! Pour être singulier, faites-le; pour être très singulier faites-le sans phrases!

Y se passionne. « Le succès dès les premiers pas le surprend et l'attache. Sur ce terrain fécond, dont chaque parcelle a tant de prix,

il comprend qu'aucun effort ne doit rester stérile, qu'aucune déception n'est à redouter. »

Le besoin d'être ingénieux, piquant, conduit notre Immortel, non seulement au pire galimatias, au plus ridicule amphigouri, mais à de vraies sottises.

« La Terre, à chaque instant, si elle était abandonnée à elle-même, s'élancerait en ligne droite vers les profondeurs de l'espace avec une vitesse de 600 000 lieues par jour environ. » La Terre ne s'élancerait pas, puisqu'elle est toute lancée! Si vous étiez simple, mon bon ami, vous auriez évité cette proposition contraire au théorème des forces vives. Vous auriez même supprimé « ces profondeurs de l'espace » qui sont un non-sens, ainsi que votre « environ » qui est ridicule venant après « lieues », mesure désuète!

Voltaire écrivait d'une autre plume.

Suit un raisonnement... inepte.

Je dois abréger : vous trouverez le morceau tout entier dans le tome XV des *Mémoires de l'Observatoire*.

L'Immortel remarque que le Soleil *par jour* dévie la Terre de 4 000 lieues « qui font l'écart de la tangente à l'ellipse », tandis que Jupiter, quand il agit le plus, ne peut ajouter à ces quatre mille lieues qu'un kilomètre seulement. « Consacrer une vie de travail et d'efforts à suivre des effets si méprisables en apparence, n'est-ce pas tenter l'impossible et, par curiosité excessive et frivole, franchir inutilement toutes les bornes! » La phrase peut-être académique, est stupide.

Elle rebondit sur une sottise : « Les chiffres sont exacts, mais c'est d'une illusion qu'ils tirent leur force apparente.... Il ne faut pas dire : un kilomètre par jour représente en une année 365 kilomètres ; ce serait une idée très fausse.... Un kilomètre par jour n'en représente pas en une année 365, mais 133 000 ; car les effets s'accroissent comme le carré des temps. »

Malheureux Immortel, nous comparons des forces : nous sommes bien obligés de comparer leurs effets dans le même temps. Les chiffres disent exactement ce qu'ils doivent. Malgré vos 133 000 lieues destinées à épater les jolies femmes qui ne vous écoutent même pas, vous savez bien que les perturbations sont petites.

L'éloquence hors du sujet conduit à énoncer des bêtises.

Certes il est possible, parlant science, de montrer qu'on a de l'esprit : Fontenelle en fit la preuve. Mais il faut un état d'âme qui n'est pas fréquent chez nos savantasses. Il ne faut pas admirer quand même, ni pousser des cris d'extase à jet continu. La science n'est pas austère quand on ne la juche pas sur un autel; les savants sont de curieux originaux quand on ne les camoufle ni en apôtres, ni en saints. Sous la plume de Fontenelle *jeune*, Y deviendrait un type impayable de spécialiste bourru qui ne perdrait rien de son vrai mérite à ne pas être coiffé d'une auréole de carton doré. Sous la plume de l'Immortel, c'est un autre Immortel ridicule et ampoulé.

*
* *

Les vulgarisateurs veulent épater le bourgeois.

Par exemple ils vous diront qu'on *pèse les étoiles*. Stupeur du gogo! Malheureusement on détermine les masses des étoiles, ce qui est tout différent; on les détermine en partant d'une hypothèse et d'après les mouvements qu'elles produisent, ce qui n'est pas sensationnel.

La science n'est pas sensationnelle : mais nos savantasses font les plus exténuants efforts pour qu'on ne débine pas leur petit truc, parce qu'à l'usage, il apparaît comme entièrement dénué de sorcellerie. Ils prennent des airs de conspirateur pour murmurer des théorèmes qui, réduits en style vulgaire, énoncent des truismes, ou même n'énoncent rien. Telles les propositions sur la stabilité du système solaire qui reviennent à dire que le système est stable parce que nous posons des hypothèses qui impliquent qu'il le soit.

Si le public se doutait de la vérité, il se ficherait de nous et n'aurait pas tort! Il suffira d'une demi-douzaine de bonshommes dans mon genre pour l'éclairer, le public; il se lassera de payer, pour qu'en échange de son argent on lui fasse gober des calembredaines.

La science, souvent très amusante, n'a rien de mystique : le mystère est du placage. L'Astronomie expérimentale, c'est la détermination des chemins que parcourent le Soleil, la Lune et les planètes dans le champ des étoiles; l'Astronomie théorique, c'est le calcul de ces chemins par des développements en série que fournissent le tâtonnement ou l'application d'une hypothèse. Pourquoi faire une religion de cela qui, loin d'être « sublime », tire son principal mérite de son « terre à terre » et de sa grande simplicité?

*
* *

Dernière caractéristique de l'Astronomie populaire : elle est composée pour les dames. J'écris dame et non pas femme.

« J'ai mis dans ces entretiens une femme qui n'a jamais ouï parler de ces choses-là; j'ai cru que cette fiction me servirait à encourager les *dames* par l'exemple d'une femme qui ne sortant jamais des bornes d'une personne qui n'a nulle teinture des sciences (?!), ne laisse pas de ranger dans sa tête, sans confusion, les tourbillons et les mondes (!).

« Pourquoi les femmes céderaient-elles à cette marquise imaginaire qui ne conçoit que ce qu'elle ne peut se dispenser de concevoir (!). »

Comme cela se passait en 1686, la marquise de Fontenelle (posons qu'elle avait trente-cinq ans) est la grand'mère de la marquise du Châtelet qui était une bien insupportable pécore! Elle a traduit Newton, aidée par Voltaire qui n'y comprenait rien, mais ne laissait pas de tout expliquer, comme il sied à un philosophe.

Je ne sais quel personnage de Shakespeare disait à je ne sais quel autre : « Elle est bien petite!... » « Peu importe, répondit le noble duc, pourvu que sa tête vienne jusqu'à mon cœur! » Il était féministe à sa manière.

Un cœur, ces dames astronomes ont bien mieux : elles ont une âme!

Aussi n'est-il pas rare de voir au dos de l'Astronomie populaire qu'édite Aristarque de Belleville :

Buste d'Aristarque de Belleville.
Sur la demande d'un grand nombre de lectrices
Madame Michel-Ange
A laquelle on doit le meilleur buste de cet astronome,
A consenti à en faire elle-même un certain nombre de reproductions,
Terre cuite ou plâtre (prix modérés)
1089, rue du Mont-Parnasse, Paris.

Pourquoi blaguer? Puisqu'il existe des « dames » qui n'ont personne à soigner, personne à consoler, pas le moindre bien à faire, qu'elles lisent les œuvres complètes d'Aristarque de Belleville et achètent son buste (terre cuite ou plâtre) : cela vaut mieux que d'aller aux courses ou de perdre son argent dans les tripots.

La divine Émilie était une fichue pécore que je ne souhaite à personne pour épouse droite ou gauche; au surplus bien appariée à ce vilain singe de Voltaire, qui le 4 septembre 1749 écrivait à d'Argenson :

« Mme du Châtelet vous mande que cette nuit, étant à son secrétaire et griffonnant quelque pancarte newtonienne, elle a eu un petit besoin. Ce petit besoin était une fille qui a paru sur-le-champ. On l'a étendue sur un livre de géométrie in-4°. Pour moi qui ai accouché d'un *Catilina*, je suis cent fois plus fatigué qu'elle. »

Elle mourut de ses couches, et l'on fit cette épitaphe :

Ci-gît qui perdit la vie
Dans le double enfantement
D'un traité de philosophie
Et d'un malheureux enfant.
Lequel des deux nous l'a ravie?
Sur ce funeste événement,
Quelle opinion devons-nous suivre?
Saint-Lambert s'en prend au livre,
Voltaire dit que c'est l'enfant.

Pour achever le crayon de ce fameux ménage à quatre, je signale une lettre de Voltaire à la sœur de la marquise (15 décembre 1749).

Il lui rappelle qu'il prêta plus de 40 000 francs au mari dont il reçut promesse de rente.

« Vous savez, madame, si j'ai jamais touché un sou de cette rente, si j'en ai rien demandé, et si même je n'ai pas donné quittance plusieurs années de suite, étant assurément très éloigné d'en exiger le paiement. »

Après cela qu'on rengaine le cliché de la Science moralisatrice et de la sublimité des choses du Ciel. Mme du Châtelet, son dos vert de mari et ses deux amants (l'un par trop jeune et l'autre vieux) me servent de caution peu bourgeoise auprès des jobards.

*
* *

Mais enfin, monsieur, et la démocratie, et le peuple!

Le peuple, avec vos universités populaires et votre science au rabais, vous essayez de le duper!

Dans les souvenirs de je ne sais quel Américain, je trouve une excellente histoire. Il était jeune et pauvre; un livre d'Astronomie populaire lui tombe entre les mains. Il s'enthousiasme; avec l'esprit d'affaire des transatlantiques, il veut tirer parti des connaissances fraîchement acquises. Il annonce donc des conférences populaires, payantes bien entendu. Tout marchait à satisfaction, ses auditeurs étaient nombreux, quand un capitaine au long cours eut la malencontreuse idée de venir entendre une leçon. L'orateur parlait des longitudes. Naturellement il bafouille, le capitaine relève aigrement ses erreurs : et ce fut la dernière conférence!

Que de conférenciers astronomes arrêteraient leurs topos si dans la salle se trouvait un homme compétent, ne dédaignant pas d'interrompre!

Que d'ignorance recouvre le plus souvent le verbiage de nos vulgarisateurs! Mieux vaut ne pas gratter le vernis dont la couche est trop mince.

*
* *

A égale distance des Astronomies pour professionnels et des Astronomies pour gens du monde, il y a donc place pour un ouvrage apprenant à regarder autour de soi, expliquant au lecteur les phénomènes qu'il remarquera sûrement si sa faculté d'observation a été systématiquement développée, seul but de toute éducation scientifique raisonnable. Je mets toujours à part les mathématiciens : j'ai dit cent fois à quel point je les trouve ridicules et néfastes.

Pour apprendre à regarder, l'enseignement doit se compléter par des manipulations, des exercices pratiques.

Elles sont belles aujourd'hui ces manipulations!

La théorie des jeunes demoiselles qui (sans savoir les quatres règles) prépare le certificat d'Astronomie APPROFONDIE, est amenée devant la lunette méridienne. Chacune regarde passer une étoile, ..., et cela s'appelle une manipulation : c'est même la plus importante, pour ne pas dire la seule.

« Mais vous n'exigez pourtant pas que l'on confie l'instrument une

nuit à chacune d'elles! » Oh que nenni! mais je ne vois pas davantage l'intérêt de le confier trois minutes!

Pour enseigner les phénomènes astronomiques au moyen de la lunette méridienne, il faut être professionnel.

Voici mon programme,..... qui est très différent.

PREMIÈRE SÉRIE D'EXERCICES.

Reconnaître dans le ciel l'équateur, l'écliptique, les pôles visibles de l'équateur et de l'écliptique. Localiser approximativement la ligne des nœuds, le célèbre point γ et son opposé. Utiliser pour cela une carte du Ciel à grande échelle.

Construire et régler un équatorial simplifié EN BOIS, de précision juste suffisante pour mesurer, rapidement et au degré près, les déclinaisons et les ascensions droites. Pointer les astres avec une alidade à pinnules.

L'appareil est facile à imaginer; on trouve du reste sa description complète au tome II, page 800, de l'*Astronomie* de Lalande.

On profitera des ressources industrielles modernes.

Le support est formé d'un madrier vertical reposant sur un T horizontal, sur lequel il est convenablement raidi. L'axe est fait d'un tube de laiton étiré, de 4 cm. de diamètre et de 150 cm. de long, tournant dans des colliers en laiton (l'industrie fournit des tubes entrant juste l'un dans l'autre). L'un des colliers est fixé à la base du T, l'autre au sommet du madrier vertical auquel on donne la longueur qui convient à la latitude du lieu. On imaginera aisément un réglage simple.

Les cercles sont constitués par des disques de bois tournés, de 57,3 de diamètre, sur la jante desquels on colle une division en centimètres.

Le degré vaut 5 millimètres sur la graduation.

L'un des cercles est fixé normalement à l'axe et détermine les ascensions droites. L'autre est fixé contre l'axe et donne les déclinaisons. Le réglage de l'axe s'obtient en utilisant la polaire et en suivant une étoile. Il constitue du reste par lui-même une excellente manipulation.

Pour riche qu'on soit, il est pédagogiquement excellent de conserver l'alidade à pinnules comme appareil de visée.

Qu'elle ne vous semble pas trop grossière! Entre les mains des savants du XVII^e^ siècle, elle a fourni des résultats admirables. Seriez-vous 60 fois moins habile qu'Hévélius? Il observait à la minute avec ses alidades; je ne vous demande des résultats qu'au degré près!

Je veux que l'appareil coûte 50 francs, pas davantage, parce que j'entends que vous en ayez un pour 4 étudiants au plus, c'est-à-dire pour chaque groupe d'étudiants manipulant ensemble.

On fait l'alidade avec un tube de laiton d'un mètre de long et de 3 centimètres de diamètre. Il est terminé à l'un des bouts par une plaque percée d'un petit trou, à l'autre par une croisée de fils métalliques.

Détermination de la trajectoire des planètes : on mesurera au degré près leurs coordonnées équatoriales; on les transportera sur une carte

du ciel. Au début de chaque manipulation on fera *le point* des planètes visibles; d'où la nécessité d'un équatorial simplifié pour chaque groupe d'étudiants.

La carte du ciel ne contiendra que les fondamentales; la partie voisine de l'écliptique sera développée comme dans les figures des pages 92 et 93. Rien n'est pédagogiquement absurde comme les cartes contenant une foule d'étoiles dont l'étudiant n'a jamais à se servir. Deux ou trois cents étoiles pour la partie visible du ciel, c'est plus que suffisant. Une carte n'en contenant pas davantage paraît vide.

Dès qu'il en aura la vente assurée, un éditeur fournira à bon compte des cartes toutes préparées sur lesquelles l'étudiant tracera (au crayon) les trajectoires étudiées.

Déterminer la trajectoire de la Lune.

Déterminer le point γ.

Déterminer les étoiles qui sont dans le colure des équinoxes et dans le colure des solstices.

Déterminer le pôle de l'écliptique.

Ces manipulations ne présentent aucune difficulté puisque l'Astronomie est fondée sur de telles observations. Copernic, Tycho, Képler, et tant d'autres n'avaient à leur disposition que des instruments moins précis que celui que je recommande. Que messieurs les astronomes ne fassent donc pas la moue : ce qui suffisait à Tycho, suffit largement à nos étudiants.

Deuxième série d'exercices.

J'y place les exercices sur le méridien et les passages : un théodolite est indispensable. Pour 350 francs, les catalogues en proposent à deux cercles (l'un vertical, l'autre horizontal), avec tous les réglages, à retournement d'axe, donnant la minute au vernier. Un tel appareil convenablement calé sert de lunette méridienne. Évidemment on ne peut en posséder un aussi grand nombre que d'équatoriaux simplifiés; mais serait-ce beaucoup que d'exiger un appareil pour deux groupes d'étudiants?

Voici les exercices les plus importants.

Réglage de l'instrument. Détermination du zéro du cercle vertical au moyen du bain de mercure.

Méridien par la méthode des hauteurs égales, méridien par les digressions de la polaire. Réglage d'une mire méridienne.

Temps de passage de quelques étoiles; détermination des différences d'ascensions droites et de déclinaisons.

Passage d'une étoile à plusieurs fils. Variation du temps de passage avec la déclinaison.

Temps de passage du disque solaire; détermination de son diamètre apparent. Même manipulation pour la Lune.

Le grand avantage du théodolite sur la lunette méridienne est de

fournir, dans une soirée, *sur le même astre*, un grand nombre d'observations. On en sera quitte pour passer, par le calcul, des coordonnées horizontales aux coordonnées équatoriales, ce qui est un excellent exercice. Par exemple, on peut chercher, pendant les trois ou quatre heures que dure la manipulation, l'arc de trajectoire décrit par la Lune; on mesure à des heures connues son azimut et sa hauteur; on calcule pour les mêmes temps sa déclinaison et son ascension droite, en s'aidant de quelques étoiles fondamentales voisines.

En montant sur l'oculaire de la lunette un rapporteur, on déterminera les angles de position de deux étoiles assez voisines (angle avec le vertical de l'arc de grand cercle passant par les étoiles). Connaissant la hauteur et l'azimut de l'une d'elles, on calculera sa déclinaison, son angle horaire, enfin l'angle que fait avec le cercle horaire l'arc joignant les étoiles (c'est une seconde espèce d'angle de position).

On fera de même l'étude de la position, par rapport au vertical, de la ligne des cornes de la Lune. On choisira le passage au méridien. Vu l'heure probable des manipulations, la Lune sera jeune; peu importe du reste. C'est une manière approchée de déterminer l'angle de l'écliptique avec le méridien pour une heure connue.

Troisième série d'exercices.

Elle contient les exercices sur le temps. On utilisera des horloges de construction simple, à pendules de bois, que les étudiants tripoteront à loisir.

Étude de la marche d'une horloge de temps moyen par comparaison avec les signaux de la Tour Eiffel.

Réglage approché par adjonction de poids au milieu du pendule. Ordre de grandeur des variations de la marche.

Réglage d'une horloge de temps sidéral au moyen des passages.

Comparaison d'une horloge de temps moyen et d'une horloge de temps sidéral par les coïncidences.

Comparaison de deux horloges au moyen d'un compte seconde.

Exercices systématiques sur les méthodes de l'œil et de l'oreille, de l'œil et de la main. C'est une bonne occasion d'employer un chronographe à bande. Comme étoile artificielle mobile, on utilisera un écran percé d'un trou, monté sur le chariot d'un enregistreur à cylindre. Un mouvement de phonographe peut remplacer l'enregistreur.

Quatrième série d'exercices.

Elle contient des observations qualitatives qu'on s'efforcera de préciser par des nombres.

Lever et coucher du Soleil, obliquité de la trajectoire au passage dans l'horizon. Variation du point de l'horizon le plus éclairé quand le Soleil est dessous.

Variation des points de lever et de coucher. Époque des plus grandes variations. Année tropique déduite de ces observations.

Calcul de l'arc semi-diurne, vérification approchée.

Mêmes observations pour la Lune.

Lever et coucher héliaques des étoiles. Variation de la durée de visibilité.

Étude d'un gnomon.

Ces observations exigent un horizon (exact ou approché) visible.

Le deuxième étage de l'École Normale supérieure (côté Vincennes) constitue l'observatoire idéal.

Mais 45, rue d'Ulm, on a d'autres soucis que d'enseigner : conséquemment les lycées possèdent de bien étranges professeurs.

Cinquième série d'exercices.

Elle contient les exercices photographiques et l'étude micrométrique des clichés. Il s'agit principalement des taches solaires et de la surface de la Lune.

Je ne puis entrer ici dans le détail technique. Un téléobjectif évite l'encombrement et donne à peu de frais des photographies assez grandes. Son prix (une centaine de francs) est très abordable. On le monte sur un tube de laiton dont la longueur n'excédera pas un mètre ou deux. Deux vis de rappel et une petite lunette servant de chercheur permettent de longues poses sans être gêné par le mouvement diurne.

A un mètre, le diamètre de la Lune vaut un centimètre environ; dans les conditions susdites un téléobjectif grossit aisément cinq fois.

L'étude micrométrique des clichés exige un microscope peu grossissant mû par une vis micrométrique. Le diamètre apparent de la Lune variant du septième de sa valeur moyenne, les clichés montrent sa variabilité et l'existence de la libration.

On fera l'étude des diamètres *sur les clichés*, et non pas directement, en raison du prix nécessairement élevé d'un oculaire micrométrique, de la nécessité de l'associer à une lunette de long foyer, enfin de la difficulté technique de son emploi.

Sur un cliché immobile les trajectoires des étoiles circompolaires sont des arcs de cercles concentriques ; ce qu'on vérifiera.

*
* *

Mes exercices pratiques diffèrent de ceux qu'on choisit ordinairement, autant qu'une chose intelligente d'une chose qui ne l'est pas. C'est toujours la même rengaine : le professionnel ne pensant qu'à l'éducation des professionnels, mais s'inquiétant comme d'un fétu de leur intelligence générale.

Pour que mon étudiant comprenne, la précision des résultats qu'il obtient lui-même, n'a pas la moindre importance. Déterminer les coordonnées à un degré près est plus que suffisant pour son éducation générale. En observant les passages à la seconde près, il classera ses

connaissances théoriques. Il s'agit de fixer ses idées, et non de le mettre en état de remplacer... Périgaud à la lunette méridienne.

Quand il aura parcouru le cycle de mes exercices, si quelque démon le pousse dans les Observatoires, il ne regrettera pas les connaissances générales acquises sous ma conduite. Le beau profit intellectuel quand avec peine il a fini par caler une lunette méridienne monstre ou un équatorial branlant!

Mes bons idiots, vous criez comme des putois parce que je veux qu'un professeur de physique ou de mécanique n'ignore pas les procédés de construction des appareils (je ne dis pas la technique). Mais quand il s'agit de votre petit truc, vous affichez la prétention que vos étudiants déterminent les passages au dixième de seconde près, ce qui est de la technique, et de la plus spéciale!

Comme toujours, il est vrai, vos prétentions ne sont que bluff, puisqu'en définitive vos étudiants ne savent rien!

N'espérez pas en effet nous donner le change par le résultat des examens que vous présidez. Pour le certificat d'Astronomie on vous adjoint deux comparses chargés d'authentiquer vos décisions; c'est-à-dire de recevoir, avec toutes sortes de mentions, des candidats et candidates incapables de distinguer une déclinaison d'une ascension droite! Si vous entendiez les propos qu'on tient sur votre compte, les railleries des étudiants que vous espérez gagner par votre faiblesse, vous seriez rouges de honte! A la vérité vous ne faites rien de pis que vos collègues des autres spécialités qui recrutent des élèves par la complaisance aux examens, ce qui fait la débâcle de nos diplômes.

La surenchère à la baisse, voilà toute votre politique universitaire!

Quand vous battez le rappel des étrangers, je supplie le Seigneur qu'ils ne vous entendent pas, afin de conserver de loin quelques illusions sur nos parchemins et nos titres!

*
* *

Quelques mots sur le rôle pédagogique que je fais jouer à la *Connaissance des Temps*.

Je l'utilise comme un *registre d'observations* pour vérifier les formules que j'établis à partir de certaines hypothèses. *Je n'ignore certes pas que les résultats de la Connaissance des Temps sont calculés, plusieurs années à l'avance, à l'aide de ces mêmes formules ou de formules plus complètes.* Logiquement c'est un cercle vicieux.

Mais pour ne pas jeter le décri sur leur science, les astronomes seront bien forcés d'admettre qu'aux centièmes et dixièmes de seconde près (ou parfois même aux dizaines de seconde près, comme pour la Lune) les nombres de la *Connaissance des Temps* sont ceux mêmes qu'un astronome habile trouverait directement quelques années plus tard.

Le cercle vicieux disparaît.

En fait c'est après des siècles de tâtonnement qu'on est parvenu à ce résumé de nos connaissances expérimentales que sont les tables publiées par les divers *Bureaux des Longitudes*. Mais devant les élèves j'ai le droit de supposer que la *Connaissance des Temps* est le résultat *immédiat* des observations, en les prévenant toutefois qu'elle en rabote les irrégularités et ajoute de son cru (par continuité) une précision que les observations sont fort loin d'atteindre.

J'utilise la *Connaissance des Temps pour 1915*, c'est-à-dire pour une année déjà révolue. Je suppose que les nombres ont été inscrits par un groupe d'observateurs extraordinairement habiles, au jour le jour, comme résultat de leur travail.

Le rôle pédagogique que j'assigne aux tables de la *Connaissance des Temps*, diffère beaucoup de celui que les professeurs d'Astronomie leur réservent. Quand dans leurs cours ils ne feignent pas d'en ignorer jusqu'à l'existence, ils ont pour marotte d'enseigner comment on les calcule, ce qui est le cadet de mes soucis. Nous payons des manœuvres pour cela.

Ils sont aussi intelligents que nos professeurs de Lycée qui tolèrent que leurs élèves soient incapables d'utiliser les tables de lignes trigonométriques ou de logarithmes, mais qui les assomment avec la manière de les calculer avec n décimales.

*
* *

Un de mes collègues disait de moi : « Il est assommant, il touche à tout. » Comme si je n'avais pas le droit de savoir l'Astronomie.

Personne ne s'étonne de voir des mathématiciens *purs* chargés de services techniques auxquels ils ne comprennent rien, dans des circonstances graves où le bon sens aurait exigé que l'on consultât l'intérêt général.

Au reste, si je ne suis pas astronome de profession, je n'ai pas grand'peine à savoir de cette science autant que bon nombre de nos professionnels français qu'il me serait trop facile de nommer.

Je connais un directeur d'Observatoire qui ne sait pas par quel bout on prend une lunette, qui est la joie de ceux qui l'admirent développant un cliché, qui ignore tout de l'Optique, du Magnétisme, je crois bien même de l'Astronomie... et qui n'est pas unique de son espèce dans notre beau pays de France!

Le pauvre homme s'étonnait que je marchasse sur ses brisées, considérant l'Astronomie comme son fief depuis qu'il touche les émoluments de directeur. Outré que j'eusse le toupet d'écrire un livre d'enseignement, il ne me cachait pas sa crainte qu'il ne fût rempli d'erreurs grossières. Il reçut pour réponse quelques bonnes vérités à bout portant.

Les titres ne m'imposent aucun respect : depuis trente ans que je suis professeur, j'ai connu trop d'ânes titrés!

Nos astronomes professionnels (les praticiens de Gruey) croient-ils donc leur petit truc bien difficile pour un physicien connaissant son métier?

Je ne prétends pas être capable de déterminer un passage comme qui ne fait que cela depuis trente ans; conséquemment je n'ai pas la prétention de finir ma vie moniteur dans l'art de déterminer les passages. L'étiquette ne fait rien à l'affaire. A la vérité je ne dirige pas un Observatoire : mais il s'agit purement et simplement ici de ce que les lecteurs *auxquels je m'adresse*, penseront, *à l'usage*, de mon Cours d'Astronomie. Je suis tranquille à cet égard : mes adversaires le sont moins que moi.

*
* *

Quiconque ne limite pas son public est sûr de l'échec.

Il va de soi que j'écris pour les Français. Je suis heureux et fier que mes livres passent la frontière; mais ils la passent précisément parce que j'écris pour les Français : ce sont les qualités de la race qu'on y cherche, et la tournure de notre esprit.

Je ne m'adresse pas aux spécialistes. Je ne perds rien à le déclarer : pour trop nombreux qu'ils soient au point de vue de l'utilité pratique de l'Astronomie et de la pauvreté du budget de l'enseignement supérieur, ils ne constituent pas un public.

Au surplus les premiers ils achèteront mon ouvrage, afin d'en pouvoir discourir.

Je n'écris pas davantage pour les soi-disant « hommes pratiques » qui veulent appliquer les formules sans savoir ce qu'il y a dessous. Ils ont des aide-mémoires que je n'ai pas la prétention d'évincer. Ils avouent pour les « professeurs » le plus absolu mépris. De ce qu'ils ont *fait le point* pendant trente ans, résulte qu'ils savent *faire le point*, mais pas du tout qu'ils savent exposer comment on fait le point et pour quelles raisons on le fait ainsi.

Je m'adresse aux gens qui trouvent qu'on applique aussi bien quand on sait les raisons de ce qu'on fait, et qui préfèrent prendre une fois pour toutes quelque peine intelligente plutôt que de collectionner des types de calcul avec cases, compartiments, sous-cases, sous-compartiments, le tout imprimé en trois couleurs de peur qu'on embrouille les cases et les sous-cases, les compartiments et les sous-compartiments.

Je me suis proposé l'éducation générale de mon lecteur; je ne prétends pas lui apprendre à faire le point avant qu'il sache comment il est possible de fixer la position d'un lieu sur la Terre par l'observation des astres.

En définitive mon public est formé des élèves et anciens élèves de l'École Normale, de l'École Polytechnique, de l'École Centrale, de l'École Navale, des Facultés, de tous les capables de comprendre les formules de la trigonométrie sphérique (4 pages d'un appendice de ce

volume), de tous les curieux de savoir sur quelles observations est fondée l'Astronomie, de tous ceux qui regardent autour d'eux, qui, dans leurs promenades, ont observé maints phénomènes dont ils veulent l'explication raisonnée.

*
* *

Chœur des adversaires.

« Il est assommant. Il nous force à réfléchir alors qu'il était si commode de tourner la manivelle aux équations! Il donne à ceux dont le cerveau n'est pas atrophié, le moyen de nous juger, tandis qu'avant ses livres (les étudiants ne sachant où apprendre), nous étions, paresseux ou travailleurs, intelligents ou obtus, exactement sur le même pied.

C'est embêtant!

« A la vérité nous ferons silence sur son livre ou nous affecterons le mépris. Malheureusement l'illusion nous est impossible : l'auteur est trop connu pour qu'il ne soit pas lu, ne serait-ce que par curiosité.

C'est embêtant!

« Tous ceux qui le voudront, comprendront. Et c'est ce qui nous chagrine. Qu'il était doux le temps, proche et lointain, où les meilleures volontés se heurtaient à l'absence de certains livres. On dormait sur ses deux oreilles.

C'est embêtant!

« Assurément dans son ouvrage nous glanerons des erreurs; mais nous serons ridicules de les relever aigrement parce qu'elles sont dénuées d'importance. Les étudiants ne nous pardonneraient pas, quand on nous donne un cheval, de chipoter sur la bride. Naguère les auteurs avaient pour premier soin de flatter les professeurs : celui-ci déclare qu'il se désintéresse de notre opinion. Il en appelle aux étudiants de nos jugements qui naguère avaient force de loi.

C'est embêtant!

« Ce monsieur chambarde toutes les habitudes! Il a l'audace intolérable de nous imposer de petits calculs numériques qui nécessitent la connaissance approfondie de la *Règle de trois simple*, si difficile à manier pour les mathématiciens de profession!

« Décidément les temps sont durs : c'est embêtant. »

*
* *

Monsieur Lala, professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse, a bien voulu se charger de la table des matières. Je lui en adresse tous mes remerciements.

ASTRONOMIE

LES ÉTOILES

CHAPITRE I

L'AXE DE LA TERRE ET LES COORDONNÉES ÉQUATORIALES

1. Fixité des étoiles.

1° — Parmi les astres, les plus nombreux (*étoiles ou fixes*) sont caractérisés par la nullité de leur diamètre apparent et par l'invariabilite quasi absolue des angles sous lesquels nous les voyons deux à deux.

Avec une rigueur presque absolue, nous pouvons les considérer comme des points géométriques lumineux fixés sur une sphère concave rigide dont le rayon est énorme par rapport à la plus grande des longueurs *dont nous disposions effectivement*, la distance de la Terre au Soleil. D'où résulte que nous pouvons placer le centre de cette sphère en un point quelconque d'un espace dont les dimensions sont grandes par rapport à la distance de la Terre au Soleil, c'est-à-dire pratiquement au point quelconque occupé par un observateur quelconque à une époque quelconque. Des droites (ou des plans) *fixes en direction* par rapport à la sphère céleste, peuvent être considérés comme *fixes en position* : quelle que soit leur translation, ils percent ou coupent la sphère céleste en un point ou suivant un grand cercle toujours les mêmes. Cela, malgré le déplacement probable du système solaire entier.

Pour définir les positions des étoiles les unes par rapport aux autres, il suffit théoriquement de mesurer leurs distances angulaires à deux étoiles prises comme repères fondamentaux; ce qui permet de les reporter matériellement sur une sphère. Pour la mesure, on utilisera

par exemple un sextant. C'était la méthode des astronomes anciens ; mais ils se servaient d'appareils moins précis que le sextant.

Nous possédons aujourd'hui des procédés de repérage bien meilleurs.

2° — A la vérité le système formé par les étoiles n'est pas absolument invariable : certaines étoiles ont des mouvements propres. Mais en considérant le système comme invariable, nous ne faisons qu'une erreur petite dans les cas les plus défavorables, et que nous pouvons regarder comme nulle pour la plupart des étoiles dans une première et toujours suffisante approximation pour les besoins de la pratique.

Les étoiles fournissent donc un admirable système de repères *pour les directions*. C'est aux étoiles (*astres fixes*) que de tous temps on a rapporté les positions des astres *errants* (*planètes*), de la Lune et du Soleil. Les trajectoires de ces corps par rapport à nous ont toujours été déterminées par leur projection dans le champ des étoiles et par la variation des diamètres apparents, variations qui donnent en valeurs relatives leurs distances à la Terre.

Les anciens avaient déjà compris l'importance de s'assurer de la fixité des étoiles. Ils avaient noté un grand nombre d'*alignements* : certaines étoiles se projettent sur une ligne droite ; elles se placent simultanément sur un fil tendu ou sur une règle. Les alignements que Ptolémée avait déterminés, se retrouvent encore aujourd'hui très approximativement, 18 siècles après : preuve que les étoiles ont conservé à très peu près leurs situations relatives.

3° — Pour distinguer les étoiles, on les a groupées en *constellations*, nommées d'une manière fantaisiste ou pour des raisons sur lesquelles nous laisserons discuter les archéologues. Chaque étoile du groupe est désignée par une lettre ou un numéro, à moins qu'on ne l'ait jugée digne d'un nom spécial. Par exemple on dit Sirius ou α du Grand Chien, Aldébaran ou α du Taureau, etc.

Comme certains catalogues contiennent 30 000 étoiles ou davantage, il est clair que les lettres de l'alphabet sont insuffisantes : on désigne alors l'étoile par son numéro de tel catalogue.

Je me garderai d'une description générale du Ciel ; quand l'occasion se présentera de parler d'une constellation, j'en donnerai le schème en me limitant aux étoiles principales (*fondamentales*) dont on trouvera les coordonnées au § 49. Le lecteur m'excusera de ne pas reproduire les figures dont on recouvre les étoiles ; elles ont tellement varié au cours des âges que leur rôle mnémonique a disparu. Trouver une Grande Ourse dans la figure 9 montrerait beaucoup d'imagination si l'on ne savait que l'Ourse est là pour caractériser le froid évoqué par la proximité du Pôle Nord.

2. Rotation de la Terre. Jour sidéral.

1° — La sphère céleste semble tourner autour de la Terre de l'est à l'ouest : nous savons aujourd'hui que c'est la Terre qui tourne de

l'ouest à l'est. L'hypothèse la plus simple est d'admettre que *la Terre tourne avec une vitesse angulaire constante autour d'une droite dont les traces sur la surface terrestre (pôles terrestres) sont invariables, et dont la direction dans l'espace reste la même.*

Avant de discuter cette hypothèse, voyons-en une conséquence immédiate.

Scellons une lunette dans un mur de manière à la rendre aussi invariable que possible. Nous constatons que tous les jours les mêmes étoiles viennent passer sur les fils du réticule, dans le même ordre. Nous appelons *jour sidéral* le temps qui s'écoule entre deux passages successifs de la même étoile sur la croisée des fils du réticule.

D'après notre hypothèse *le jour sidéral est invariable; nous le prenons comme unité fondamentale de temps.*

L'expérience semble d'abord confirmer nos hypothèses.

Construisons le mieux possible une horloge. Plaçons-la dans une cave profonde, à l'abri des variations de température, dans une caisse close et rigide pour que les variations de la pression atmosphérique n'interviennent pas. Comptons le nombre de battements dans le jour sidéral défini comme ci-dessus. Plus parfaites sont les précautions prises, mieux se vérifie la constance du jour sidéral, *étant admise la constance de la période du pendule de notre horloge.*

Évidemment notre raisonnement est un cercle vicieux. Pour déclarer que quelque chose est de durée constante, il faut le comparer à quelque chose dont on admet *a priori* la constance. C'est la constance de la période du pendule que nous posons ici; nous la posons en vertu de ce principe que nous ne voyons pas de raison pour qu'elle varie. C'est faible comme certitude, puisque nous savons qu'il est impossible de régler une horloge à $0^s,1$ près par jour. (Voir mon cours de *Chronométrie*.)

2° — Reprenons donc notre hypothèse et attaquons la difficulté de front. Existe-t-il *a priori* des raisons pour admettre que la Terre tourne avec une vitesse angulaire constante autour d'une droite dont les traces sur la surface terrestre et la direction dans l'espace absolu sont invariables?

Il va de soi que j'écarte les discussions oiseuses sur l'espace absolu, le temps absolu et autres fichaises, que je laisse aux génies, aux ignorants et aux imbéciles. Je me place au point de vue pratique; j'admets la valeur des données de nos sens et je fais grand cas du bon sens. Mais pour ce qui suit, il est essentiel de préciser la nature du problème, d'autant que la définition *correcte* du jour sidéral n'est pas celle que nous avons donnée.

Nous admettons que *la Terre est un corps de révolution; plus précisément qu'elle admet un ellipsoïde d'inertie de révolution.* Il résulte des lois générales de la Mécanique et de la loi de la gravitation que l'action du Soleil et des planètes sur la Terre ne modifie pas sa vitesse

de rotation *autour de son axe géométrique de révolution. A fortiori* pour les étoiles dont l'action est négligeable en tout état de cause.

Toutefois il serait imprudent de conclure immédiatement que *la vitesse de rotation autour de l'axe géométrique de révolution est invariable.* Nous connaissons au moins un phénomène, les marées, qui par le frottement qu'il cause, diminue cette vitesse.

Toute contraction de la Terre due au refroidissement l'augmenterait.

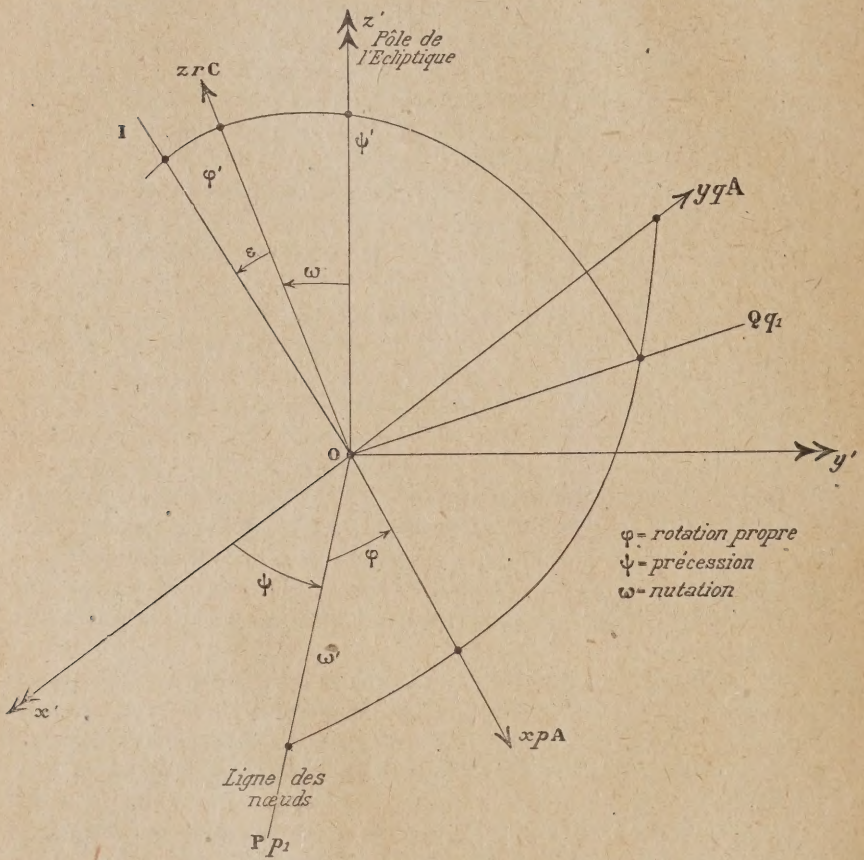


Fig. 1.

Mais nous avons lieu de croire que ces variations sont négligeables.

Nous admettrons que la vitesse de rotation de la Terre AUTOUR DE SON AXE GÉOMÉTRIQUE DE RÉVOLUTION (plus exactement autour de l'axe de son ellipsoïde d'inertie) *est invariable.*

Il s'en faut que nous soyons hors de peine.

3° — Pour aller plus loin, je rappelle que les vitesses de rotations se composent comme des vecteurs. A chaque instant un corps peut être simultanément animé de vitesses de rotation autour de divers axes; la

rotation *instantanée*, celle qui détermine à l'instant considéré le déplacement infiniment petit réel du corps (dont je suppose un point fixe), est la résultante géométrique de ces diverses rotations élémentaires.

Prenons pour axe Oz l'axe géométrique de révolution.

Dans le plan normal passant par le centre, traçons deux droites de référence Ox, Oy, liées au corps.

Appelons r, p, q, les vitesses de rotation instantanées autour de ces axes.

Il est entendu que nous posons : $r =$ Constante.

Mais *a priori* rien n'empêche que p et q prennent des valeurs quelconques. L'axe instantané de rotation n'est plus l'axe géométrique de révolution; par rapport au solide qui tourne, il est déterminé par la valeur actuelle de p et de q; il est dirigé suivant la résultante de p, q, r. *Il n'y a donc aucune raison a priori pour qu'il soit fixe par rapport à la Terre et fixe dans l'espace absolu.*

Pour assurer les idées, anticipons sur les résultats ultérieurs (§§ 24 et 25).

Traçons trois axes *fixes* Oz', Ox', Oy'.

Dirigeons Oz' vers un point que nous aurons à définir, *le pôle de l'écliptique*. Le plan $x'Oy'$ est le *plan de l'écliptique*.

L'intersection des plans xOy, $x'O'y'$, est la *ligne des nœuds*.

La variation de l'angle ψ mesure la *précession*; celle de l'angle ω mesure la *nutation*.

L'expérience montre que l'angle ψ décroît régulièrement ($d\psi : dt = \psi' < 0$), de manière à varier de 2π en 26 000 ans. L'angle ω subit une petite variation périodique autour de sa valeur moyenne. Corrélativement l'axe instantané de rotation tourne autour de l'axe de révolution géométrique en faisant avec lui un angle très petit de l'ordre du centième de seconde (§ 78); la période de rotation est d'un jour sidéral.

4° — Il est de toute évidence que si p et q ont des valeurs non nulles, la définition du jour sidéral ci-dessus donnée ne signifie rien.

Faisons l'expérience avec une étoile très rapprochée du pôle de rotation actuel (trace sur la sphère céleste de l'axe instantané de rotation de la Terre). La rotation de l'étoile pour un intervalle de temps fini n'est pas uniforme, en raison même du déplacement du pôle sur la sphère céleste.

Poussons les choses à l'extrême : supposons qu'entre les deux observations le pôle ait passé sur l'étoile : l'erreur sera d'un demi-tour.

A la vérité il serait fou de choisir les étoiles *circumpolaires* pour définir expérimentalement le jour sidéral, en raison de la petitesse de leurs déplacements; la précision de l'expérience serait nulle. Mais quand on pose une définition, faut-il au moins qu'elle ne soit pas absurde, ce qui est le cas de la définition du jour sidéral qu'on trouve dans tous les ouvrages classiques élémentaires.

Il est donc entendu que nous la considérons comme provisoire. Vu la

petitesse des rotations p et q, elle est aussi précise qu'il est nécessaire, à la condition que nous l'appliquions à des étoiles angulairement éloignées des pôles, à des étoiles dites *équatoriales*.

5° — Voilà donc définie notre unité fondamentale de durée, *celle avec laquelle sont toujours réglées les horloges* (ce qui ne veut pas dire qu'elles indiquent nécessairement le temps sidéral).

Nous verrons plus loin pour quelles raisons pratiques on a substitué au jour sidéral le *jour de temps moyen*. On saura que le rapport du jour de temps moyen au jour sidéral est de 1,002·737.9.

Tandis que *par définition* le jour de temps moyen contient : $24 \times 60 \times 60 = 86{\cdot}400$ secondes de temps moyen, le jour sidéral n'en contient que 86·164; la différence est de 236 secondes de temps moyen, soit à peu près 4 minutes.

Par définition, le jour sidéral contient 86 400 secondes *sidérales*.

Pour régler une horloge sur le temps moyen, on s'arrange donc de manière qu'elle fasse 86·164 battements dans un jour sidéral défini expérimentalement comme plus haut.

La différence exacte des deux jours est de $3^m\,55^s,909 = 235^s,909$.

Mais comme le dixième de seconde par jour est la limite de la précision de réglage d'une horloge, en pratique nous pouvons prendre 236 secondes.

3. Expérience de la lunette scellée au mur. Réglage d'une horloge en temps sidéral.

1° — Insistons sur l'expérience dont nous parlons au paragraphe précédent. Quand on l'effectue avec le plus grand soin, elle donne le résultat contraire de celui que nous annonçons. Voici ce que je lis dans la *Relation* du voyage de Bouguer au Pérou : « ... peu après mon retour à Quito, on exécuta une chose qu'il y avait déjà longtemps qu'on s'était proposée.... On scella une lunette contre un mur pour savoir ce qu'il fallait penser des variations que plusieurs observateurs prétendaient avoir remarquées dans la situation des étoiles fixes.... On crut voir à l'égard de quelques étoiles des changements considérables. Je ne doutai pas un seul instant de la cause de ces prétendues irrégularités. Les murs des maisons de Quito sont de ces briques seulement séchées qui, recevant les impressions de l'air avec trop de facilité, peuvent être sujettes à un jeu produisant des effets bien étranges pour l'astronome étonné, lorsqu'une lunette de 12 pieds transporte leur mouvement dans le Ciel. »

On voit que l'expérience est difficile à exécuter. Non seulement les murs de pisé, mais les murs de belles pierres de taille sont sujets à des déplacements angulaires, petits mais appr[illegible]ables dans les lunettes, déplacements exagérés dans les pays en tremblement continuel comme celui où Bouguer expérimentait.

2° — Même en tenant compte de la mobilité du support, l'expérience

ne doit pas réussir pour plusieurs raisons, indépendamment des difficultés inhérentes à la définition (sur laquelle nous revenons au § 25).

La première cause d'erreur est due à la *réfraction de la lumière* quand elle traverse notre atmosphère. Nous ne voyons pas les étoiles dans la direction que les rayons lumineux émanés d'elles possèdent avant d'atteindre la partie de l'espace environnant la Terre où la pression des gaz devient sensible. La correction dépend de la pression et de la température de l'air au voisinage de la lunette : elle varie donc d'un jour à l'autre.

La seconde est due à la non-propagation instantanée de la lumière. Il en résulte une déviation (*aberration*) qui dépend de la direction du mouvement de translation de la Terre autour du Soleil, par rapport à la ligne de visée. De ce chef la variation de position des étoiles est donc périodique et annuelle.

Ce n'est donc qu'après avoir tenu compte de ces deux causes de variation, que nous pourrons décider si les étoiles ont des *mouvements propres*, c'est-à-dire des mouvements les unes par rapport aux autres.

Pour ce qui est de la détermination *pratique* du jour sidéral, seule intervient la réfraction qui varie d'un jour à l'autre et d'une manière liée à la température et à la pression barométrique. A la condition d'utiliser des étoiles équatoriales, toutes les autres causes d'erreur sont à longues périodes et au-dessous de la précision des horloges. Bref s'il était nécessaire de ne pas sauter par-dessus les difficultés que présente la définition d'une quantité aussi fondamentale que le jour sidéral (*notre seul étalon de durée*), la définition usuelle est pratiquement suffisante.

4. Acquisition des notions fondamentales sur la forme de la Terre.

1° — On prétend qu'un candidat à l'Ecole Polytechnique interrogé par un professeur dont il voulait se payer la tête, soutint ne jamais avoir vu la Lune ; le fait, extraordinaire assurément, ne semble pas impossible. Pour aller de la place de Montrouge à la rue du Chemin-Vert, il est inutile de se régler sur les astres ; il est plus commode d'interroger les sergents de ville. Je prie donc mon lecteur de se transporter à Mossoul ou simplement à Touggourt. Il apprendra deux choses qui en valent la peine : la première, que la vue du ciel est un beau spectacle ; la seconde, que ce beau spectacle est fort utile à contempler dans un pays où les routes n'existent pas, où le berger doit s'éloigner des pistes rares s'il veut que ses troupeaux paissent.

2° — Dès les temps préhistoriques, les hommes se guidèrent sur les étoiles. Ils constatèrent probablement très vite que les figures qu'elles forment sont immuables, que certaines étoiles occupent dans le ciel des places quasiment invariables, enfin que les autres se meuvent suivant des trajectoires symétriques par rapport au plan qui passe par la verti-

cale et par les étoiles immobiles. Dans leurs voyages, ils avaient comme repère de direction le *plan méridien* ainsi défini.

Ces notions si simples, vite acquises, ne se précisèrent qu'à la longue.

Peu à peu ils reconnurent que les étoiles décrivent dans le ciel des cercles autour d'un certain point fixe (pôle) et que le plan de symétrie des trajectoires passe justement par ce point. Ils apprirent à mesurer les angles; ils déterminèrent les hauteurs des étoiles au-dessus de l'horizon, et comme cas particulier la hauteur du pôle.

Ils remarquèrent que la hauteur angulaire λ du pôle au-dessus de l'horizon n'est pas la même en tous les lieux : elle diminue quand on va vers le sud ; elle augmente vers le nord : d'où la notion de *latitude terrestre* (§ 16).

Ils arrivèrent ainsi à l'idée que la Terre est une sphère suspendue dans l'espace. Ils trouvèrent une preuve de cette sphéricité dans la forme circulaire de l'ombre portée par la Terre sur la Lune lors des éclipses de Lune; ce qui est l'exacte théorie de ce phénomène. Du reste l'analogie avec le Soleil et la Lune, astres qu'ils étaient bien forcés de concevoir comme isolés dans l'espace, et l'impossibilité d'imaginer un corps indéfini, les confirmaient dans cette hypothèse.

Ils savaient que le sommet des tours et des hautes montagnes s'aperçoit de loin pendant que leur pied reste caché sous l'horizon. Ceux qui étaient sur les montagnes, voyaient le Soleil se lever plus tôt et se coucher plus tard que ceux qui étaient dans la plaine. Ces remarques s'accordaient fort bien avec le fait que les personnes qui voyageaient du nord au midi, voyaient les étoiles australes s'élever sur l'horizon à mesure que les étoiles septentrionales s'abaissaient.

Ils se représentaient donc la Terre immobile au centre du monde; un de ses diamètres servait d'*axe* ou d'*essieu* à l'ensemble des corps qui constituent le *Ciel des fixes* (étoiles).

Cette théorie, généralement admise au temps d'Aristote (330 avant J.-C.), expliquait les phénomènes usuels. Le lever et le coucher des astres devenaient simplement leur passage au-dessus et au-dessous de l'horizon; quand ils disparaissaient sous l'horizon, les astres cessaient non d'exister mais d'être vus. La continuité des phénomèmes pendant l'aurore et le crépuscule avait démontré bien vite que si les étoiles n'apparaissent pas en plein midi, c'est que leur lumière est noyée dans celle du Soleil.

3° — Il y avait assurément une difficulté d'admettre que la Terre, avec tout son poids, se soutient dans l'espace. Mais contre cette difficulté on pouvait rassembler d'excellentes raisons, comme celle-ci, à savoir que ne sachant de quel côté tomber, la Terre, incapable de se décider, ne tombait pas.

« M'assurez-vous qu'il n'y ait rien à craindre, disait une marquise à Fontenelle.

— Eh bien! répondit Fontenelle faisons porter la Terre par quatre éléphants, comme font les Indiens.

— Voici bien un autre système! Du moins, j'aime ces gens-là d'avoir pourvu à leur sûreté, et fait de bons fondements. Au lieu que, nous autres coperniciens, nous sommes assez inconsidérés pour vouloir bien nager à l'aventure dans cette matière céleste. Je gage que si les Indiens savaient que la Terre fût le moins du monde en péril de se mouvoir, ils doubleraient les éléphants.

— Cela le mériterait bien, reprit Fontenelle. Il ne faut point épargner les éléphants pour dormir en assurance; et si vous en avez besoin pour cette nuit, nous en mettrons dans notre système autant qu'il nous plaira; ensuite nous les retrancherons peu à peu, à mesure que vous vous rassurerez. »

5. Raisons en faveur de la rotation de la Terre.

1° — Non sans peine on est parvenu à la notion de la fixité des cieux par conséquent de la rotation de la Terre : au Polonais Copernic (mort en 1543) revient l'honneur d'avoir mis hors de doute une hypothèse qui avait été proposée bien avant lui.

Les raisons en sa faveur sont nombreuses.

Certes les apparences resteraient les mêmes si la Terre était immobile et si le monde tournait autour d'elle. Mais il faudrait admettre pour les astres des vitesses de rotation extraordinairement grandes, invraisemblables déjà pour la Lune, le Soleil et les planètes, évidemment inacceptables pour les étoiles. En effet leurs distances à la Terre sont telles que l'angle sous lequel, de la plus rapprochée d'entre elles on voit, non pas le rayon terrestre, mais le grand axe de l'ellipse que la Terre décrit annuellement, est à la limite des angles mesurables.

On a trouvé que la distance de l'étoile *la plus proche* est 275 000 fois la distance de la Terre au Soleil, distance qui est d'environ 149 millions de kilomètres. Qu'on imagine la vitesse qu'il faudrait à cette étoile pour parcourir en vingt-quatre heures une circonférence d'un tel rayon! Entre les deux hypothèses : de faire tourner le monde autour de la Terre, ou de faire tourner la Terre autour de son axe de figure, il semble que personne n'aurait jamais dû hésiter. Il est vrai qu'avant Copernic on ne connaissait ni les dimensions exactes du système planétaire, ni *a fortiori* la limite inférieure de la distance des étoiles.

2° — La grande objection à l'hypothèse de la rotation de la Terre, était qu'un corps lancé avec une grande vitesse, suivant la verticale de bas en haut, devrait retomber non pas au même endroit, mais un peu plus à l'ouest. Cet argument a perdu sa valeur quand on acquit des idées plus précises sur l'inertie. Un corps qui quitte la Terre, a par rapport à celle-ci un certain mouvement relatif dont nous avons conscience; mais il conserve de plus le mouvement absolu qu'il avait en commun avec la Terre au moment où le contact a cessé. Quand nous jetons une bouteille par la portière d'un train, l'expérience montre que la bouteille n'accompagne pas le train : c'est vrai; mais cela tient à ce

que l'air dans lequel le train se meut, est en repos relatif et arrête la bouteille. Si le train se mouvait dans le vide, la bouteille accompagnerait le train, autant du moins que celui-ci se déplacerait en ligne droite et d'un mouvement uniforme. Quand nous jetons un corps en l'air, l'air *qui participe au mouvement de la Terre*, n'empêche pas le corps de suivre ce mouvement.

Tant s'en faut cependant que l'argument soit dénué de sens. Bien au contraire, les *vents alisés* fournissent un argument *en faveur* de la rotation de la Terre.

Imaginons que, pour une raison quelconque, un courant d'air s'établisse à la surface de la Terre, partant des pôles et allant vers l'équateur. Il part des pôles avec une vitesse nulle; peu à peu les frottements lui communiquent la vitesse des points de la surface terrestre qu'il atteint. *Mais il est en retard sur cette surface qui va de l'ouest à l'est :* donc il souffle de l'est à l'ouest; il donne naissance aux vents connus sous le nom d'*alisés*.

3° — Autre argument : la force centrifuge s'exercerait pour chasser les corps loin de la Terre supposée en rotation. A cela une réponse péremptoire; la force centrifuge existe, mais sa valeur est petite.

Calculons-la.

En raison de la rotation, la vitesse des points équatoriaux terrestres est relativement grande. Admettons que l'équateur soit long 40·000 kilomètres; le déplacement par seconde *de temps moyen* est :

$$v = \frac{40{\cdot}000{\cdot}000}{86.164} = 464 \text{ mètres.}$$

Mais cette vitesse linéaire correspond à une vitesse angulaire très petite. L'accélération γ due à la vitesse ω de rotation est (en mètres par seconde) :

$$\omega = 0{,}000{\cdot}07272, \quad \gamma = \omega^2 r = \frac{v^2}{r} = \frac{\overline{464}^2 . 2\pi}{40{\cdot}000{\cdot}000} = 0{,}0338 \text{ mètres.}$$

L'accélération de la pesanteur est de 981 centimètres par seconde; la force centrifuge est donc *à l'équateur* 289 fois plus petite que la pesanteur. Le rapport $u = 1 : 289 = 0{,}00347$, entre la force centrifuge à l'équateur et la pesanteur interviendra souvent par la suite.

A la latitude λ, l'accélération centrifuge est :

$$0{,}0338 \cdot \cos\lambda \text{ mètres par seconde,}$$

c'est-à-dire encore plus petite.

4° — Les preuves de la rotation terrestre se sont multipliées, en ce sens que cette rotation est d'accord avec les théories les plus simples servant à grouper d'autres phénomènes : aplatissement du globe aux pôles, variation de la longueur du pendule battant la seconde,....

Le mouvement de rotation diurne une fois admis, l'acceptation du mouvement annuel devenait aisée : il avait fallu des siècles de dis-

cussions pour remuer la Terre; mais du moment qu'on la supposait mobile, un mouvement de plus ou de moins ne tirait plus à conséquence : elle était déchue de son rang, elle devenait un astre comme un autre. Et de fait l'explication du système solaire fut très simple quand on lui supprima tout privilège.

Ce n'est pas le lieu d'étudier le mouvement annuel; nous verrons plus loin que la Terre décrit à peu près exactement une ellipse dont le Soleil occupe l'un des foyers, ellipse voisine d'un cercle. Le rayon moyen de l'ellipse est de 149 millions de kilomètres. Le plan de la trajectoire, appelé *écliptique*, est de direction quasiment invariable par rapport aux étoiles; nous allons le retrouver plus loin.

4° — Je ne résiste pas au plaisir de citer ici une jolie page de Fontenelle dans sa *Pluralité des Mondes*. Il explique le système de Copernic à une marquise fictive qui s'étonne qu'on ait fait tant de façons avant d'admettre que la Terre tourne autour du Soleil.

« Mon Dieu, madame, je sais bien qu'on sera moins jaloux du rang qu'on tient dans l'univers que de celui qu'on croit devoir tenir dans une chambre, et que la préséance de deux planètes ne sera jamais une si grande affaire que celle de deux ambassadeurs. Cependant la même inclination qui fait qu'on veut avoir la place la plus honorable dans une cérémonie, fait qu'un philosophe, dans un système, se met au centre du monde s'il peut. Il est bien aise que tout soit fait pour lui; il suppose, peut-être sans s'en apercevoir, ce principe qui le flatte, et son cœur ne laisse pas de s'intéresser à une affaire de pure spéculation.

— Franchement, répliqua-t-elle, c'est là une calomnie que vous avez inventée contre le genre humain. On n'aurait donc jamais dû recevoir le système de Copernic, puisqu'il est si humiliant?

— Aussi Copernic lui-même se défiait-il fort du succès de son opinion. Il fut très longtemps à ne la vouloir pas publier. Enfin, il s'y résolut à la prière de gens très considérables; mais le jour qu'on lui apporta le premier exemplaire imprimé de son livre, savez-vous ce qu'il fit? Il mourut. Il ne voulut point essuyer toutes les contradictions qu'il prévoyait, et se tira habilement d'affaire. »

Puisque je suis en veine de citations, en voici une de Lalande qui est excellente à méditer. « Il y aurait un zèle bien étrange à prétendre exclure des Livres saints toutes les expressions qui sont reçues dans la société et par lesquelles on se fait entendre de tout le monde. Les astronomes disent comme les autres : le Soleil se lève, le Soleil se couche. Ils le diront éternellement sans prétendre méconnaître l'immobilité du Soleil. Dieu conversant avec les hommes le disait comme eux et Josué ne pouvait dire autrement.

« Il me semble qu'il y a de la stupidité à prétendre qu'un général d'armée, dans le moment qu'il s'agissait de manifester à ses soldats la gloire et la puissance de Dieu par une victoire, dût leur faire une leçon d'astronomie, et, quittant le langage que ses soldats pouvaient

entendre, dire à la Terre de s'arrêter. Il aurait fallu leur apprendre en détail pourquoi cette singularité d'expression, et jamais digression n'eût été plus hors de place. »

Que nos pères avaient d'esprit!

6. **Sphère céleste. Trajectoires apparentes des étoiles.**

1° — En raison des distances énormes qui nous séparent des étoiles, malgré le déplacement annuel formidable que la Terre effectue, malgré le mouvement d'ensemble auquel est soumis le système solaire tout entier, nous sommes à chaque instant le centre du monde stellaire.

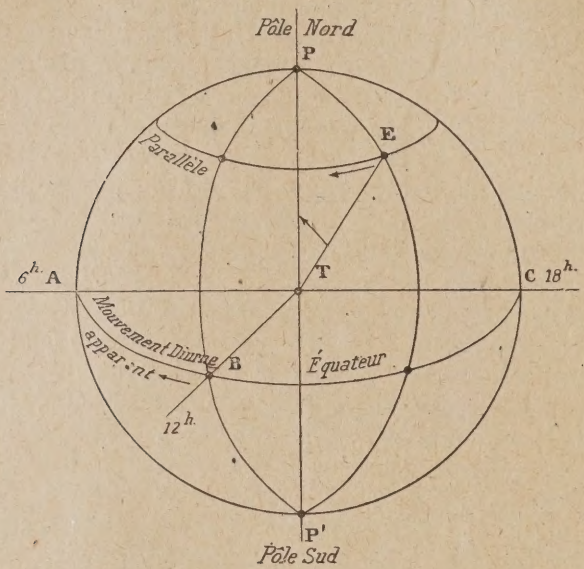


Fig. 2.

L'Axe de la Terre qui est à chaque instant une ligne bien déterminée en direction *et position*, peut être considéré comme l'*axe du monde* : il coupe la sphère céleste en des points (*pôles célestes*) qui, pour une direction donnée, ne dépendent pas de la position actuelle du centre de la Terre sur sa trajectoire annuelle.

Pour représenter les positions des étoiles, nous tracerons donc une sphère de rayon quelconque, mais très grand par rapport au rayon terrestre; nous mettrons la Terre en son centre; nous marquerons dessus, non pas l'astre, mais le point où elle est coupée par le rayon qui aboutit à l'astre. Un point de cette sphère représente donc une direction, c'est-à-dire pratiquement la seule donnée dont nous disposions pour les étoiles. Cette sphère idéale est appelée *sphère céleste*.

On comprend maintenant le sens de cette locution : *en raison du mouvement diurne, les trajectoires des étoiles sont des cercles*; elle

signifie que pour nous qui sommes au centre de la sphère fictive (peu importe en quel point de la Terre nous nous trouvons, puisque le rayon de la sphère céleste est très grand par rapport au rayon terrestre), les étoiles semblent parcourir des (*petits*) cercles de cette sphère dont les plans (dits *parallèles*) sont normaux à la ligne des pôles PP'.

On appelle *équateur* le plan normal à la ligne des pôles passant par le centre de la sphère céleste.

Le cercle décrit par chaque étoile E est défini par l'arc PE (*distance polaire de l'étoile*). Les rayons qui vont de l'œil de l'observateur à l'étoile, engendrent journellement un cône circulaire de demi-angle au sommet égal à la distance polaire.

2° — A chaque instant la Terre nous cache à peu près la moitié de la

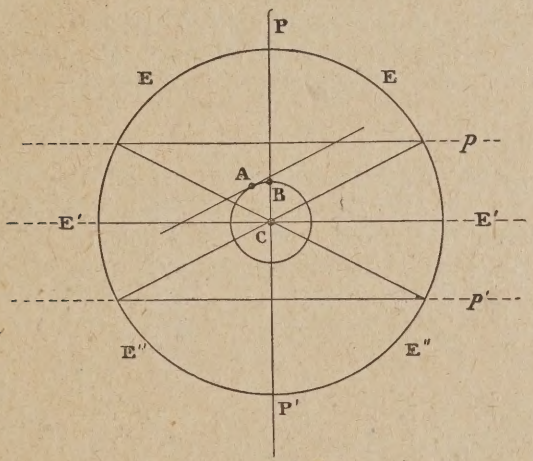


Fig. 3.

sphère céleste; nous n'en voyons que ce qui se trouve au-dessus de NOTRE *horizon*. Pour le point A de la surface terrestre, cet horizon est un plan bien déterminé en direction *et position*; mais, toujours en raison de la distance immense à laquelle nous sommes des étoiles, nous pouvons supposer qu'il passe par le centre C de la sphère céleste.

Dans ses diverses positions diurnes, tout se passe comme si *notre* horizon restait tangent à un cône T qui trace sur la sphère céleste deux parallèles p et p', symétriques par rapport à l'équateur. Les étoiles se classent alors naturellement en trois groupes : celles qui sont toujours visibles, celles qui se lèvent et se couchent, celles que nous ne voyons jamais. Les étoiles E toujours visibles sont au-dessus du parallèle p; les étoiles E' qui se lèvent et qui se couchent, sont comprises entre les parallèles p et p'; enfin celles E'' que nous ne voyons jamais, sont au-dessus de p'.

Les parallèles p et p' dépendent du point A où nous sommes.

Au pôle B, nous voyons constamment les étoiles de l'hémisphère boréal de la sphère céleste, les autres sont pour nous constamment cachées ; autrement dit, le cône T se réduit au plan de l'équateur.

Pour ceux qui habitent dans l'équateur, toutes les étoiles se lèvent et se couchent : l'horizon passe toujours par la ligne des pôles.

Nous augmentons évidemment notre champ de vision en montant sur une montagne : nous devons alors remplacer le plan horizon par le cône dont le sommet est notre œil et qui s'appuie sur l'horizon visible ; nous devons transporter ce cône au centre de la sphère céleste et prendre son enveloppe : c'est évidemment un double cône définissant deux parallèles qui ne sont plus nécessairement symétriques par rapport à l'équateur.

7. Représentation des phénomènes célestes.

A chaque instant nous aurons à représenter les directions sur la sphère céleste ; il nous faudra figurer cette sphère avec les sens de circulation.

Une difficulté doit être signalée au lecteur.

La figure 4 à gauche suppose qu'on regarde la sphère céleste *du dehors*. En réalité nous sommes au centre T de cette sphère. Si donc au lieu de figurer la sphère vue du dehors, nous représentons ce que nous voyons, les sens de rotation paraissent intervertis. C'est ce que

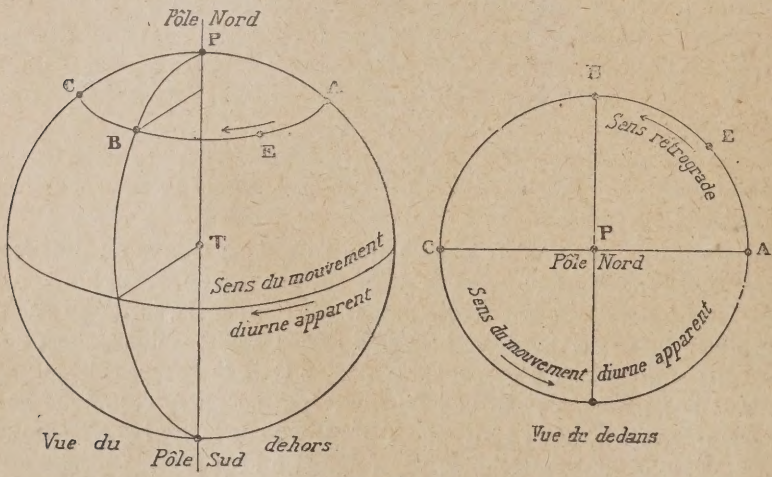


Fig. 4.

montrent immédiatement les deux parties de la figure 4. La partie droite est obtenue en coupant la figure gauche suivant le parallèle ABC, en retournant la calotte obtenue et en l'aplatissant pour l'appliquer sur un plan ; nous construisons ainsi la figure de droite qui montre le ciel tel que nous le voyons du point T centre de la sphère céleste.

Ce qui est en avant dans la figure gauche, se trouve en haut dans la figure droite.

Pour mieux se rendre compte, le lecteur placera la figure droite au-dessus de sa tête et supposera qu'on la déforme de manière à la transformer en une demi-sphère au centre de laquelle il se trouvera; il reconnaîtra que les flèches indiquant le mouvement diurne apparent (sens rétrograde) sont correctement placées. S'il se trouvait au pôle nord, le mouvement journalier serait précisément celui d'une demi-sphère sur laquelle les étoiles seraient fixées et qui tournerait d'un tour dans le sens des flèches en 24 heures sidérales.

Il est infiniment plus facile de représenter les phénomènes en se plaçant hors de la sphère céleste : c'est ce que je ferai toujours. En opérant autrement, on rend les figures illisibles : ceux qui en douteraient, compareront mes figures à celles de Lalande qui utilise la méthode inverse. Je ne parle pas des astronomies modernes où les auteurs se font un devoir de collectionner les figures stupides.

8. Visibilité des étoiles pendant le jour.

Arago nous a laissé une longue dissertation sur le sujet; elle ne brille pas par l'exactitude. Comme elle se trouve répétée partout, je crois utile d'insister.

1° — Pour qu'un objet lumineux se distingue sur un fond lumineux, on admet que son éclat doit être supérieur (ou inférieur) à l'éclat du fond d'une fraction de l'ordre du soixantième (voir mon *Cours sur la Vision*, § 105). L'expérience montre de plus qu'un mouvement d'une certaine vitesse rend perceptible des différences d'éclat qui ne le sont pas dans le repos.

Les guides du Mont-Blanc y voient les étoiles en plein jour. Cette observation prouve que la lumière diffusée par l'atmosphère est le principal obstacle à la vision des objets lumineux situés au delà.

Corrélativement le Ciel paraît plus noir au sommet d'une montagne que dans la plaine.

Du fond d'un puits (de mine, par exemple), les étoiles qui passent dans la verticale du puits sont visibles en plein jour. De même quand on regarde par le tuyau d'une cheminée. L'explication du phénomène est dans la lumière diffusée par les milieux de l'œil ou même à travers la sclérotique : le tuyau supprime les rayons inclinés; par là il diminue l'éclat général du fond.

Enfin nous devons tenir compte de l'imperfection de l'œil au point de vue optique. Indépendamment de toute diffraction, les images ne sont pas correctes. L'image d'un point est un cercle de diamètre fini; la lumière, étalée sur une surface plus ou moins grande, est moins intense.

2° — Tout ceci est incontestable. Passons à la théorie de la vision dans les lunettes. Nous supposons les images aussi parfaites *que possible*, ce qui signifie que nous tiendrons compte de la diffraction.

Arago dit qu'elle doit « atténuer la visibilité des étoiles dans les lunettes », alors qu'au contraire elle explique seule l'avantage de l'emploi d'une lunette de grande ouverture.

Arago insiste sur l'importance du grossissement : *or il est évident qu'il n'en a aucune*, à supposer l'objet punctiforme immobile. Arago dit que le grossissement de l'appareil est une cause d'obscurcissement pour les images des objets étendus, mais non pour celles des objets dont les dimensions angulaires sont inappréciables : *c'est oublier toute la théorie de la diffraction.*

L'image d'un point lumineux est pratiquement un petit cercle (plus ou moins déformé) dont, toutes choses égales d'ailleurs, le rayon est proportionnel à la distance focale de l'objectif, *tout comme les dimensions de l'image d'un objet étendu.* Par suite si l'on conserve la même ouverture en changeant la distance focale, les éclairements des images du point lumineux et de la surface étendue diminuent tous deux en raison inverse du carré de la distance focale. Les éclairements du fond et de l'image de l'étoile diminuent dans le même rapport : la visibilité n'augmente pas.

Mais la distance focale restant la même, si l'on augmente l'ouverture O de l'objectif, le rayon du cercle qui joue le rôle d'image pour le point lumineux, diminue en raison inverse de cette ouverture. D'où résulte que l'éclairement de l'image de l'objet étendu dont l'aire reste invariable, croît proportionnellement à O^2 (qui mesure la quantité de lumière reçue), tandis que l'éclairement de l'image du point croît proportionnellement à O^4 : en effet la lumière reçue croît comme O^2, et l'aire qui la reçoit, diminue comme $1 : O^2$.

En définitive la visibilité des étoiles en plein jour dans une lunette tient à la perfection de plus en plus grande de ce qui est l'image du point lumineux.

3° — Toutefois le grossissement peut intervenir en augmentant la vitesse de l'image. A l'œil nu le déplacement apparent est si faible qu'il n'augmente pas la visibilité. Dans la lunette il est multiplié par le grossissement. Mais le rôle du grossissement est toujours très secondaire.

9. Définition du méridien géographique.

On appelle *verticale* d'un lieu la direction du fil à plomb en ce lieu. Je prie le lecteur d'écarter toute autre notion ordinairement liée à la définition de la verticale. En particulier, la verticale ne passe pas par le centre de la Terre, pour l'excellente raison que la Terre n'est pas sphérique. A la supposer de révolution, rien ne dit que la verticale passe par l'axe de révolution : ceci en raison des irrégularités locales de la pesanteur qui sont parfaitement réelles et mesurables.

La verticale ascendante du lieu d'observation coupe la sphère céleste au *zénith*. Le point diamétralement opposé est le *nadir*.

Un plan passant par la verticale coupe la sphère céleste suivant un

vertical. Le vertical normal au méridien (voir plus loin) est le *premier vertical.*

On appelle *horizon* d'un lieu le plan normal au fil à plomb passant en ce lieu ; c'est aussi bien le plan des eaux tranquilles.

On appelle *méridien* d'un lieu le plan passant par la verticale du lieu et par une droite menée par ce lieu parallèlement à l'axe de rotation de la Terre. Le méridien d'un lieu est donc parallèle à cet axe ; il ne le contient généralement pas. C'est un plan parfaitement déterminé *en direction et en position.*

Mais en raison de l'immensité de la sphère céleste, il revient au même de dire qu'une étoile passe dans le méridien ou qu'elle passe dans tout autre plan parallèle dont la distance au premier est de l'ordre de la longueur de la trajectoire annuelle de la Terre.

Nous sommes en état de comprendre les moyens utilisés pour repérer les astres, soit sur la sphère céleste, soit par rapport à la verticale du lieu d'observation.

10. Méthode des hauteurs égales (ou correspondantes).

1° — Puisque le méridien passe par l'axe du monde, c'est un plan de

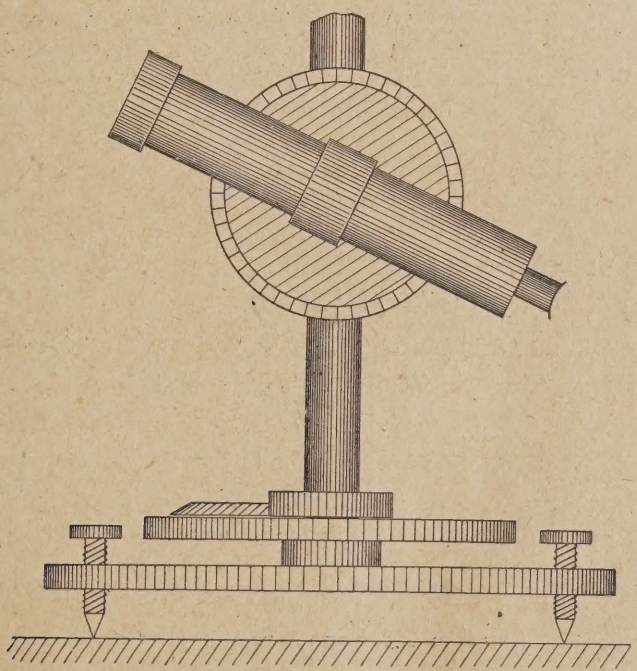


Fig. 5.

symétrie pour les trajectoires des astres qui décrivent un petit cercle de la sphère céleste. Tout plan passant par l'axe du monde jouit de cette propriété : le méridien est le seul *plan vertical* qui soit dans ce cas.

Partant de là, voici les expériences fondamentales qui fixent la position du méridien d'un lieu et qui, simultanément, prouvent que les étoiles décrivent d'un mouvement uniforme des petits cercles de la sphère céleste.

Servons-nous d'un *théodolite*, c'est-à-dire d'une lunette qui réalise les coordonnées horizontales, hauteur et azimut. Elle tourne autour de deux axes, l'un vertical, l'autre horizontal. Deux cercles divisés déterminent l'angle de l'axe optique avec l'horizon (*hauteur*) et l'angle de son vertical avec un vertical de référence (*azimut*).

Voir pour la description complète et le réglage, mon cours *Description, construction,... des appareils de mesure et d'observation.*

2° — Réglons le théodolite de manière que les axes de rotation de la lunette soient l'un vertical, l'autre horizontal. Calons la lunette par rapport au cercle vertical de manière que le fil horizontal du réticule détermine une certaine hauteur h_1. Amenons la lunette dans un vertical du côté de l'est. Attendons que l'étoile choisie pour l'observation passe sur le fil; notons l'heure t_1 à un garde-temps auquel nous ne demandons que de battre uniformément.

Recommençons pour une série de hauteurs *croissantes* h_2, h_3, ... h_n : l'astre passe sur le fil aux heures t_2, t_3, ..., t_n.

La hauteur est maxima quand l'astre passe dans le méridien.

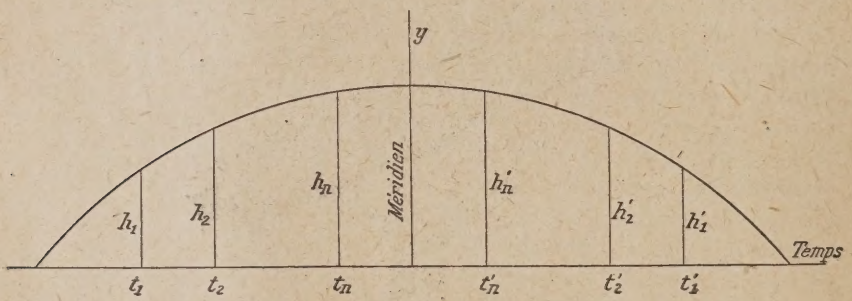


Fig. 6.

Après le passage, calons à nouveau la lunette sur les hauteurs h_n, h_{n-1},....

Déterminons les nouveaux temps t'_n, t'_{n-1}, ..., t'_1, de passage sur le fil horizontal du réticule.

L'expérience prouve qu'on a (aux erreurs d'expérience près) :

$$t_1 + t'_1 = t_2 + t'_2 = \ldots = t_n + t'_n = 2t_0.$$

Portons les temps en abscisses et les hauteurs en ordonnées; nous trouvons une courbe, telle que celle de la figure 6, symétrique par rapport à Oy.

Nous déterminons ainsi l'heure t_0 du passage au méridien.

La variation de hauteur dans un temps donné, par suite la précision avec laquelle nous déterminons l'heure du passage à une certaine hauteur, diminue à mesure qu'on s'approche du méridien.

Tout près du méridien l'expérience devient illusoire.

3° — Au lieu de déterminer les heures de passage de l'astre sur le fil horizontal, déplaçons la lunette autour de son axe vertical, de manière que, pour chaque hauteur h choisie, l'astre coupe le fil horizontal juste à sa croisée avec le fil vertical du réticule. Lisons l'azimut sur le cercle horizontal. Pour les hauteurs h_1, h_2, ..., h_n, nous déterminons ainsi deux séries d'azimuts A_1, A_2, ..., A_n, avant le passage au méridien (*hauteurs croissantes*), A'_n, A'_{n-1}, ..., A'_1, après le passage au méridien (*hauteurs décroissantes*).

L'expérience prouve qu'on a (aux erreurs d'expérience près) :

$$A_1 + A'_1 = A_2 + A'_2 = \ldots = A_n + A'_n = 2A_0.$$

Nous déterminons ainsi l'azimut A_0 du méridien.

4° — Pour déterminer le méridien et le marquer par un signal, il est plus précis d'employer la première méthode. Un certain jour on détermine le temps t_0; le lendemain on règle la lunette en azimut de manière que l'étoile passe sur le fil vertical à cette heure t_0.

Cela implique qu'on possède une horloge réglée sur le temps sidéral à laquelle on compare le garde-temps.

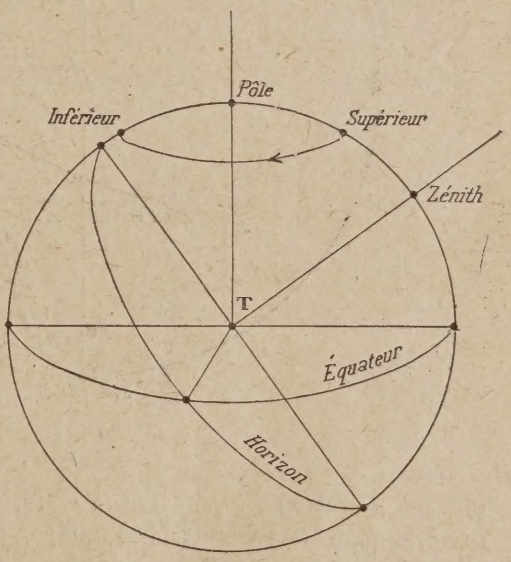


Fig. 7.

5° — PASSAGE SUPÉRIEUR, PASSAGE INFÉRIEUR AU MÉRIDIEN.

Dans ce qui précède, je suppose implicitement que l'étoile se lève et se couche.

Mais si sa distance au pôle est assez petite, elle reste toujours au-dessus de notre horizon (§ 6); pour un tour de la Terre, elle passe (comme toutes les étoiles) deux fois à notre méridien, *mais elle est visible les deux fois.* Le passage est *supérieur* pour la position S de l'étoile qui fait le plus petit angle avec notre zénith; il est *inférieur* pour la position I qu fait le plus grand angle avec notre zénith. Lors de leur passage *infé-*

rieur les étoiles qui se lèvent et se couchent, sont invisibles : elles se trouvent *sous* l'horizon.

Tout ce qui précède peut être répété du passage inférieur : la hauteur est alors minima; elle est maxima pour le passage supérieur.

Le passage supérieur s'appelle encore *culmination.*

11. Coordonnées équatoriales célestes.

1° — Appelons *plan ou cercle horaire* un plan mené par l'astre A et par l'axe de rotation de la Terre. La position du plan horaire est définie

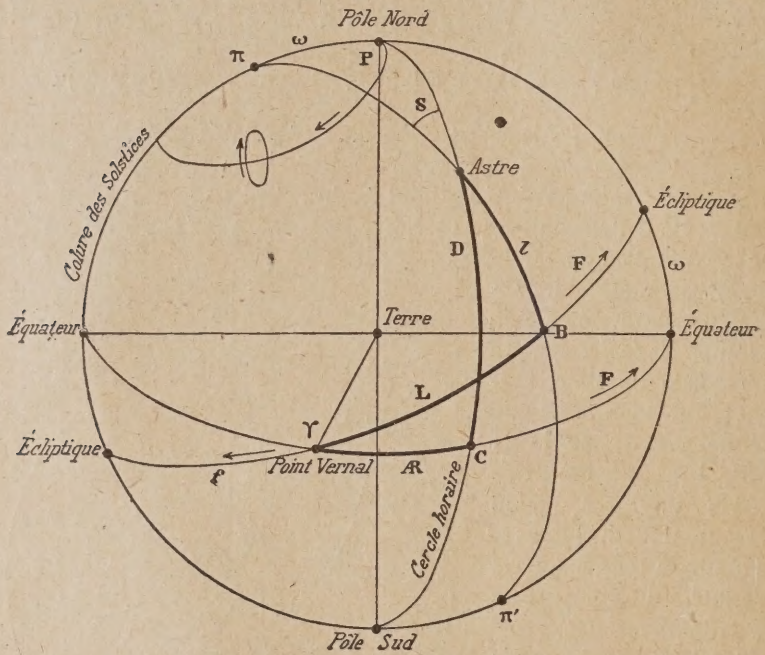


Fig. 8.

par son *ascension droite, ascensio recta*, R : c'est l'angle γC qu'il fait avec un plan de référence passant par l'axe de la Terre et par une certaine étoile (ou un certain point du ciel γ dont la position est déterminée par rapport aux étoiles). Cette origine s'appelle *point vernal* (peu importe pour l'instant comment on la détermine).

L'ascension droite est comptée de 0° à 360°, de l'ouest à l'est *dans le sens direct* (sens inverse du mouvement diurne, sens de la flèche F).

On l'exprime *en temps* à raison de 24 heures pour 360°, une heure pour 15°, une minute de temps pour 15′ d'arc, une seconde de temps pour 15″ d'arc.

Dans son cercle horaire, la position de l'astre est déterminée par la

déclinaison D (distance CA à l'équateur), ou par la *distance polaire* δ qui est complémentaire de la déclinaison :

$$D + \delta = 90^\circ.$$

Ainsi la position des astres est déterminée par rapport à un grand cercle (équateur) tracé sur la sphère céleste. On prend sur ce grand cercle un point origine γ ; par les pôles géométriques de ce grand cercle (pôles célestes), on fait passer un grand cercle perpendiculaire au premier ; sa position est déterminée par son ascension droite. La position de l'astre sur ce grand cercle est fixée par la déclinaison ou la distance polaire.

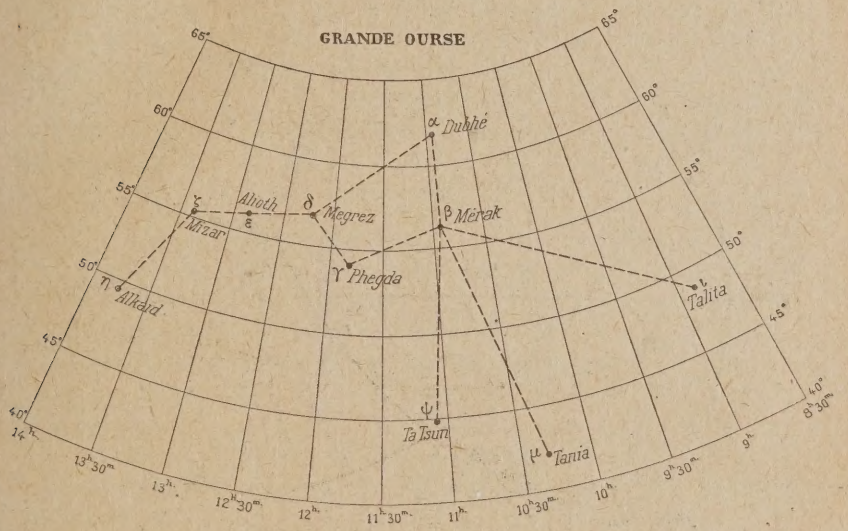


Fig. 9.

Le choix de l'équateur comme plan de repère suppose une fixité quasiment absolue de la direction de l'axe de la Terre : nous verrons que sans être nuls, ses déplacements sont très lents.

2° — La figure 9 représente la constellation de la *Grande Ourse* telle qu'on la voit du dedans de la sphère céleste. Le lecteur appliquera donc les principes posés au § 7.

Les lieux de même déclinaison boréale sont figurés par des cercles concentriques ayant le pôle pour centre ; les cercles horaires sont figurés par des droites concourantes au pôle.

Les étoiles α et β sont à peu près sur le même cercle horaire.

Une droite menée par elles passe donc près du pôle. Effectivement si on trace cette droite et si l'on prend dessus cinq fois la longueur $\alpha\beta$, on trouve la *Polaire* (α Petite Ourse) étoile très voisine du pôle nord.

C'est un des *alignements* dont je parle au § 1.

La *Grande Ourse* est aussi appelée le *Chariot* ; α et β sont ses roues

arrières. Le lecteur situera la figure 9 dans la planche I à plus petite échelle.

12. **Coordonnées équatoriales locales. Temps sidéral. Coordonnées horizontales.**

1° — Coordonnées équatoriales locales.

Elles diffèrent des précédentes par l'origine de l'angle qui remplace l'ascension droite, et par le sens dans lequel on le compte.

Le plan horaire de l'astre est rapporté au méridien : l'angle de ces

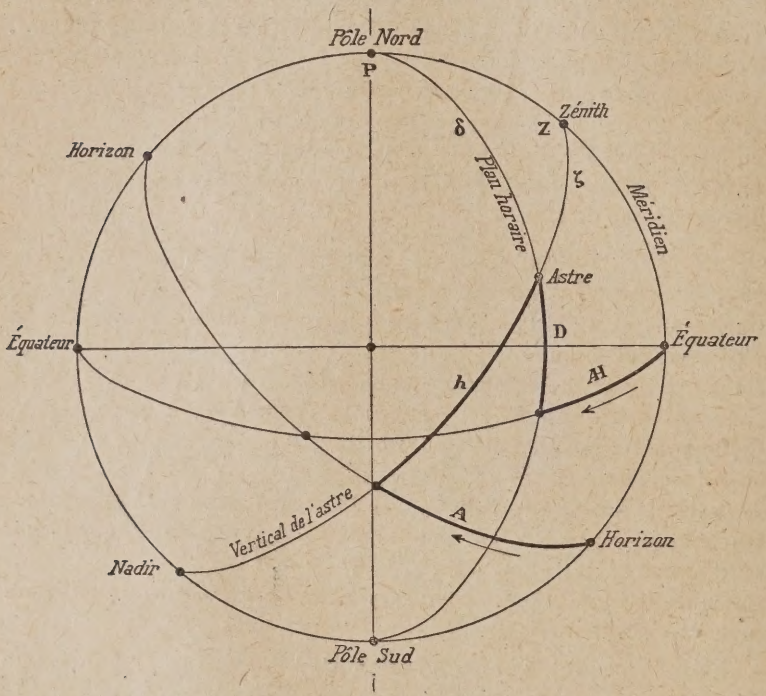


Fig. 10.

deux plans est *l'angle horaire* Æ. On le compte sur l'équateur, dans le *sens rétrograde* et de 0 à 360°, à partir du demi-méridien (limité à la ligne des pôles) qui contient le zénith du lieu d'observation.

Comme les ascensions droites, les angles horaires sont énoncés en temps à raison de 360° pour 24 heures.

Mais ici la transformation des angles en temps correspond à une réalité. En vertu même de la définition du temps sidéral, l'angle horaire évalué en temps indique depuis combien de temps *sidéral* l'astre est passé par le méridien du lieu qui sert d'origine. Dire qu'un angle horaire est une heure, signifie qu'il est passé depuis une heure *sidérale* au méridien origine.

L'avantage de ces coordonnées est qu'une étoile reste indéfiniment

dans le même cercle horaire, en raison de la définition même de l'angle horaire. Son angle horaire H varie proportionnellement au temps.

La somme de l'angle horaire d'un astre et de son ascension droite est égale à l'angle horaire du point vernal :

$$H + R = H_0.$$

Cela résulte immédiatement de la définition.

On comprend maintenant pourquoi les ascensions droites sont évaluées en temps.

Le temps sidéral étant compté à partir du passage du point vernal au méridien, on appelle *temps sidéral d'un lieu* l'angle horaire H_0.

D'où la règle fondamentale : à un instant quelconque, la somme de l'ascension droite et de l'angle horaire d'un astre est égale au temps sidéral (pour le même méridien, bien entendu).

De la relation (1) résulte qu'à chaque instant, la différence des angles horaires des deux étoiles est égale (au signe près) à la différence de leurs ascensions droites :

$$H_1 + R_1 = H_2 + R_2, \qquad H_1 - H_2 = -(R_1 - R_2)$$

2° — COORDONNÉES HORIZONTALES.

Dans les deux systèmes précédents interviennent les cercles horaires qui passent par la ligne des pôles.

Dans le suivant interviennent les plans verticaux.

L'*azimut* A est l'angle du vertical de l'astre avec le méridien.

On le compte positivement de 0 à 360°, à partir du sud vers l'ouest (*sens rétrograde*).

La *hauteur h* est l'angle de la direction de l'astre avec l'horizon.

On le compte, de 0 à 90°, positivement vers le zénith, négativement vers le nadir.

La hauteur a pour complément la *distance zénithale z* qui est comptée à partir du zénith de 0 à 180°. On a donc :

$$h + z = 90°.$$

L'instrument qui correspond aux coordonnées horizontales est le *théodolite* ou *altazimut*.

L'instrument qui correspond aux coordonnées équatoriales est la *lunette méridienne* ou plus généralement *l'équatorial*.

En raison de tout ce qu'elles ont d'incertain dans leur interprétation (voir plus loin), *les coordonnées horizontales des étoiles ne sont que des données immédiates de l'expérience servant à calculer les coordonnées équatoriales* (ou d'autres coordonnées appelées *écliptiques*).

3° — REMARQUE FONDAMENTALE.

La plupart des mouvements célestes s'effectuent dans le même sens que nous appellerons *direct*. Il n'y a jamais ambiguïté parce que les plans équatoriaux de la Terre, du Soleil,... et les plans des orbites des planètes et de leurs satellites font entre eux des angles aigus, générale-

ment petits. Le sens direct est le sens inverse des aiguilles d'une montre pour l'observateur placé les pieds sur l'écliptique ou sur l'équateur terrestre, *la tête vers le nord*.

Le mouvement diurne *apparent* s'effectue dans le sens *rétrograde*, en sens inverse du *direct*, par conséquent dans le sens des aiguilles d'une montre pour l'observateur placé comme nous l'avons dit.

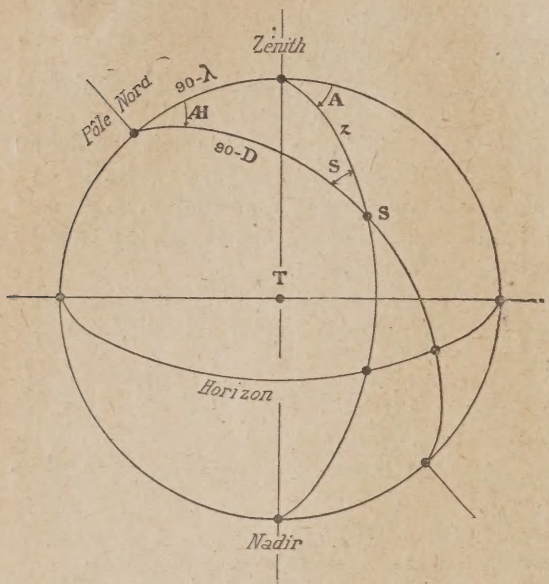


Fig. 11.

Toutes les figures sont faites dans cette hypothèse.

3° — PASSAGE DES COORDONNÉES ÉQUATORIALES LOCALES AUX COORDONNÉES HORIZONTALES ; PASSAGE INVERSE. TRIANGLE DE POSITION.

L'application des formules classiques de la trigonométrie sphérique fournit les relations suivantes entre la déclinaison D et l'angle horaire H d'une part, la hauteur h et l'azimut A de l'autre.

Nous désignerons par λ la latitude du lieu : c'est l'angle de sa verticale avec l'équateur, ou la hauteur du pôle au-dessus de l'horizon. C'est encore le complément de la distance zénithale du pôle, ou de la distance polaire du zénith.

$$\cos\delta = \sin D = \sin h \,.\, \sin\lambda - \cos h \,.\, \cos\lambda \,.\, \cos A,$$
$$\cos D \,.\, \cos H = \sin h \,.\, \cos\lambda + \cos h \,.\, \sin\lambda \,.\, \cos A,$$
$$\cos D \,.\, \sin H = \cos h \,.\, \sin A.$$
$$\cos z = \sin h = \sin D \,.\, \sin\lambda + \cos D \,.\, \cos\lambda \,.\, \cos H,$$
$$\cos h \,.\, \cos A = -\sin D \,.\, \cos\lambda + \cos D \sin\lambda \,.\, \cos H,$$
$$\cos h \,.\, \sin A = \cos D \,.\, \sin H.$$

4° — On appelle *triangle de position* le triangle formé par le pôle P, le zénith Z et l'astre S.

C'est celui même que les formules précédentes permettent de résoudre.

Portons notre attention sur l'angle S (*angle de position*) que font entre eux le cercle horaire et le vertical passant par l'astre S.

Il est donné par les formules :

$$\sin\lambda = \sin D \,.\, \cos z + \cos D \,.\, \sin z \,.\, \cos S,$$
$$\operatorname{tg}\lambda \cos D = \sin D \,.\, \cos H + \sin H \,.\, \operatorname{cotg} S$$

en fonction des paramètres λ et D, et des variables z et H.

13. Azimuts et angles horaires de lever et de coucher des étoiles. Passage au méridien.

1° — Azimuts.

Ces formules ont des conséquences et importantes.

Supposons-nous dans une plaine parfaitement libre.

Traçons un cercle représentant l'horizon, en prenant comme centre le point P où nous sommes.

Traçons deux droites rectangulaires représentant sur cet horizon la trace du méridien Nord-Sud, et la trace du premier vertical et du troisième vertical Est-Ouest.

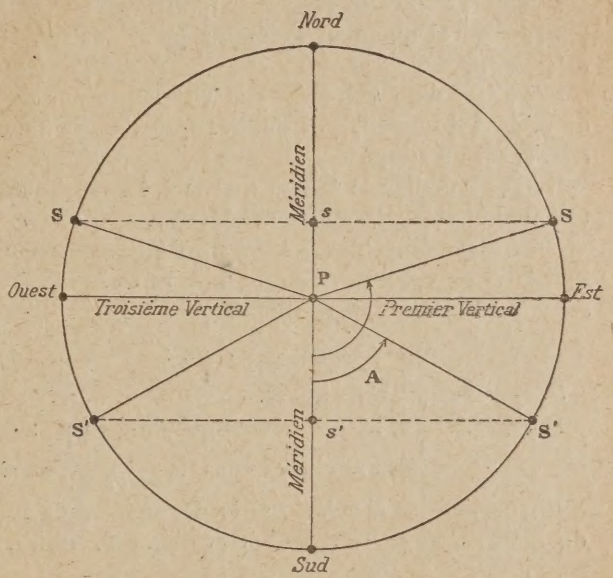


Fig. 12

Marquons les endroits L et C où nous voyons une étoile S se lever et se coucher. Nous avons :

$$h = 0, \quad z = 90°; \qquad \sin D = -\cos\lambda \,.\, \cos A.$$

L'angle A est défini par son cosinus $\overline{Ps}$ ou $\overline{Ps'}$.

Si D est positif, $\cos A < 0$, $A > 90°$;

négatif, $\cos A > 0$, $A < 90°$.

D'où suit qu'une étoile S dont la déclinaison est boréale ($D > 0$), se lève et se couche dans la partie ONE septentrionale de l'horizon; une étoile S' dont la déclinaison est australe ($D < 0$), se lève et se couche dans la partie méridionale de l'horizon.

Si l'étoile est équatoriale ($D = 0$), elle se lève dans le premier vertical et se couche dans le troisième.

2° — Angles horaires.

Les angles horaires des levers et des couchers sont donnés par la quatrième formule du § précédent :

$$\cos H = -\operatorname{tg}\lambda \,.\, \operatorname{tg} D.$$

L'angle horaire ainsi calculé s'appelle *angle semi-diurne*.

Pour les déclinaisons boréales, H est plus grand que 90°. Converti en temps, l'angle est supérieur à 6 heures.

Pour les déclinaisons australes, dans les deux systèmes d'évaluation, on a :

$$H < 90^\circ, \qquad H < 6^h.$$

Quand il s'agit des étoiles, le temps ainsi calculé est effectivement le temps sidéral que met l'étoile, à partir de son lever, pour passer au méridien.

S'il s'agit d'un astre dont la vitesse autour de l'axe du monde est différente, il ne faut pas oublier que l'angle horaire, *même évalué en temps*, est un angle.

Il faut calculer le temps que met l'astre à parcourir cet angle, en utilisant la valeur exacte de sa vitesse.

On utilise souvent des tables qui donnent, pour une déclinaison et une latitude connues, l'angle horaire ou, plus fréquemment, la *différence ascensionnelle* Δ définie par la relation :

$$H - \Delta = 90^\circ. \qquad \text{On a :} \qquad \sin\Delta = tg\lambda \cdot tgD.$$

3° — Passage au méridien.

Posons $H = 0$, la quatrième formule devient :

$$\cos z = \sin h = \cos(D - \lambda), \qquad z = \lambda - D.$$

En particulier si $D = \lambda$, si la déclinaison de l'astre égale la latitude du lieu, l'astre passe dans le méridien au zénith ($z = 0$).

13 *bis*. **Application des formules.**

Je traite les problèmes suivants comme fournissant de bonnes manipulations.

1° — *Deux étoiles dont on connaît les déclinaisons et les angles horaires, sont vues dans le même vertical. Trouver la latitude du lieu d'observation.*

Divisons membre à membre les formules 5 et 6 du § 12; nous exprimons tg A au moyen des quantités que renferme l'énoncé.

Appliquons aux deux étoiles; écrivons que les azimuts sont les mêmes.

On trouve aisément :

$$tg\lambda = \frac{\sin H' \, tgD - \sin H \, tgD'}{\sin(H' - H)}. \qquad (1)$$

Si l'une des étoiles est équatoriale ($D' = 0$) :

$$tg\lambda = \frac{\sin H'}{\sin(H' - H)} tgD = \frac{\sin H'}{\sin(R - R')} tgD.$$

Le dénominateur de la formule (1) est connu si nous donnons les étoiles. Les angles horaires sont connus si nous savons quelles étoiles passent au méridien à l'instant de l'observation.

Pour réaliser l'expérience, à défaut d'un théodolite, on utilise un fil à plomb.

Si la latitude est connue, l'expérience donne les angles horaires, par suite l'heure locale *sidérale* (*temps sidéral*, voir § 133).

2° — *On donne la latitude et la déclinaison d'un astre. Trouver l'azimut maximum.* On part de la formule 1 et du § 12. Différentiée par rapport à A et h, elle donne pour le maximum de A :

$$\sin h = \sin\lambda : \sin D.$$

Transportons dans (1) cette valeur de h, on trouve :

$$\cos A = \frac{\sqrt{\sin^2 D - \sin^2\lambda}}{\cos\lambda}.$$

L'étoile doit passer entre le zénith et le pôle ($D > \lambda$).

14. Conversion des angles en temps.

Degrés. Minutes d'angles.	Heures et minutes. Minutes et secondes.	Degrés. Minutes.	Heures et minutes. Minutes et secondes.	Degrés.	Heures et minutes.	Secondes d'angles.	Secondes de temps.
					H. M.		
1	0 4	31	2 4	70	4 40	1″	0ˢ,067
2	0 8	32	2 8	80	5 20	2	0 ,133
3	0 12	33	2 12	90	6 0	3	0 ,200
4	0 16	34	2 16	100	6 40	4	0 ,267
5	0 20	35	2 20	110	7 20	5	0 ,333
6	0 24	36	2 24	120	8 0	6	0 ,400
7	0 28	37	2 28	130	8 40	7	0 ,467
8	0 32	38	2 32	140	9 20	8	0 ,533
9	0 36	39	2 36	150	10 0	9	0 ,600
10	0 40	40	2 40	160	10 40	10	0 ,667
11	0 44	41	2 44	170	11 20	20	1 ,333
12	0 48	42	2 48	180	12 0	30	2 ,000
13	0 52	43	2 52	190	12 40	40	2 ,667
14	0 56	44	2 56	200	13 20	50	3 ,333
15	1 0	45	3 0	210	14 0	60	4 ,000
16	1 4	46	3 4	220	14 40		
17	1 8	47	3 8	230	15 20		
18	1 12	48	3 12	240	16 0		
19	1 16	49	3 16	250	16 40		
20	1 20	50	3 20	260	17 20		
21	1 24	51	3 24	270	18 0		
22	1 28	52	3 28	280	18 40		
23	1 32	53	3 32	290	19 20		
24	1 36	54	3 36	300	20 0		
25	1 40	55	3 40	310	20 40		
26	1 44	56	3 44	320	21 20		
27	1 48	57	3 48	330	22 0		
28	1 52	58	3 52	340	22 40		
29	1 56	59	3 56	350	23 20		
30	2 0	60	4 0	360	24 0		

Les quatre premières colonnes servent à transformer des degrés en heures et minutes, ou encore des minutes d'angle en minutes et secondes de temps.

15. Conversion des temps en angles.

Heures.	Degrés.	Minutes, secondes.	Degrés et minutes. Minutes et secondes.	Minutes, secondes.	Degrés et minutes. Minutes et secondes.
1h	15°	1	0 15	31	7 45
2	30	2	0 30	32	8 0
3	45	3	0 45	33	8 15
4	60	4	1 0	34	8 30
5	75	5	1 15	35	8 45
6	90	6	1 30	36	9 0
7	105	7	1 45	37	9 15
8	120	8	2 0	38	9 30
9	135	9	2 15	39	9 45
10	150	10	2 30	40	10 0
11	165	11	2 45	41	10 15
12	180	12	3 0	42	10 30
13	195	13	3 15	43	10 45
14	210	14	3 30	44	11 0
15	225	15	3 45	45	11 15
16	240	16	4 0	46	11 30
17	255	17	4 15	47	11 45
18	270	18	4 30	48	12 0
19	285	19	4 45	49	12 15
20	300	20	5 0	50	12 30
21	315	21	5 15	51	12 45
22	330	22	5 30	52	13 0
23	345	23	5 45	53	13 15
24	360	24	6 0	54	13 30
		25	6 15	55	13 45
		26	6 30	56	14 0
		27	6 45	57	14 15
		28	7 0	58	14 30
		29	7 15	59	14 45
		30	7 30	60	15 0

Les quatre dernières colonnes servent à transformer des minutes de temps en degrés et minutes d'angle, ou encore des secondes de temps en minutes et secondes d'angle.

16. Coordonnées géographiques.

1° — Les anciens sont admirables d'avoir trouvé dans le Ciel une

mesure de la Terre. Rien n'était plus difficile à l'homme, placé sur la surface de la Terre dont il ne voit simultanément qu'une partie infime, que d'en faire la description d'ensemble et d'en prendre une idée générale. Il trouvait incomparablement plus facile de décrire le Ciel dont il voit à chaque instant un hémisphère entier; il pouvait sans difficulté mesurer la distance angulaire de deux étoiles très éloignées l'une de l'autre, tandis que sa vue n'atteignait sur la Terre que les objets distants de quelques milliers de pas.

Dès que les anciens eurent reconnu, par les éclipses de Lune, la rotondité de la Terre, dès qu'ils l'imaginèrent comme une sphère concentrique à la sphère céleste (§ 1), ils la divisèrent comme le Ciel. Ils reportèrent sur la sphère céleste les lieux terrestres *en leur donnant comme image leur zénith*, point où la verticale déterminée par le fil à plomb coupe la sphère céleste. Des *zéniths* ils firent des astres fictifs dont l'étude devenait relativement aisée. Tout naturellement, mais d'une manière qui doit provoquer notre admiration, ils arrivèrent à la notion de *coordonnées géographiques*.

Et ceci se passait dans des temps très anciens.

2° — La révolution journalière des astres fournit une origine pour les coordonnées, *le pôle*, le point de la voûte céleste qui semble fixe, et un plan fixe, *l'équateur*, normal à la ligne qui joint la Terre au pôle visible.

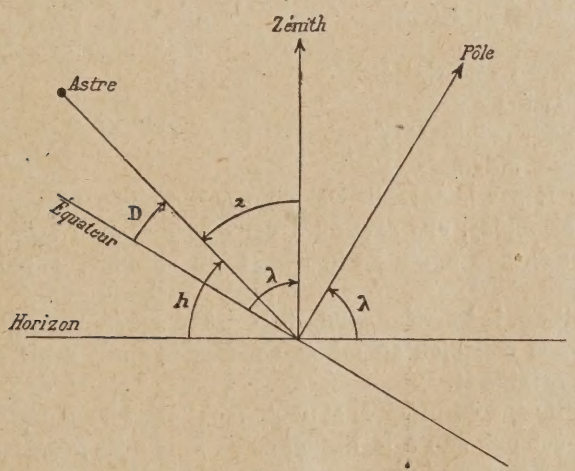


Fig. 13.

Ils reconnurent que le zénith de chaque lieu reste constamment à la même distance du pôle : d'où la notion de *latitude*.

La latitude d'un lieu est l'angle invariable que fait avec l'équateur la verticale du lieu; c'est aussi bien la hauteur du pôle au-dessus de l'horizon.

La *colatitude*, complément de la latitude, est l'angle de la verticale et de la ligne des pôles.

Les *parallèles* sont les lieux des points terrestres de même latitude, ceux dont les zéniths se trouvent sur un petit cercle de la sphère céleste ayant le *pôle astronomique* comme *pôle géométrique*.

La mesure des latitudes est relativement facile; les cartes les plus anciennes sont relativement correctes en latitude.

3° — La verticale et la ligne des pôles définissent sans ambiguïté un plan par rapport auquel les trajectoires des étoiles sont symétriques : c'est le *méridien*. Les anciens reconnurent bientôt qu'un astre passe *successivement* aux méridiens des divers lieux, d'abord aux méridiens des lieux qui sont à l'orient, ensuite à ceux des lieux qui sont à l'occident. D'où la notion de *longitude*. Les lieux de même longitude Λ sont tels qu'une même étoile passe simultanément à leurs méridiens.

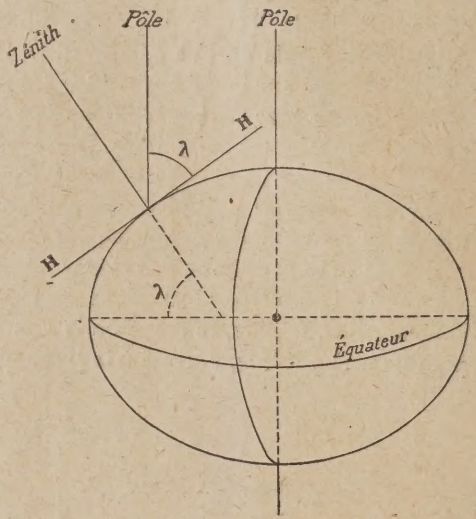


Fig. 41.

Admettons l'uniformité de la rotation des astres.

Prenons pour origine des temps l'heure du passage d'une étoile E par le méridien M d'un certain lieu (Paris ou Greenwich, par exemple); elle reviendra dans ce méridien après un jour, soit par convention après 24 heures, 1 440 minutes, 86 400 secondes *sidérales*.

Par définition, la longitude d'un lieu est Λ degrés, quand l'étoile E passe dans son méridien 4Λ minutes sidérales après avoir passé dans le méridien origine M.

Ces définitions sont précises et ne donnent prise à aucune critique. Si d'abord on est parvenu à la notion de coordonnées géographiques en supposant la Terre sphérique, cette hypothèse a disparu des définitions. Peu importe la forme de la Terre : les définitions mêmes des coordonnées nous donnent le moyen de les mesurer.

Les interpréter sera le rôle de la Géodésie : ce que nous montrerons dans le second volume de ce Cours.

4° — Coordonnées géographiques des astres.

Dans l'étude de certaines questions, on trouve avantageux de projeter les astres sur la surface d'une Terre idéale sphérique. Ils sont

alors définis *à chaque instant* par leur *latitude géographique* (qui n'est autre que leur *déclinaison*) et leur *longitude géographique occidentale* par rapport à un méridien arbitrairement choisi (c'est leur *angle horaire* par rapport à ce méridien).

Si la déclinaison de l'astre est invariable, il décrit journellement un parallèle de la Terre; sa projection coïncide successivement avec tous les points de ce parallèle.

Pour projeter à chaque instant le Ciel sur la Terre, il faut savoir à cet instant où se projette le point vernal (ou toute autre étoile de coordonnées connues). C'est ce que permet la connaissance de la quantité donnée par les tables sous le nom de *temps sidéral à midi moyen* (§ 133).

Nous développons ces considérations dans notre *Cours de Géographie mathématique* à propos des *droites de hauteur*.

CHAPITRE II

COORDONNÉES ÉCLIPTIQUES

17. Nécessité d'introduire les coordonnées écliptiques.

1° — Le système des coordonnées équatoriales, *ascension droite* $\mathcal{R}$ et *déclinaison* D, serait parfait si l'équateur était fixe; autrement dit, si l'axe de la Terre coupait la sphère céleste en des points invariables.

Mais il n'en est pas absolument ainsi.

A la vérité, quand nous aurons dit que son déplacement angulaire est de moins d'une minute par an, le lecteur se récriera sur la nécessité d'en tenir compte. Mais, outre qu'à la précision actuelle des expériences, 1′ est au moins 60 fois ce qu'on peut espérer d'une observation bien conduite, l'Astronomie n'est pas une science comme les autres. *Elle se perfectionne au cours des siècles par le seul fait que les variations s'accumulent.* Une minute, ce n'est rien ; mais poursuivons les observations pendant 2 000 ans; cela fait 2 000′, plus de 30°.

Cherchons donc s'il n'existerait pas un plan plus invariable que l'équateur, plan auquel il serait commode de rapporter les positions des astres.

2° — Il s'agit de bien comprendre le sens de cette phrase. Des plans pratiquement fixes, ce n'est pas ce qui manque. Nous n'avons qu'à prendre deux étoiles de comparaison parmi les plus fixes (voir chap. v); avec la Terre elles déterminent un grand cercle beaucoup plus invariable que l'équateur, et même que le plan auquel notre choix va s'arrêter, *l'écliptique*. Mais si nous voulons que les formules restent simples et commodes pour calculer tout ce dont nous avons besoin, l'arbitraire disparaît.

Bref nous prendons pour nouveau plan de comparaison, non pas absolument fixe, mais cent fois plus fixe que l'équateur, le plan que semble décrire le centre du Soleil vu du centre de la Terre : on l'appelle *écliptique*, parce que c'est dans ce plan que doit être la Lune pour s'éclipser. Ce phénomène est assez frappant pour avoir donné son nom au plan dans lequel il se produit.

18. Coordonnées écliptiques géocentriques.

1° — La position d'une étoile par rapport à l'écliptique est définie par sa *longitude céleste* L, et par sa *latitude céleste l*. Ces noms rappellent les longitude et latitude géographiques; mais la confusion est impossible, même quand on supprime le qualificatif *céleste*.

Puisque les coordonnées équatoriales sont immédiatement déterminées par la lunette méridienne (voir le chap. III), il était avantageux de prendre la même origine pour les longitudes et les ascensions droites; d'où le choix de l'intersection de l'écliptique et de l'équateur comme direction origine. Nous verrons que le Soleil y passe aux équinoxes : pour préciser, on prend comme direction origine la demi-droite qui va de la Terre au Soleil lors de l'équinoxe du printemps; c'est le *point vernal*, dont le signe γ est la corruption du signe Υ représentant le Bélier, constellation dans laquelle se trouvait *anciennement* le Soleil au printemps.

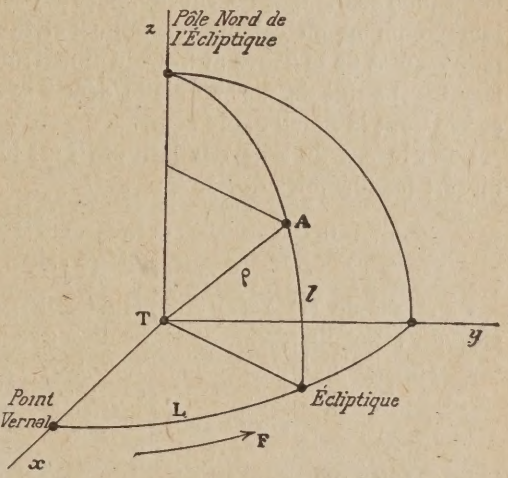


Fig. 15.

Les longitudes sont prises positivement dans le sens direct (sens de la flèche F) qui est celui dans lequel le Soleil semble tourner dans le champ des étoiles. On n'oubliera pas que, pour la figure 15, l'observateur est supposé hors de la sphère céleste.

Les latitudes sont comptées de 0 à 90°, dans le sens boréal ou dans le sens austral, à partir de l'écliptique.

Nous désignerons par ω l'inclinaison de l'équateur sur l'écliptique.

2° — FORMULES DE TRANSFORMATION.

Relions les coordonnées équatoriales $\mathcal{A}$ et D, aux coordonnées écliptiques L et l (fig. 9).

Les formules sont identiques à celles du § 12.

$$\begin{aligned} \sin D &= \sin l \,.\, \cos\omega + \cos l \,.\, \sin\omega \,.\, \sin L, \\ \cos D \,.\, \sin \mathcal{A} &= -\sin l \,.\, \sin\omega + \cos l \,.\, \cos\omega \,.\, \sin L, \\ \cos D \,.\, \cos \mathcal{A} &= \cos l \,.\, \cos L. \end{aligned} \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} \sin l &= \sin D \,.\, \cos\omega - \cos D \,.\, \sin\omega \,.\, \sin \mathcal{A}, \\ \cos l \,.\, \sin L &= \sin D \,.\, \sin\omega + \cos D \,.\, \cos\omega \,.\, \sin \mathcal{A} \\ \cos l \,.\, \cos L &= \cos D \,.\, \cos \mathcal{A}. \end{aligned} \qquad (2)$$

Les latitude et longitude dont il est ici parlé, sont dites *géocentriques*, parce qu'on les suppose déterminées de la Terre comme centre.

Elles sont dites *héliocentriques* quand on prend le Soleil pour origine. Les secondes sont supérieures aux premières parce que le Soleil est plus fixe que la Terre, et parce que les déplacements des planètes ne s'expriment simplement que rapportés au Soleil. A la vérité on détermine seulement les coordonnées géocentriques. Nous verrons plus loin comment on calcule les héliocentriques en supposant connu le mouvement de la Terre autour du Soleil; pour une approximation suffisante, il suffit de poser qu'elle décrit avec une vitesse constante un cercle dont le Soleil est le centre.

Dans le cas du Soleil, la latitude l est identiquement nulle par définition; les formules deviennent :

$$\operatorname{tg} Æ = \cos\omega \,.\, \operatorname{tg} L, \qquad \sin D = \sin\omega \,.\, \sin L.$$
$$\operatorname{tg} D = \operatorname{tg}\omega \,.\, \sin Æ.$$

On passe de (1) à (2) en remplaçant L et l, par Æ et D, ou inversement, et en changeant le signe de ω : ce qui est évident *a priori*.

On appelle *angle de position* d'un astre A l'angle S = PAΠ. On a (fig. 16):

$$\sin S = \sin\omega \frac{\cos Æ}{\cos l} = \sin\omega \frac{\cos L}{\cos D}.$$

3° — COLURE DES SOLSTICES.

On appelle *colure des solstices* le grand cercle qui passe par les pôles Π de l'écliptique et P de l'équateur; il joue un rôle parallèle à celui du *méridien* qui passe par les pôles de l'équateur et de l'horizon.

Les trajectoires des étoiles sont symétriques par rapport à un plan horaire quelconque; elles le sont donc par rapport au méridien qui est un plan horaire, mais à la fois un plan vertical. D'où la méthode des hauteurs égales pour la détermination du méridien (§ 10). Nous appliquerons une méthode analogue à la détermination du colure des solstices, par suite à celle du plan normal : *le colure des équinoxes* qui passe par la ligne des équinoxes

19. Coordonnées cartésiennes.

1° — COORDONNÉES CARTÉSIENNES ÉCLIPTIQUES.

Il est parfois commode de faire les calculs sur des coordonnées cartésiennes.

Pour les coordonnées écliptiques, on prend pour axe Tx la ligne des équinoxes vers le point vernal (intersection de l'équateur et de l'écliptique). L'axe Tz est la normale à l'écliptique.

L'axe Oy est dirigé du côté du solstice d'été.

Soient x, y, z, les coordonnées cartésiennes de l'astre A.

Posons $\overline{TA} = \rho$; le vecteur ρ est généralement variable. On a :

$$z = \rho \sin l, \qquad x = \rho \cos l \,.\, \cos L, \qquad y = \rho \cos l \,.\, \sin L.$$

2° — COORDONNÉES CARTÉSIENNES ÉQUATORIALES.

On prend pour axe Tx la ligne des équinoxes; l'axe Tz est la ligne des pôles; l'axe Oy est dirigé du côté du solstice d'été. On a :

$$z = \rho \sin D, \qquad x = \rho \cos D. \cos Æ, \qquad y = \rho \cos D. \sin Æ.$$

La *Connaissance des temps* donne les coordonnées cartésiennes du Soleil sous le nom de *coordonnées rectilignes*.

Pour le Soleil z et y s'annulent en passant du négatif au positif pour l'équinoxe de printemps.

z est maximum au solstice d'été, minimum au solstice d'hiver.

20. **Variations des coordonnées équatoriales quand, la latitude restant constante, L et ω varient.**

1° — Voici de très importantes formules permettant de calculer les variations des coordonnées équatoriales quand les pôles se déplacent sur la sphère céleste.

A l'aide des formules du *2°* du § 18, cherchons comment varient D et Æ quand, l restant constant, L et ω varient. Cela revient à dire que le pôle de l'équateur se déplace, *l'écliptique restant invariable.*

Différentions la première formule (1) :

$$\cos D. dD = (-\sin l. \sin\omega + \cos l. \cos\omega. \sin L)\, d\omega + (\cos l. \sin\omega. \cos L)\, dL.$$

Utilisons la deuxième et la troisième formules (1) :

$$dD = \sin Æ. d\omega + \sin\omega. \cos Æ. dL. \qquad (1)$$

Différentions la seconde formule (1); utilisons la première et la troisième formules; remplaçons dD par sa valeur. Il vient aisément :

$$dÆ = -\operatorname{tg} D. \cos Æ. d\omega + (\cos\omega + \operatorname{tg} D. \sin Æ. \sin\omega)\, dL. \qquad (2)$$

Les formules (1) et (2) donnent les variations de la déclinaison et de l'ascension droite en fonction de la variation $d\omega$ de l'inclinaison de l'équateur sur l'écliptique et de la variation dL de la longitude.

2° — Cherchons à quels déplacements du pôle P de l'équateur, $d\omega$ et dL correspondent. Le pôle de l'écliptique est en Π. L'arc $\overline{\Pi P} = \omega$, mesure l'inclinaison de l'équateur p sur l'écliptique π; l'angle a peut servir de seconde coordonée polaire pour définir la position de P par rapport à Π. La droite ON intersection des plans p et π, est sur le grand cercle ΠN d'azimut $a + 90°$.

Si le point P se déplace uniformément sur un petit cercle dont Π est le centre, il y a *précession uniforme* ; la droite ON, origine des ascensions droites et des longitudes, se déplace elle-même uniformément sur l'écliptique.

Dans les formules (1) et (2), nous devons poser :

$$d\omega = 0, \qquad dL : dt = \text{Constante}.$$

$$\frac{dD}{dt} = \sin\omega . \cos Æ . \frac{dL}{dt}, \qquad \frac{dÆ}{dt} = (\cos\omega + \operatorname{tg} D . \sin Æ . \sin\omega)\frac{dL}{dt}.$$

Pour préciser faisons :

$$dL : dt = 50'' 2, \qquad \omega = 23° 27'.$$

Les longitudes étant comptées dans le sens direct, dire qu'elles croissent, c'est dire que la droite de référence se déplace d'autant dans le sens rétrograde. Nous posons donc une rotation, dans le sens rétro-

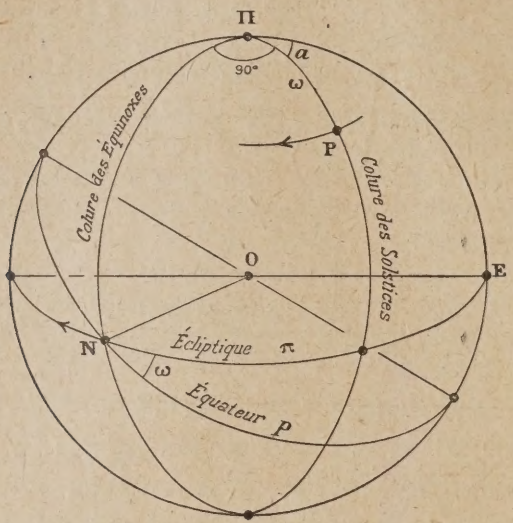


Fig. 16.

grade, de la ligne des équinoxes ON (ligne des nœuds, droite joignant la Terre au point vernal).

Dans la figure 1 c'est poser $\psi' < 0$.

L'unité de temps est l'année tropique moyenne (§ 123). On trouve :

$$\frac{dD}{dt} = 20''.\cos AR \qquad \frac{dAR}{dt} = 46'' + 20''\,\mathrm{tg}\,D\,.\,\sin AR.$$

Nous utiliserons plus loin ces formules.

Si outre le déplacement sur le petit cercle, le pôle de l'équateur P subit un rapprochement ou un éloignement du pôle de l'écliptique, l'inclinaison ω des deux plans varie : c'est l'effet de la *nutation*.

Nous allons supposer d'abord que les étoiles n'ont pas de mouvements propres (elles sont fixées à la sphère céleste); ensuite que l'écliptique est invariable par rapport aux étoiles. Chaque étoile conserve donc une latitude invariable. Nous allons supposer, d'autre part, que l'équateur n'est pas invariable par rapport aux étoiles.

Sa position est complètement définie par son inclinaison ω sur l'écliptique et par la position de la ligne des nœuds. La variation de

cette position amène une variation de longitude, la même pour toutes les étoiles.

Nous supposons connues à des intervalles suffisamment éloignés les déclinaisons et les ascensions droites des étoiles (nous verrons plus loin comment on les détermine). Comparant les résultats pour chaque étoile, les formules précédentes permettent de calculer $d\omega$ et dL entre les deux observations.

Montrons d'abord que les longitudes subissent une variation continue de vitesse moyenne constante.

21. Variation des coordonnées équatoriales moyennes.

Pour fixer les idées sur les variations des ascensions droites et déclinaisons des étoiles, voici les coordonnées de quelques étoiles fondamentales (§ 45) pour les 1er janvier des années 1901 et 1914.

Sur un espace de 13 ans, le lecteur se rendra mieux compte des variations annuelles.

NOM	POUR LE 1er JANVIER 1901		POUR LE 1er JANVIER 1914	
	Ascension droite.	Déclinaison.	Ascension droite.	Déclinaison.
α Andromède (Sirrah). . . .	0h 3m16s	28°32′38″ B	0h 3m56s	28°36′56″ B
β Cassiopée (Caph)	0 3 54	58 36 13 B	0 4 35	58 40 32 B
γ Pégase (Algenib)	0 8 8	14 37 59 B	0 8 48	14 42 20 B
β Hydre	0 20 33	77 48 43 A	0 21 15	77 44 19 A
α Phénix (Nairalzaurak). . .	0 21 24	42 50 37 A	0 22 2	42 46 23 A
α Cassiopée (Schedir)	0 34 53	55 59 40 B	0 35 37	56 3 57 B
β Baliene (Diphda)	0 38 37	18 31 48 A	0 39 16	18 27 30 A
γ Cassiopée (Tsih)	0 50 44	60 10 51 B	0 51 30	60 15 5 B
β Andromède (Mirach) . . .	1 4 11	35 5 45 B	1 4 55	35 9 53 B
δ Cassiopée (Rukbah)	1 19 20	59 43 15 B	1 20 11	59 47 20 B
α P. Ourse (Polaire).	1 22 59	88 46 45 B	1 28 47	88 50 48 B
α Eridan (Achernar)	1 34 2	57 44 23 A	1 34 31	57 40 25 A
β Bélier (Sharatan)	1 49 10	20 19 27 B	1 49 53	20 23 17 B
α Hydre mâle	1 55 39	62 3 5 A	1 56 3	61 59 17 A
α Bélier (Hamal)	2 1 35	22 59 40 B	2 2 19	23 3 23 B
α Baleine (Menkar)	2 57 6	3 42 5 B	2 57 47	3 45 11 B
β Persée (Algol)	3 1 43	40 34 28 B	3 2 34	40 37 30 B
α Persée (Mirfak).	3 17 15	49 30 32 B	3 18 11	49 33 21 B

Interprétons ces résultats en supposant d'abord $d\omega = 0$ et en prenant la vitesse dL : dt indiquée au paragraphe précédent. D'où les formules :

$$\frac{dD}{dt} = 20''.\cos Æ, \qquad \frac{dÆ}{dt} = 46'' + 20''\,\mathrm{tg}\,D\,.\sin Æ.$$

Conformément à ces formules, les déclinaisons des étoiles *boréales* dont les ascensions droites sont 6 heures et 18 heures (90° et 270°) ne

varient pas sensiblement. Celles dont les ascensions droites sont 0^h augmentent de 20″ par an; celles dont les ascensions droites sont 12^h, diminuent de la même quantité. Par exemple pour α *Andromède*, en 13 ans la déclinaison croît de $4'18'' = 258''$, soit environ 20″ par an.

C'est l'inverse pour les étoiles *australes*. Par exemple pour β Hydre, la déclinaison décroît de $4'24'' = 264''$ en 13 ans.

Passons aux ascensions droites. D'après la formule du § précédent, la variation est de 46″ d'angle par an pour les étoiles dont la déclinaison ou l'ascension droite sont nulles, soit en 13 ans, 598″; cela correspond à $578 : 15 = 40$ secondes de temps. C'est effectivement ce que nous constatons pour α *Andromède* dont l'ascension droite est nulle, et pour α *Baleine* dont la déclinaison est très petite.

Pour les étoiles dont la distance polaire est petite, la variation est beaucoup plus grande. Du reste les formules sont grossièrement approchées pour D très voisin de 90°.

Par exemple pour la Polaire, la variation d'ascension droite en 13 ans est de 348 secondes de temps, soit 5 220″, soit par an 401″.

On a $\operatorname{tg} D = \operatorname{tg} 88°46'43'' = 47$. $\sin(1^h22'59'') \times 15 = 0{,}32$.

D'où pour la variation d'ascension droite :

$$46'' + 300'' = 346''.$$

22. Déplacement du pôle de l'équateur sur la sphère céleste.

1° — Le lecteur se reportera aux figures 17, 18 et 19. Il n'oubliera pas que dans les figures 17 et 19, la sphère céleste est vue du centre, tandis que dans la figure 18 l'observateur est hors de la sphère.

Par comparaison des coordonnées équatoriales des mêmes étoiles (ascension droite et déclinaison) *pour des époques assez différentes*, nous venons de trouver qu'*en moyenne* tout se passe comme si le pôle de l'équateur (trace sur la sphère céleste de l'axe de rotation de la Terre) décrivait un petit cercle de la sphère céleste ayant pour centre le pôle de l'écliptique. Le déplacement angulaire $da : dt$ (fig. 16) est de 50″,26 par an. Mais le mouvement réel est plus compliqué.

Chaque pôle est animé d'un mouvement que nous pouvons considérer comme la résultante de deux mouvements : la *précession*, la *nutation*. Par rapport aux étoiles, tout se passant comme si le centre de la Terre était immobile, il suffit de parler du pôle nord.

En vertu de la précession, le point P décrit autour du point fixe Π (*pôle de l'écliptique*) un petit cercle de la sphère céleste dont le rayon $\overline{\Pi P}$ est de 23°27′30″. Il se déplace avec une vitesse constante dans le sens du mouvement diurne (*sens rétrograde*); il fait un tour en 25 765 ans, ce qui donne une vitesse angulaire de 50″,26 par an.

A ce mouvement correspond ce qu'on appelle la *précession des équinoxes*.

En vertu de la *nutation*, le point P décrit en 18 ans 8 mois une petite ellipse dont le grand axe, dirigé vers le point fixe Π (fig. 18) est de 18″,4, et dont le petit axe est de 13″,7. La période de ce mouvement est celle

Fig. 17.

même qui ramène les nœuds de l'orbite lunaire aux mêmes points de l'écliptique; nous verrons plus tard ce que cela signifie (§ 281).

Par leur composition ces mouvements donnent un cercle festonné dont il est facile de trouver la forme. En effet partons du point A (fig. 18). Soit T la période de 18 ans 8 mois; pendant ce temps, le pôle se déplace sur le cercle AE de 940″ environ. Pendant le quart de cette période, le mobile va d'une part en B, c'est-à-dire se déplace de 7″

sinistrorsum, tandis qu'il avance de 235″ dans le sens dextrorsum; il avance donc seulement de 228″. Et ainsi de suite.

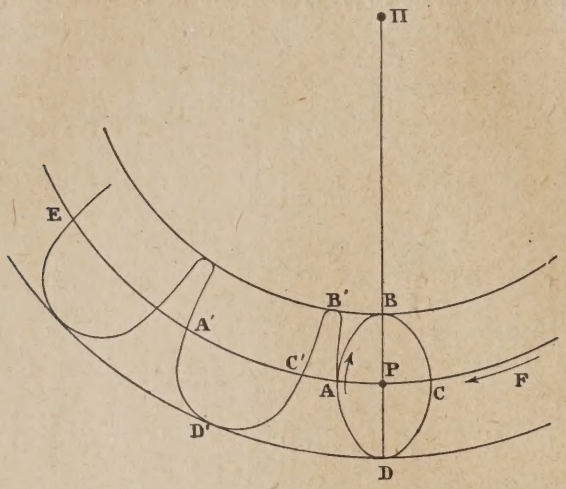


Fig. 18.

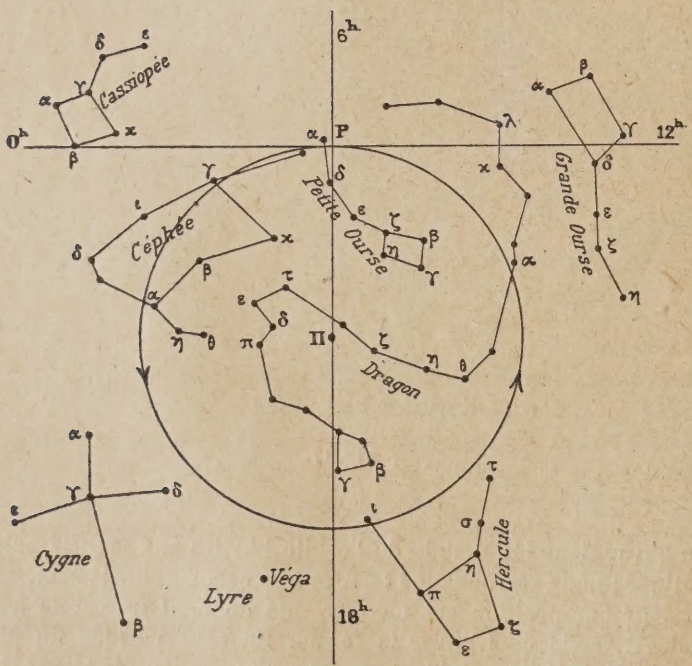


Fig. 19.

Le lecteur vérifiera que la forme de la courbe résultante est celle de

la figure 18 qui est considérablement dilatée et qui exagère les différences entre les sommets.

2° — La figure 19 montre les constellations au voisinage de la position actuelle du pôle.

L'*étoile polaire* (α de la *Petite Ourse*) ne coïncide pas avec le pôle actuel; elle en est à 1°13′.

Lors des plus anciennes observations connues, elle en était à 12°.

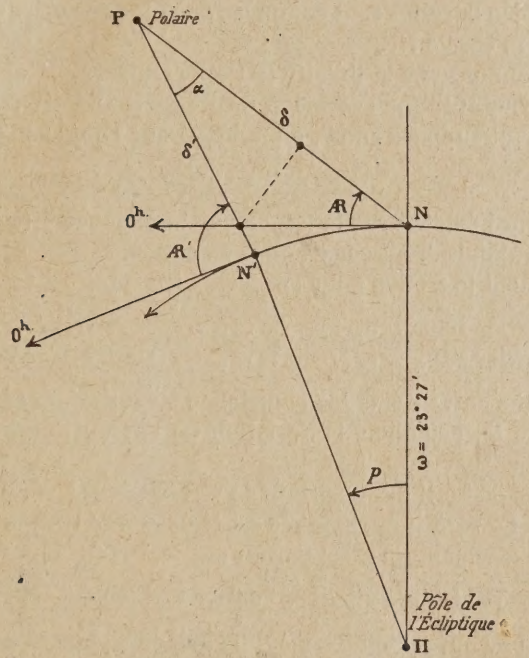


Fig. 20.

Vers l'an 2600 sa distance au pôle ne sera plus que 27′.

Puis le pôle s'en éloignera de nouveau.

Le nom de *polaire* s'applique donc dans la suite des âges à des étoiles différentes qui jouissent momentanément (ce sont des *moments* astronomiques!) de la propriété d'être quasi immobiles par rapport à nous. Le pôle est du reste repéré non seulement par une étoile, mais par un groupe d'étoiles visibles dans les lunettes.

23. Variations des coordonnées équatoriales des étoiles voisines du pôle.

1° — Il est particulièrement instructif d'évaluer, ne serait-ce que grossièrement, les énormes variations que subissent les coordonnées des étoiles voisines du pôle, en raison des déplacements de celui-ci sur

la sphère céleste. Cela ne présente du reste aucune difficulté quand on ne tient compte que de la précession.

Soit Π le pôle de l'écliptique (fig. 20). Du fait de la précession le pôle nord se déplace sur un petit cercle NN′ dont le rayon est de $\omega = 23°27'$, de manière que l'angle p soit de 50″,26 par an.

Le chemin linéaire qu'il parcourt annuellement est donc :

$$50'',26 \sin\omega = 20'',10.$$

Les ascensions droites sont comptées dans le sens marqué à partir de la tangente au cercle NN′.

2° — Raisonnons sur la Polaire (α Petite Ourse).

Au 1er janvier 1915 son ascension droite était $1^h29^m15^s$.

Le pôle étant supposé en N′, on a donc pour l'angle $\mathcal{R}'$:

$$\mathcal{R}' = 22°19' \text{ environ.}$$

Il est d'abord évident sur la figure que la distance δ (complément de la déclinaison) doit diminuer d'année en année.

Effectivement je trouve pour les déclinaisons :

1er janvier 1892	D = 88°44′	δ = 76′
1er janvier 1915	D = 88°51′	δ = 69′.

En moyenne entre ces dates la distance δ vaut 72′,5 = 4 350″.

Partant de là, calculons la variation de l'ascension droite pour ces 23 ans.

Supposons d'abord que la droite de référence (tangente au cercle) ne change pas. La variation cherchée est simplement l'angle α.

On vérifie aisément qu'il est par an :

$$(20'',10 : 4\,350) \sin\mathcal{R} = 0{,}00462 \times 0{,}380 = 0{,}00175.$$

Ce qui donne approximativement 6′, soit 138′ pour 23 ans.

Mais la droite de référence tourne de 50″,26 par an, de 1 156″ = 19′ environ pour 23 ans.

La variation totale d'ascension droite est par suite de 157′.

Transformons en temps : l'ascension droite doit varier de 10^m28^s en 23 ans.

Or je trouve dans la *Connaissance des temps* :

1er janvier 1892	$\mathcal{R} = 1^h19^m8^s$
1er janvier 1915	$\mathcal{R}' = 1^h29^m15^s$.

La différence est 10^m7^s.

Je prends les ascensions droites dans des tables de positions *apparentes*; elles ne sont donc pas corrigées de l'aberration. Mais je les prends à la même date, ce qui supprime son influence. Je ne tiens pas compte de la nutation, ce qui explique la non rigueur de mon résultat. Tout de même on voit avec quelle aisance on obtient un résultat très approché.

3° — On a des variations encore plus grandes en s'adressant à des étoiles dont l'ascension droite est voisine de 6 ou de 18 heures.

Parmi les étoiles de notre hémisphère dont les positions apparentes sont données par la Connaissance des temps, je signale λ Petite Ourse :

$$D = 89°0', \quad \delta = 60', \quad AR = 19^h \text{ environ.}$$
$$(20'',10 : 3\,600) \sin AR = 0,00539 = 18' \text{ environ} = 1^m12^s.$$

Effectivement je trouve pour les ascensions droites :

1er janvier 1915	$19^h3^m25^s$	
1er janvier 1916	$19^h2^m\ 9^s$	Différence 1^m16^s.

Je laisse au lecteur le soin de placer l'étoile sur la figure et de vérifier qu'effectivement son ascension droite doit diminuer.

24. Définition précise du jour sidéral.

Nous pouvons maintenant revenir sur la définition du jour sidéral :

« Le jour sidéral commence au moment du passage supérieur du point vernal au méridien. Sa durée est l'intervalle de temps qui sépare deux passages supérieurs consécutifs. »

Le lecteur relira le § 2 et se reportera à la figure 1.

Soit xOz le méridien du lieu considéré. Le jour sidéral est donc le temps t nécessaire pour que l'angle φ varie de 2π.

Le vecteur représentatif des vitesses.

φ'	est dirigé suivant	Oz (axe de révolution de la Terre)
ψ'	—	Oz' (axe de l'écliptique)
ω'	—	OP (ligne des nœuds).

Nous posons : $d\varphi : dt = \varphi'$.

On a donc la relation :

$$r = \varphi' + \psi' \cos\omega, \qquad \varphi' = r - \psi' \cos\omega.$$

Nous savons que ψ' est négatif ; la vitesse φ' est donc un peu plus grande que la vitesse r que possède la Terre autour de son axe géométrique de révolution. Voyons de combien.

Par définition la vitesse φ' correspond à la rotation de 1·296·000 secondes d'arc par jour sidéral. Dans une année, il y a 366,24 jours sidéraux environ. Le vitesse ψ' correspond au parcours de 50″,26 par an, soit 0″,1372 par jour sidéral.

Prenons :

$$\omega = 23°27', \text{ ou } \omega = 0,917.$$

Le terme $\psi' \cos\omega$ correspond au parcours de 0″,1258 par jour.

La vitesse r de la Terre autour de son axe géométrique de révolution est donc plus petite (ψ' est négatif) que la vitesse qui correspond à la définition du jour sidéral, de :

0,1258 : 1·296·000.

Pour que les nombres nous représentent quelque chose, évaluons cette quantité en fraction de seconde sidérale. Nous obtenons :

$$(86\,400 \times 0{,}1258) : 1{\cdot}296{\cdot}000 = 0^{s},00\,803,$$

moins d'un centième de seconde. Cette quantité est inappréciable à la précision du réglage de nos horloges, et à la précision des observations.

Ainsi le jour sidéral tel qu'on le définit, ne mesure pas la vitesse de rotation r de la Terre autour de son axe géométrique; mais il mesure une quantité qui en diffère de moins d'un centième de seconde.

On remarquera que la vitesse de nutation ω' n'intervient pas dans la définition de φ'; seul intervient $\cos\omega$. Vu la petitesse des variations de ω, le jour sidéral est *pratiquement* aussi invariable que s'il était défini avec la rotation r.

Toutes les difficultés signalées au § 2 disparaissent, puisque, par définition même, la ligne des nœuds qui sert de repère, se trouve dans le plan équatorial.

25. Axe instantané de rotation de la Terre.

1° — Ne craignons pas d'insister au début sur des quantités petites, quand les définitions fondamentales sont en jeu.

Du fait que l'axe de révolution géométrique de la Terre se déplace, l'axe instantané ne coïncide pas avec lui.

D'où résulte une variation de la latitude géographique.

En effet la latitude, telle qu'on la définit (hauteur du pôle au-dessus de l'horizon) dépend de la position *instantanée* du pôle. Si l'axe de rotation varie, la latitude varie. D'où la nécessité de déterminer la position de l'axe instantané par rapport à l'axe de révolution géométrique du sphéroïde terrestre, dans l'hypothèse de la précession et de la nutation indiquées par l'observation.

Rien de plus facile du reste.

Reprenons la figure 1. Nous trouvons aisément :

$$p = \omega' \cos\varphi + \psi' \sin\omega \,.\, \sin\varphi, \qquad q = -\omega' \sin\varphi + \psi' \sin\omega \,.\, \cos\varphi,$$

$$p^2 + q^2 = \omega'^2 + \psi'^2 \sin^2\omega, \qquad \operatorname{tg}\mu = \frac{p}{q} = \frac{\omega' + \psi' \sin\omega \,.\, \operatorname{tg}\varphi}{-\omega' \operatorname{tg}\varphi + \psi' \sin\omega}.$$

Négligeons d'abord la nutation; posons donc $\omega' = 0$.

Appelons ε l'angle que l'axe instantané fait avec l'axe Oz. On a :

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{r} = \frac{\psi' \sin\omega}{r} = 0{,}0546 : 1{\cdot}296{\cdot}000 = 4{,}21 \,.\, 10^{-8}.$$

D'où : $$\varepsilon = 0'',00869.$$

Une minute d'angle à la surface de la Terre vaut 1 852 mètres (mille marin); une seconde vaut 30,87 mètres.

L'axe instantané de rotation coupe donc la surface terrestre à 27 cm. environ de la trace de l'axe de révolution géométrique.

2° — Cherchons la loi de déplacement de l'axe instantané.

En posant $\omega' = 0$, on a simplement : $\mu = \varphi$.

Cela signifie (ce qui est d'ailleurs évident) que l'axe instantané de rotation OI est dans le plan normal à la ligne des nœuds. Il est donc quasi immobile dans l'espace absolu; par rapport à la Terre, il tourne donc sensiblement d'un tour en un jour sidéral, dans le sens rétrograde.

En définitive l'axe géométrique de révolution de la Terre peut être considéré comme l'axe d'un cône circulaire de demi-angle au sommet ε qui roule sur un cône circulaire d'axe Oz', de demi-angle au sommet ω, en faisant un tour par jour.

De là résulte que *le mot* PÔLE NORD *a deux sens absolument distincts :* trace de l'axe géométrique de révolution du sphéroïde terrestre; trace de l'axe instantané de rotation. Les observations se rapportent à la seconde définition. Fort heureusement pour la simplicité des expériences, ces deux définitions coïncident pratiquement, l'angle ε étant très au-dessous de la précision atteinte.

N'empêche qu'en conséquence des phénomènes fondamentaux de l'Astronomie, la latitude d'un lieu subit une variation périodique, de période diurne et d'amplitude ε.

Le lecteur dira que j'exige de lui beaucoup de travail dès le début. S'il veut rester dans le gâchis, il n'a qu'à s'adresser aux multiples cours d'Astronomie publiés par nos pontifes. On lui fera de la précision pseudo-mathématique. Il croira comprendre, mais il ne comprendra pas.

Je lui laisse le plaisir de discuter le rôle du terme en ω' (nutation); il ajoute un terme petit et à longue période au terme principal dont nous nous sommes occupés.

3° — Si le pôle a deux définitions, il va de soi que l'équateur en a deux. C'est le plan de symétrie du sphéroïde terrestre normal à l'axe géométrique de révolution; c'est le plan normal à l'axe instantané de rotation.

Si l'on définit la latitude géographique au moyen du premier plan, elle est invariable par définition. Mais la définition expérimentale se rapporte au second plan.

Que le lecteur n'oublie pas que les variations de l'axe instantané ci-dessus définies supposent qu'il existe seulement une précession régulière et une nutation (vitesses ψ' et ω'). Rien ne dit *a priori* qu'il n'existe pas d'autre causes de variation. C'est à l'expérience de décider si oui ou non les latitudes géographiques varient sensiblement. Nous verrons *en Géodésie* qu'il faut admettre une variation dont la période est 431 jours, et dont l'amplitude est de l'ordre de la demi-seconde d'arc. Maintenant que nos définitions sont bien posées, cette question ne sera plus pour nous un casse-tête.

26. Mouvement du Soleil. Écliptique. Zodiaque.

Déterminons jour par jour l'ascension droite et la déclinaison du

centre du disque solaire ; rapportons les positions du Soleil sur la sphère céleste.

On trouve qu'il décrit annuellement un grand cercle de la sphère céleste dans le sens appelé *direct* (sens inverse du mouvement diurne apparent, sens du mouvement diurne réel) : ce grand cercle est l'écliptique que nous utilisons ci-dessus.

Comme première approximation l'écliptique est invariable (§ 118) : autrement dit, *dans sa course annuelle le centre du Soleil se projette toujours sur les mêmes étoiles* (la variation de l'inclinaison de l'écliptique est de l'ordre d'une minute par siècle).

Le pôle de l'écliptique est précisément le point *fixe* Π de la sphère céleste autour duquel tourne la trace P de l'axe de rotation terrestre. D'où résulte que la ligne d'intersection de l'équateur et de l'écliptique se déplace dans le sens rétrograde (sens du mouvement diurne apparent) et fait un tour en 25 765 ans (30° ou un *signe* en 2 147 ans).

Les points d'intersection de l'écliptique et de l'équateur sont les équinoxes du printemps et d'automne ; le Soleil se trouvant alors dans l'équateur terrestre, les nuits et les jours sont égaux. L'équinoxe du printemps ou *point vernal* (*point* γ) étant pris comme origine des ascensions droites, et le point vernal se déplaçant, dans le sens du mouvement diurne, en moyenne tous les ans de 50″,26, les ascensions droites équatoriales croissent d'une manière continue.

C'est ce que nous avons vu plus haut.

2° — Zodiaque.

On appelle *zodiaque* la zone de la sphère céleste qui s'étend à 8°30′ de part et d'autre de l'écliptique et dans laquelle se meuvent les grosses planètes.

Le *zodiaque* contient les *douze constellations*, ou groupes d'étoiles, à travers lesquelles le Soleil trace sa route annuelle en sens inverse du mouvement diurne apparent, c'est-à-dire dans le sens direct.

Voici leurs noms à partir de l'équinoxe de printemps :

Poissons, Bélier, Taureau, Gémeaux, Cancer, Lion,

Vierge, Balance, Scorpion, Sagittaire, Capricorne, Verseau.

La figure 21 représente une bande du ciel de part et d'autre de l'équateur. Déroulons-la sur un plan : la trajectoire solaire devient à peu près une sinusoïde.

Découpons-la en bandes de 30° ; *à chacune de ces bandes, on attribue un signe spécial dont l'ensemble constitue les signes du zodiaque ; ils représentaient les constellations, il y a 2 000 ans.*

Ainsi la *constellation* et le *signe de la constellation* ont des significations différentes. La *constellation* est un groupe d'étoiles que traverse le Soleil à une certaine époque de l'année *astronomique* qu'on suppose commencer au passage ascendant du Soleil dans l'équateur ; le *signe de la constellation* est l'expression d'un angle.

Dire que tel phénomène se passe à 15° du Lion, signifie non pas

qu'il se projette sur la constellation du Lion (il se projette actuellement sur le Cancer), mais que l'angle avec le point vernal est 135°.

Le nom des constellations est inscrit en haut de ces bandes. Par exemple, à l'équinoxe de printemps, quand le Soleil remontant de l'hémisphère sud à l'hémisphère nord, passe dans l'équateur, il se trouve dans la constellation des Poissons. Mais il y a deux mille ans, il était alors dans la constellation du Bélier dont le signe ressemble à un γ grec (d'où le nom habituel du point vernal). Quand, en raison de la précession des équinoxes, l'équinoxe du printemps, se déplaçant dans le sens du mouvement diurne apparent, a passé du Bélier aux Poissons, on a conservé le signe du Bélier pour la première bande du Zodiaque.

De sorte que les constellations et les signes qui jadis les représentaient, ont subi un décalage.

Il est donc entendu que les signes représentent simplement des

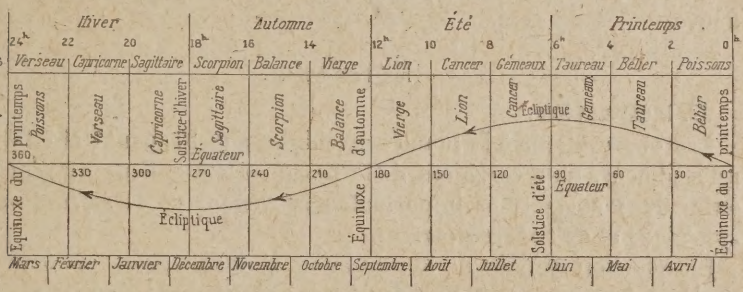


Fig. 21.

bandes de 30° comptées à partir de l'équinoxe, dans le sens direct (de l'ouest à l'est).

Aujourd'hui l'ascension droite de β Bélier (la première étoile importante de cette constellation) est $1^h\,50^m$. Le Soleil n'a cette ascension droite que le 21 avril.

Voici le tableau des *signes* du zodiaque, nécessaire pour lire les anciens mémoires.

Bélier. . . .	de 0 à 30°	Balance. . . .	de 180 à 210°
Taureau . . .	de 30 à 60°	Scorpion . . .	de 210 à 240°
Gémeaux . . .	de 60 à 90°	Sagittaire. . .	de 240 à 270°
Cancer	de 90 à 120°	Capricorne . .	de 270 à 300°
Lion	de 120 à 150°	Verseau. . . .	de 300 à 330°
Vierge	de 150 à 180°	Poissons . . .	de 330 à 360°

Ainsi l'expression 24° 31′ 27″ du Cancer, ou encore :

$$3^s\,24^\circ\,31'\,27''$$

qui se lit *trois signes*, etc., signifie $(90 + 24) = 114^\circ\,31'\,27''$, à partir du point vernal dans le sens direct (sens où l'on compte les ascensions

droites et les longitudes célestes), c'est-à-dire vers l'est, vers la gauche de l'observateur qui est placé sur l'équateur ou l'écliptique, la tête au pôle nord.

On a fait de nombreuses hypothèses sur l'origine des noms donnés aux constellations. Le lecteur ne me saurait aucun gré d'être l'écho de ces discussions d'une cuistrerie remarquable.

Quant aux figures qui relient les étoiles des constellations, elles ont varié de siècle en siècle et n'ont qu'un intérêt pittoresque.

Voici quelques renseignements pour les reconnaître dans les Atlas.

Les poissons sont deux poissons enchaînés. Le bélier est couché.

Le taureau fonce les cornes abaissées. Les gémeaux sont les frères Castor et Pollux. Le cancer est un crabe. La vierge est une femme qui tient une palme ou un épi. Le sagittaire est un centaure qui tire de l'arc. Le capricorne est une chèvre à queue de poisson. Le verseau est une urne (ou un homme penché sur une urne) de laquelle coule un fleuve.

Réfraction.

27. Réfraction.

Les observations à la lunette méridienne (§ 37) ayant été faites soigneusement, puis corrigées de la flexion s'il y a lieu, doivent encore subir deux corrections importantes provenant de la *réfraction atmosphérique* et de l'*aberration*.

La question difficile de la réfraction atmosphérique est traitée tout au long dans mon *Optique géométrique supérieure;* je n'en dis ici que le nécessaire pour fixer les idées.

L'atmosphère, *envisagée dans son ensemble*, est constituée par des couches sphériques dont les indices *décroissent* quand on s'élève, de 1,000·294 en moyenne près du sol, jusqu'à l'unité aux confins de l'atmosphère où le vide est absolu.

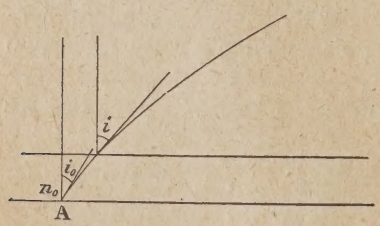


Fig. 22.

La lumière envoyée par un astre *qui n'est pas au zénith*, traverse donc obliquement les couches d'indice variable; la trajectoire du rayon est courbe. La ligne de visée ne passe pas par l'astre; d'où une différence entre la position apparente et la position réelle : les astres paraissent plus élevés au-dessus de l'horizon qu'ils ne le sont réellement. L'erreur, nulle quand la distance zénithale z est nulle, atteint une demi-minute pour $z = 30°$, près de 2′ pour $z = 60°$, plus de 30′ pour $z = 90°$. Et encore, dans ce dernier cas, suppose-t-on l'atmosphère dans un état d'équilibre qui n'est jamais réalisé : il est clair que si l'on se trouve dans les conditions du mirage, toute évaluation devient fantaisiste.

2° — Surfaces équiindices planes.

Si les surfaces équiindices pouvaient être considérées comme planes, la déviation du rayon lumineux se calculerait *sans connaître la loi de variation des indices.*

Soit n_0, i_0, l'indice et l'angle d'incidence là où se trouve l'observateur; on a (fig. 22) : $n_0 \sin i_0 = n \sin i = \gamma$.

Aux confins de l'atmosphère :

$$n = 1, \qquad i = i_1, \qquad \gamma = \sin i_1.$$

Posons : $i_1 = i_0 + \Delta$; Δ est la réfraction atmosphérique. Quelle que soit la loi de variation des indices et en vertu de la petitesse de Δ, on a :

$$n_0 \sin i_0 = \sin (i_0 + \Delta), \qquad \Delta = (n_0 - 1) \operatorname{tg} i_0. \qquad (1)$$

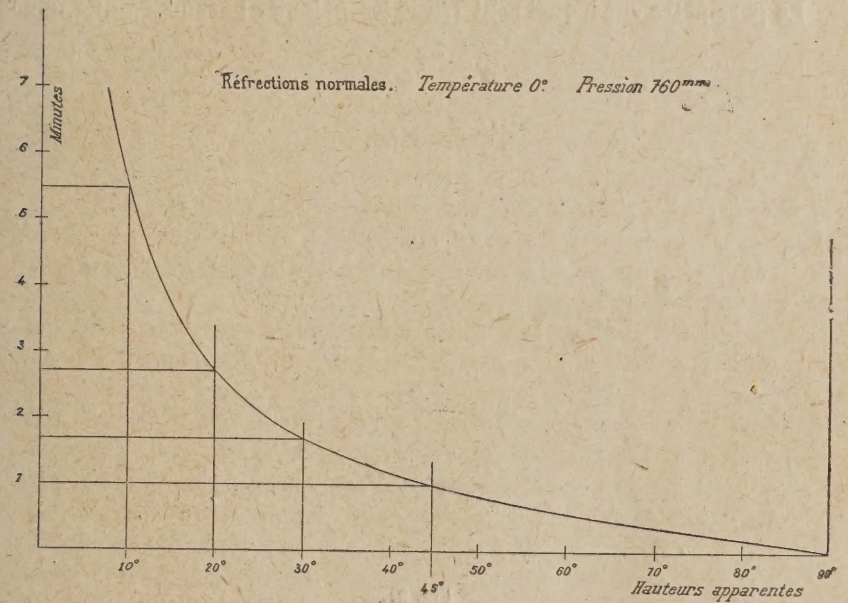


Fig. 23.

La déviation Δ ne dépend donc que de l'indice n_0.

A 0° et pour la pression 760mm, à la latitude 45° et à l'altitude 0m, on a pour l'indice de l'air : $n_0 = 1{,}000\cdot292\cdot6$.

La seconde d'arc vaut (en radian) $4{,}848.10^{-6}$;

$n_0 - 1$ vaut donc 292,6 : $4{,}848 = 60'',36$.

Pour la distance zénithale 45°, $\operatorname{tg} i_0 = 1$, on a $\Delta = 60'',36$;

pour la distance zénithale 64°, $\operatorname{tg} i_0 = 2{,}05$, on a $\Delta = 123'',74$.

Or les tables du *Bureau des Longitudes*, basées sur une théorie infiniment plus compliquée, donnent :

$$i_0 = 45°, \qquad \Delta = 60'',00; \qquad i_0 = 64°, \qquad \Delta = 122'',7.$$

Au delà de $i_0 = 64°$, les corrections sont toujours incertaines; les tables donnent des secondes, des dixièmes et des centièmes de secondes, mais personne ne se laisse prendre à ce bluff de décimales.

J'étudie la question dans mon Cours d'*Optique géométrique;* j'en montre les difficultés.

A l'horizon les tables donnent des nombres extraordinairement variés. La *Connaissance des Temps* pour 1915 indique à 0° et pour la pression normale (760^{mm}) : 36′ 36″.

Les marins utilisent la correction moyenne calculée pour + 10° centigrades et la pression normale de 760^{mm}; elle est :

33′ 48″.

Le paramètre sur lequel sont basés les calculs, paramètre que nous

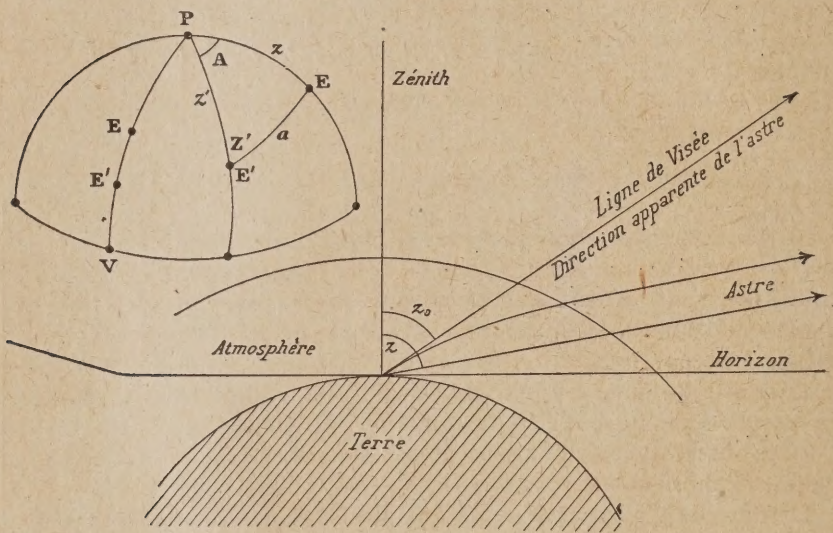


Fig. 24.

prenons plus haut égal à 60″,36 était admis de 60″,62 il y a vingt ans; il est aujourd'hui de 60″,15. Tout cela donne à réfléchir aux gens qui ne sont pas idiots, sur la valeur des *centièmes* de seconde d'arc que fournit libéralement la *Connaissance des Temps.*

Quand la température est $t°$ et la pression barométrique H, il faut multiplier la correction par

$$H : 760 (1 + \alpha t).$$

3° — La réfraction fait paraître les astres plus hauts qu'ils ne sont; elle diminue la distance zénithale. Elle ne modifie pas les azimuts.

Elle diminue la distance de deux astres situés dans le même vertical

d'une quantité égale à la différence ou à la somme des réfractions, suivant qu'ils sont du même côté du zénith ou de côtés différents.

Si les astres sont dans des verticaux différents, la réfraction diminue leur distance, puisque chaque astre est rapproché du zénith.

Mais la variation de distance ne s'exprime pas d'une façon simple.

Pour la calculer, il est nécessaire de connaître l'azimut relatif des astres et les hauteurs zénithales.

Soit z et z' ces distances zénithales. Soit a leur distance. On a :

$$\cos a = \cos z.\ \cos z' + \sin z.\ \sin z'.\ \cos A.$$

Différentions; utilisons les formules trigonométriques IV; nous obtenons la relation : $da = \cos Z.\ dz + \cos Z'.\ dz'$.

Elle donne l'erreur sur la distance a des deux astres, en fonction des erreurs dz et dz' sur les distances zénithales.

dz et dz' étant négatifs du fait de la réfraction atmosphérique, da est lui-même négatif.

Si les astres sont dans le même vertical PV et dans la situation relative représentée, on a :

$$Z = 180°,\quad Z' = 0;\qquad da = dz' - dz < 0.$$

28. Construction empirique des tables de réfraction.

1° — La réfraction est un phénomène relativement énorme qui n'avait pas échappé aux anciens. Par exemple, mesurons la distance à la polaire d'une étoile dont la déclinaison est voisine de la latitude du lieu d'observation, par conséquent qui passe au méridien près du zénith de ce lieu (§ 13). Cette distance est d'un demi-degré plus grande lors du passage au méridien que lorsqne l'étoile se lève ou se couche.

Cette observation a été faite depuis très longtemps sur γ Andromède dont la déclinaison est voisine de 42°.

Les anciens avaient aussi remarqué que l'équinoxe peut s'apercevoir deux fois dans le même jour; autrement dit, que le Soleil peut passer deux fois dans l'équateur, la variation apparente due à la réfraction l'emportant sur la variation réelle de déclinaison.

2° — Pour construire une table des réfractions, on se servait anciennement d'un théodolite ou d'un appareil analogue, permettant de mesurer la hauteur de l'astre dans divers azimuts A. L'angle A n'est pas affecté par la réfraction puisque le lieu vrai E' et le lieu apparent E sont dans le même vertical; ils ont par suite le même azimut.

Connaissant la déclinaison de l'astre D et la latitude du lieu λ, mesurant A, on calcule la distance zénithale vraie z (ou son complément h) par la formule du § 12 :

$$\sin D = \sin h.\ \sin\lambda - \cos h.\ \cos\lambda.\ \cos A.$$

On la compare à la distance zénithale observée z'; d'où la réfraction

$z - z'$ dans les conditions de l'expérience (pression et température mesurées au voisinage de l'observateur).

Ici se présente une difficulté : puisque la réfraction agit sur la mesure des arcs PZ et PE, elle doit être supposée connue pour faire le calcul correct de la distance zénithale vraie z.

Autrement dit, pour obtenir la table, nous avons besoin de la latitude du lieu et de la déclinaison de l'astre : or elles sont observées entachées de la réfraction. Mais l'erreur peut être corrigée par la comparaison des résultats obtenus avec plusieurs étoiles et en opérant sous diverses latitudes.

Dès que les horloges précises furent à la disposition des astronomes (fin du XVII^e siècle), ils se contentèrent de déterminer la hauteur h, ou son complément, la distance zénithale z, pour des angles horaires H connus. On a (§ 12) pour la hauteur vraie :

$$\cos z = \sin h = \sin D . \sin \lambda + \cos \lambda . \cos H.$$

On compare z à la hauteur apparente z'.

3° — Une foule de méthodes ont été utilisées jusqu'à la construction des tables exactes (Cassini, La Caille). Elles sont pédagogiquement intéressantes comme forçant à réfléchir sur la nature du phénomène.

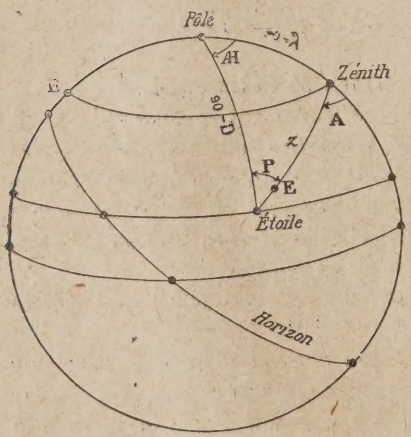


Fig. 25.

Par exemple, utilisons une étoile qui, dans le méridien, passe à notre zénith Z (fig. 25). Son lieu apparent est alors le même que son lieu vrai. Sa distance polaire est le complément de la latitude. Observons-la douze heures après, en B par conséquent. Sa distance zénithale devrait être $180 + 2\lambda$: la différence du lieu vrai et du lieu apparent donne la réfraction pour une hauteur au-dessus de l'horizon égale à $2\lambda - 90°$.

$$\text{Pour Paris } \lambda = 48° 50', \qquad 2\lambda - 90 = 7° 40'.$$

La différence entre le lieu vrai et le lieu observé est $7' 5''$.

J'ai dit plus haut que, pour éviter le cercle vicieux, il était nécessaire de répéter les mesures sur un grand nombre d'étoiles et en deux lieux de latitudes très différentes. C'est ce que fit La Caille dans son célèbre voyage du cap de Bonne-Espérance, où il détermina les hauteurs apparentes de 153 étoiles; il les compara aux hauteurs déterminées à Paris.

4° — Le lecteur se demande sûrement comment on a travaillé si longtemps sur les réfractions pour en dresser empiriquement la table, quand un calcul élémentaire les donne immédiatement. Il ne faut pas oublier que si la loi de Descartes est connue depuis 1637 environ, la théorie des rayons courbes dans un milieu continûment variable date de Bouguer, c'est-à-dire du milieu du XVIII^e siècle. Mais on ne savait pas à cette époque quel était l'indice de l'air; on ne connaissait pas la loi de Gay-Lussac évidemment, ni la manière dont l'indice varie avec la pression et la température. De sorte que ce qui est pour nous élémentaire, était alors mystérieux. Au reste, si nous savons actuellement que jusqu'à des distances zénithales de 60°, la formule élémentaire donne *strictement* les mêmes résultats que la théorie complète, ce n'est pas évident *a priori*. Or cette théorie complète est due à Laplace.

5° — La réfraction produit deux phénomènes intéressants.

Le disque solaire à l'horizon paraît une ellipse de grand axe horizontal. Cela tient à ce que son bord inférieur est plus relevé que le supérieur. La *Connaissance des temps* donne pour

la hauteur 0° 0′, la réfraction normale 36′36″
— 0°30′, — 30′21″.

La différence est de 6′. Donc le diamètre vertical du disque solaire est diminué d'un cinquième environ.

On a vu parfois la Lune éclipsée, *le Soleil étant encore sur l'horizon;* il est clair qu'il n'y était qu'en apparence. Le phénomène, rapporté par les anciens, a été constaté à Paris le 19 juillet 1750.

28 *bis*. **Position apparente d'une étoile rapportée à la position vraie.**

1° — Imaginons que la croisée des fils du réticule d'un équatorial (§ 50) suive exactement la position *vraie* d'une étoile.

On demande comment se déplace la position *apparente* par rapport à cette croisée des fils, du fait de la réfraction.

On suppose les fils rectangulaires: l'un d'eux est constamment dans le plan horaire de l'étoile. Ils nous serviront d'axes de coordonnées.

Le triangle sphérique PZE (fig. 25) donne :

$$\cos z = \sin\lambda \cdot \sin D + \cos\lambda \cdot \cos D \cdot \cos H,$$
$$\sin z \cdot \cos P = \sin\lambda \cdot \cos D - \cos\lambda \cdot \sin D \cdot \cos H,$$
$$\sin z \cdot \sin P = \cos\lambda \cdot \sin H.$$

La réfraction déplace l'étoile d'une quantité qui (jusqu'à 10° de l'horizon) est bien représentée par la formule :

$$R = k \operatorname{tg} z.$$

Dans le plan focal de l'équatorial prenons l'axe Ex suivant le cercle

horaire vers le nord; prenons l'axe Ey suivant le cercle de déclinaison dans le sens oriental.

On a :

$$x = \mathrm{R}\cos\mathrm{P} = k\cos\mathrm{P}.\,\mathrm{tg}z, \qquad y = \mathrm{R}\sin\mathrm{P} = k\sin\mathrm{P}.\,\mathrm{tg}z.$$

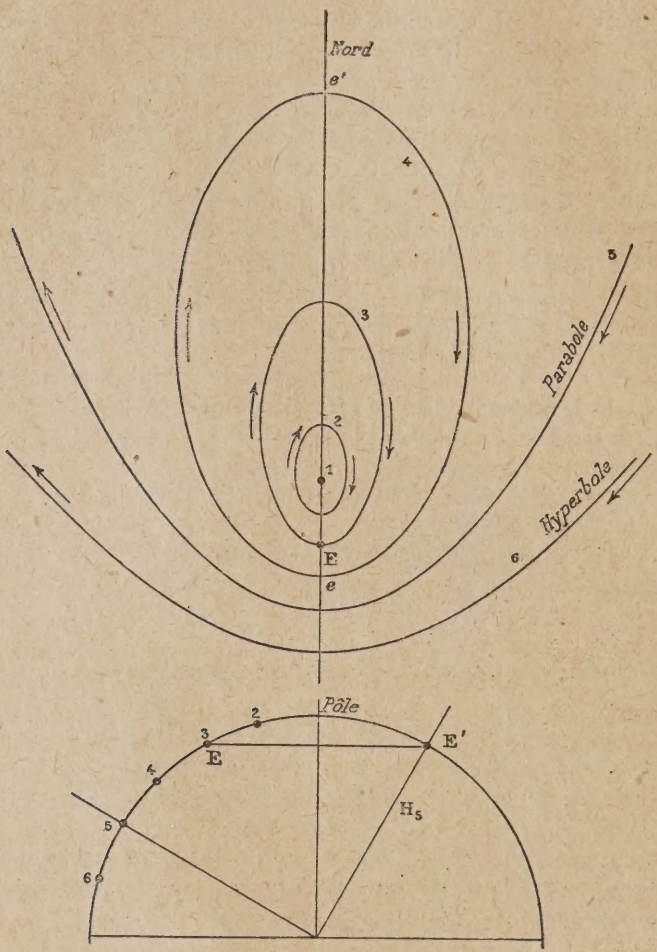


Fig. 26.

ou, à un facteur constant près :

$$x = \cos\mathrm{P}.\,\mathrm{tg}z, \qquad y = \sin\mathrm{P}.\,\mathrm{tg}z.$$

On trouve aisément :

$$\mathrm{cotg}\lambda.\cos\mathit{H}\,(x\cos\mathrm{D} + \sin\mathrm{D}) = x\sin\mathrm{D} + \cos\mathrm{D},$$
$$\mathrm{cotg}\lambda.\sin\mathit{H}\,(x\cos\mathrm{D} + \sin\mathrm{D}) = y.$$

Élevons au carré et ajoutons membre à membre en rétablissant le facteur k :

$$\cotg^2\lambda\,(x\cos D + k\sin D)^2 = y^2 + (x\sin D - k\cos D)^2.$$

C'est une ellipse, une parabole, une hyperbole suivant que $\cos^2 D$ est inférieur, égal, supérieur à $\sin^2\lambda$.

Pour les étoiles circumpolaires (D voisin de 90°), la trajectoire est elliptique.

La trajectoire est parabolique pour les étoiles qui rasent l'horizon. Enfin elle est hyperbolique pour les étoiles qui se lèvent et se couchent.

Les axes de parabole et d'hyperbole réellement décrits s'arrêtent aux points qui correspondent à $z = 80°$, puisqu'au delà la formule utilisée pour représenter la réfraction n'est plus acceptable.

2° — On fera commodément la discussion en supposant (fig. 26) que l'étoile a une déclinaison invariable et que le lieu d'observation se déplace sur un méridien terrestre.

Les points 1, 2, 3..., représentent les zéniths successifs.

Pour 1 ($\lambda = 90°$), la trajectoire apparente se réduit à un point, quelle que soit la déclinaison de l'étoile. C'est évident *a priori*, puisque le vertical se confond toujours avec le cercle horaire. La trajectoire 1 est au nord de la position vraie E, à une distance E1 égale à $k\cotg D$.

Quand le zénith vient en 2, la trajectoire est elliptique.

Pour le zénith en 3, l'étoile passe au zénith. La position vraie se confond alors avec la position apparente.

Supposons le zénith en 4. Je dis que la trajectoire entoure la position vraie E.

En effet la réfraction rapproche toujours l'étoile du zénith. Quand elle est en E, la réfraction l'éloigne du pôle nord (position e sur la trajectoire); quand elle est en E', la réfraction la rapproche du pôle nord (position e' sur la trajectoire). Le rapprochement $\overline{Ee'}$ est plus grand par l'éloignement $\overline{Ee}$, puisque dans le second cas la distance zénithale est plus petite que dans le premier.

Quand le zénith arrive en 5 ($\cos D = \sin\lambda$), l'étoile rase l'horizon H_5 dans l'une de ses positions. Si la formule admise pour la réfraction restait valable jusqu'à $z = 90°$, le déplacement vers le nord serait infini. La courbe est donc une parabole dont, bien entendu, nous n'utilisons qu'un arc très petit.

Enfin quand le zénith vient en 6, l'étoile se lève et se couche; la trajectoire apparente est un arc d'hyperbole. En effet elle est calculée avec une formule qui donne des déplacements infinis vers le nord aux deux passages à travers le plan horizon.

3° — Reste à savoir dans quel sens tourne l'astre apparent sur sa trajectoire (fig. 27).

Pour cela plaçons le zénith par rapport au cercle de déclinaison de l'étoile comme en 2 de la figure 27.

L'étoile décrit réellement le cercle 1, 2, 3, 4. Sa position apparente décrit la courbe 1′, 2′, 3′, 4′. Plaçons-nous au point C, centre de la sphère céleste. La position apparente est par rapport à la position vraie

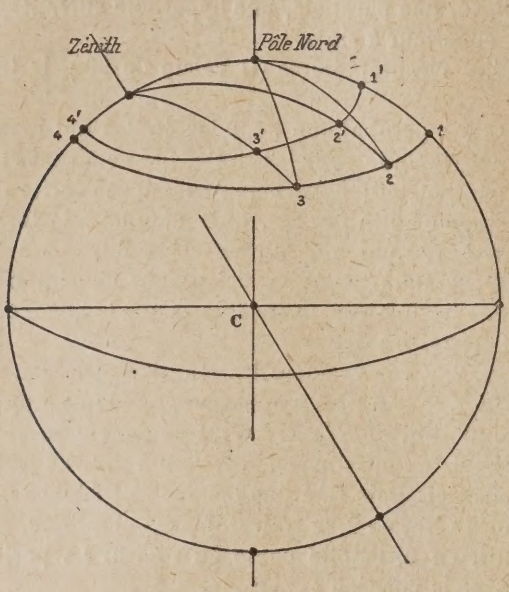


Fig. 27.

à droite du cercle horaire. L'angle de position P est nul pour 11′ et pour 22′; il est maximum pour 33′.

Donc les courbes sont décrites dans le sens des flèches de la figure 26.

Je laisse au lecteur le soin de parfaire la discussion. En particulier il supposera que l'étoile est australe.

Parallaxe. Aberration[1].

29. Aberration.

La vitesse de la lumière vient encore compliquer les observations. Pour l'étude des phénomènes lumineux dus au mouvement, je renvoie au volume de ce cours intitulé *Électroptique-Ondes Hertziennes;* je rappelle seulement l'essentiel pour le cas qui nous occupe.

1° — Nous supposons que la source lumineuse n'est pas entraînée avec l'appareil d'observation; nous demandons quelle est la modification de sa *position apparente.*

1. A passer dans une première lecture.

Il faut d'abord définir ce qu'on entend par *position apparente vraie actuelle* d'un point lumineux, par exemple d'une étoile.

Cette étoile envoie dans l'éther *immobile* des ondes qui *pour nous* sont toujours planes, vu la distance du point qui émet. Nous appelons *direction ou position apparente vraie de l'astre* la normale à ces ondes. Il va de soi que si on prolonge cette normale, on pourra ne pas rencontrer l'astre. Nous savons qu'il a coupé la droite ainsi tracée, mais il y a peut-être dix ans, cent ans. Depuis lors, l'astre s'est généralement déplacé. Sa *position apparente vraie* n'a donc aucun rapport nécessaire avec sa *position vraie*, qui *a priori* nous échappe absolument.

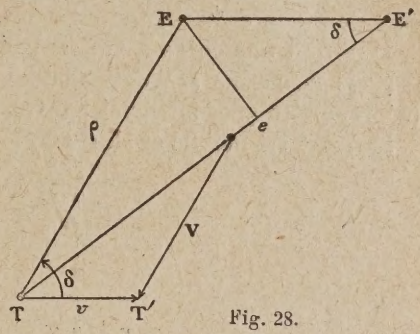


Fig. 28.

Nous allons voir qu'en raison du mouvement de la Terre, sa *position apparente* n'est pas identique avec sa *position apparente vraie;* autrement dit, il n'apparaît pas dans le prolongement de la normale aux ondes planes, qui en définitive sont dans l'éther immobile le phénomène que nous appelons *étoile.*

2° — Il ne peut entrer dans notre plan d'étudier accidentellement une question aussi compliquée que l'aberration.

Il suffit de donner le résultat.

Soit T le lieu de l'observateur animé d'une vitesse représentée par le vecteur $v = \overline{TT'}$. Il regarde l'étoile E supposée fixe. Soit V la vitesse *finie* de la lumière représentée par un vecteur parallèle à ET.

Tout se passe comme si l'astre était en E', *au bout d'un vecteur* EE' *parallèle à* TT' *et de longueur :* $\rho\, v : V$.

ρ est la distance actuelle $\overline{TE}$.

La déviation ETE' étant toujours extrêmement petite, les angles marqués δ sur la figure sont sensiblement égaux. On a :

$$\overline{Ee} = \overline{EE'} \cdot \sin\delta, \qquad \text{déviation} = \frac{\overline{Ee}}{\rho} = \frac{v}{V}\sin\delta.$$

3° — La vitesse v de la Terre est la résultante de trois vitesses : la vitesse d'ensemble du système solaire dans l'espace que nous pouvons considérer comme invariable de grandeur et de direction; la vitesse de translation de la Terre sur sa trajectoire annuelle; la vitesse due à la rotation de la Terre autour de son axe.

La première produit un effet constant, indépendant de l'étoile considérée et de l'époque des observations; elle n'intervient donc pas sur nos mesures qui sont toujours relatives. La vitesse due à la rotation est relativement petite (inférieure à 465 m. à la seconde); elle

produit une aberration de période diurne qui change les directions de moins d'un tiers de seconde et qu'on élimine par des moyennes.

Reste l'aberration annuelle dont nous allons chercher l'expression.

Le problème fondamental que nous allons résoudre est celui du passage des coordonnées écliptiques géocentriques apparentes, c'est-à-dire modifiées par le mouvement de la Terre (aberration), aux coordonnées écliptiques héliocentriques.

30. **Influence du mouvement annuel de la Terre sur les coordonnées écliptiques géocentriques.**

1° — Soit une étoile A vue de la Terre.

Nous mesurons ses coordonnées écliptiques apparentes X_1, Y_1, Z_1 (coordonnées géocentriques apparentes).

La Terre est mobile et située en T′ sur sa trajectoire autour du Soleil,

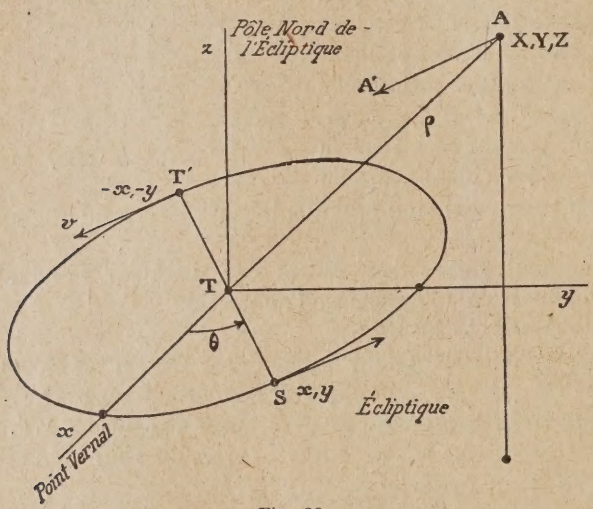


Fig. 29.

trajectoire que, pour simplifier, nous poserons circulaire et de rayon R.

Comparons les coordonnées X_1, Y_1, Z_1, aux valeurs X, Y, Z, qu'elles auraient si la Terre était fixe en T, ou, si l'on veut, si l'étoile était vue du Soleil supposé au point T (coordonnées héliocentriques).

Quand le Soleil est en S sur sa trajectoire apparente la Terre étant alors supposée en T, en réalité le Soleil est en T et la Terre en T′.

La vitesse apparente du Soleil et la vitesse réelle de la Terre sont représentées par deux vecteurs v égaux et de signes contraires, évidemment tracés sur l'écliptique. Pour tenir compte de l'aberration, il faut supposer l'astre A transporté en A′ au bout d'un vecteur parallèle à v (c'est-à-dire situé dans un plan parallèle à l'écliptique), et de longueur $\rho v : V$, où ρ est la distance de l'astre à la Terre ou au Soleil, V la vitesse de la lumière.

Ceci posé, on a immédiatement les relations :

$$\begin{aligned} X_1 &= X + x - \frac{\rho}{V}\frac{dx}{dt}, \qquad Z_1 = Z, \\ Y_1 &= Y + y - \frac{\rho}{V}\frac{dy}{dt}, \qquad x = R\cos\theta, \qquad y = R\sin\theta. \end{aligned} \tag{1}$$

x et y sont les coordonnées *géocentriques vraies* du Soleil;
θ est la longitude *géocentrique vraie*.

Par les termes en x et y, ces formules tiennent compte du déplacement de l'origine des coordonnées (transport de l'origine de T en T'); par les derniers termes du second membre, elles tiennent compte du transport fictif de l'astre de A en A', c'est-à-dire du mouvement de la Terre.

La distance TS de la Terre au Soleil est représentée par R : nous pouvons sans inconvénient la prendre constante.

Remplaçons les coordonnées rectilignes par les coordonnées sphériques écliptiques (longitude et latitude célestes) :

$$\begin{aligned} \rho_1 \sin l_1 &= \rho \sin l, \\ \rho_1 \cos l_1 . \cos L_1 &= \rho \cos l . \cos L + R\cos\theta + \frac{R\rho}{V}\sin\theta . \frac{d\theta}{dt}, \\ \rho_1 \cos l_1 . \sin L_1 &= \rho \cos l . \sin L + R\sin\theta - \frac{R\rho}{V}\cos\theta . \frac{d\theta}{dt}. \end{aligned} \tag{2}$$

ρ_1, l_1, L_1, sont les coordonnées géocentriques apparentes; ρ, l, L sont les coordonnées héliocentriques.

2° — Pour calculer les variations des coordonnées, appuyons-nous sur ce qu'elles sont très petites. Écrivons dans les équations précédentes sous la forme :

$$\begin{aligned} \rho_1 \sin l_1 - \rho \sin l &= d(\rho \sin l) = 0 \\ d(\rho \cos l . \cos L) &= R\cos\theta + \frac{R\rho}{V}\sin\theta\frac{d\theta}{dt}, \\ d(\rho \cos l . \sin L) &= R\sin\theta - \frac{R\rho}{V}\cos\theta\frac{d\theta}{dt}. \end{aligned}$$

Tirons $d\rho$ de la première, substituons dans les deux autres.

Posons $\qquad R : \rho = \alpha, \qquad R d\theta : V dt = \beta.$

Il vient aisément :

$$\begin{aligned} -dl &= \alpha \sin l . \cos(\theta - L) + \beta \sin l . \sin(\theta - L), \\ dL . \cos l &= \alpha \sin(\theta - L) - \beta \cos(\theta - L). \end{aligned} \tag{3}$$

Les termes en α représentent la *parallaxe annuelle;* ils dépendent de la distance ρ de l'étoile et s'annulent quand cette distance est très grande devant la distance moyenne R de la Terre au Soleil.

Les termes en β représentent l'*aberration annuelle;* ils ne dépendent pas de la distance de l'astre.

Remplaçons β par sa valeur; on trouve pour l'aberration seule :

$$l_1 - l = -20'',47 \cdot \sin(\theta - L) \cdot \sin l,$$
$$L_1 - L = -20'',47 \cdot \cos(\theta - L) : \cos l. \qquad (4)$$

31. Phénomènes produits par l'aberration annuelle.

1° — Cherchons la trajectoire apparente de l'étoile autour de sa position moyenne. Projetons cette trajectoire sur le plan tangent à la sphère céleste en ce point (fig. 30). Prenons pour axes de coordonnées

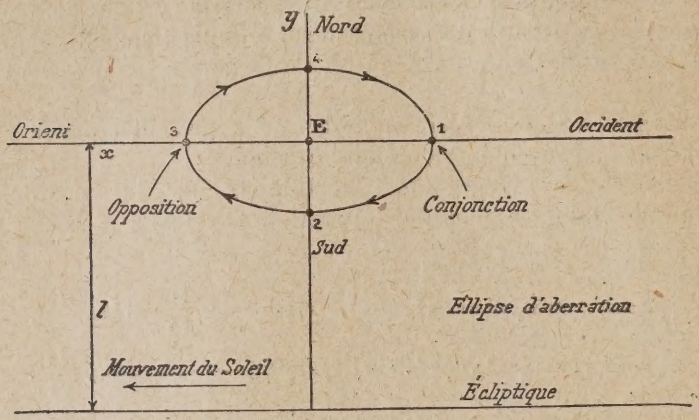


Fig. 30.

un petit cercle parallèle à l'écliptique passant par la position moyenne de l'étoile, et un grand cercle perpendiculaire.

Vu la petitesse des angles considérés, utilisons comme axes les tangentes Ex, Ey, à ces cercles.

Nous décrivons ainsi la trajectoire de l'étoile dans le plan tangent à la sphère céleste passant par sa position moyenne E.

Changeons l'origine des longitudes solaires géocentriques. Prenons comme plan origine celui qui passe par l'étoile.

Remarquons qu'à la latitude l, l'arc qui correspond à une variation dL de longitude, est dL.cos$l$.

Nos équations s'écrivent donc :

$$y = -20'',47 \cdot \sin l \cdot \sin \theta, \qquad x = -20'',47 \cdot \cos \theta. \qquad (1)$$

Le grand axe de l'ellipse est parallèle à l'écliptique; il vaut 41″, quelle que soit la latitude de l'étoile.

Raisonnons pour une étoile boréale.

Pour $\theta = 0$, on dit qu'il y a *conjonction;* l'étoile et le Soleil ont même longitude géocentrique.

On a $x = -20'',47$; l'étoile est en 1, au point le plus occidental de sa course.

Pour $\theta = 180°$, il y a *opposition;* l'étoile est en 3, au point le plus oriental de sa course.

Pour $\theta = 90°$, trois mois après la conjonction, on a :

$$y = -20'',47 . \sin l, \qquad x = 0.$$

On obtient ainsi le point 2 de moindre latitude.

L'ellipse est donc parcourue dans le sens de la flèche.

Le sens de rotation serait inverse pour une étoile australe. Les étoiles paraissent toujours le plus près de l'écliptique trois mois après la conjonction (première quadrature) : les étoiles boréales sont alors au

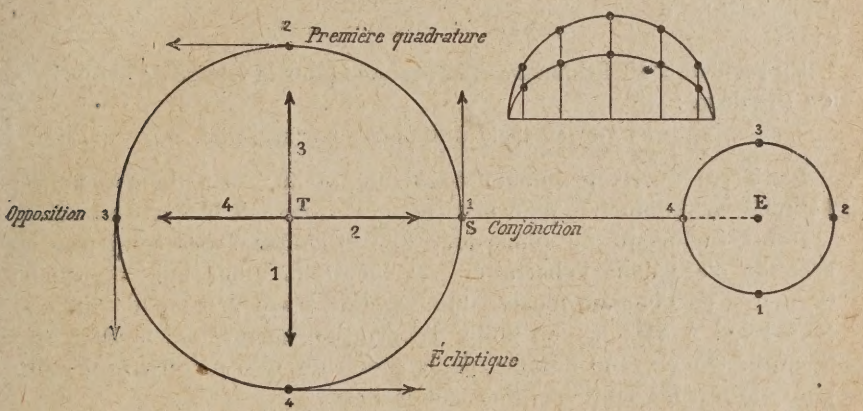


Fig. 31.

midi par rapport à leur position moyenne; les étoiles australes sont au nord.

Quelles soient australes ou boréales, c'est au moment de la conjonction qu'elles sont le plus occidentales.

2° — Au reste tout cela est évident sans calcul.

Représentons la trajectoire solaire apparente par un cercle dans le tableau qui est l'écliptique. Aux positions apparentes 1, 2, 3, 4, du Soleil correspondent pour la vitesse de la Terre les vecteurs 1, 2, 3, 4. D'où les positions apparentes 1, 2, 3, 4, de l'étoile E sur un cercle *situé dans un plan parallèle à l'écliptique*, du côté nord de ce plan si l'étoile est boréale.

Vu du point T, ce cercle se projette sur la sphère céleste. Il paraît une ellipse, dont le grand axe 1, 3, parallèle à l'écliptique a une longueur indépendante de la latitude l, dont le petit axe est égal au grand axe multiplié par $\sin l$. Dans la projection, le point 2 le plus éloigné de la Terre, devient le plus bas, le point 4 devient le plus haut.

Il résulte des équations (1) que l'étoile décrit l'ellipse suivant la loi des aires; le rayon vecteur qui balaie les aires est issu du centre de

l'ellipse. Pour trouver la position de l'étoile 1, 2, 3,... mois après la conjonction ou l'opposition, on trace un cercle admettant le grand axe de l'ellipse comme diamètre; on le divise en 12 parties égales et des points obtenus on abaisse des perpendiculaires sur le grand axe. Les intersections de ces droites avec l'ellipse sont les points cherchés.

Le grand axe de l'ellipse, parallèle à l'écliptique, est plus ou moins incliné sur l'équateur suivant la longitude de l'étoile.

L'inclinaison varie de $-23°27'$ à $+23°27'$.

32. Constante de l'aberration annuelle.

On désigne ainsi la quasi constante $a = v : V$; on admet que sa valeur est :

$$a = 20'',47 = 0,9924.10^{-4}.$$

En prenant $3 \cdot 10^5$ kilomètres par seconde pour la vitesse de la lumière, on tire de là :

$$v = aV = 29,77 \text{ kilomètres par seconde,}$$

La Terre décrit le chemin $2\pi R$ en un an; cela donne environ 149·500·000 kilomètres pour la distance moyenne de la Terre au Soleil.

Il est important de remarquer que le chiffre 7 des centièmes de seconde d'arc dans l'aberration est incertain. Pour une lunette de 6 mètres de distance focale, une seconde d'arc correspond dans le plan focal à 30μ; la constante d'aberration correspond à 615μ, soit $0^{mm},615$. On se rend compte de la précision des pointés nécessaire pour assurer les centièmes de seconde d'arc.

Le temps que la lumière met à venir du Soleil est en secondes :

$$1495.10^5 : 3.10^5 = 498^s = 8^m\,18^s.$$

Enfin on tire de là pour la *parallaxe solaire*, c'est-à-dire pour l'angle sous lequel on voit du Soleil le rayon terrestre : $8'',80$.

Voici dès lors quelles seraient les constantes du système solaire que je donne ici pour fixer les idées :

Distance moyenne du Soleil à la Terre . .	149 500 000 kilomètres.
Diamètre du Soleil	1 391 000 —
Diamètre en diamètres terrestres.	109,05 —
Masse par rapport à la Terre	333 000 —
Gravité en mètres.	273,8 —
— en grammes sur un gramme masse.	27,88 —

33. Aberration du Soleil.

1° — Nous pouvons appliquer au Soleil les formules précédentes en y faisant $l = 0$; la latitude du Soleil est nulle par définition; elle reste nulle. Seule la longitude est modifiée.

Reprenons nos raisonnements, c'est plus éducatif.

Posons que la Terre décrit annuellement autour du Soleil une ellipse

dont il occupe un des foyers. Le grand axe de l'ellipse est la ligne des *sommets* ou *apsides*; les sommets s'appellent *périgée* et *apogée*.

Le déplacement s'effectue suivant la loi des aires.

Comptons les *anomalies* (longitudes géocentriques, § 84) à partir de la ligne des apsides, du côté *périgée*.

Représentons l'écliptique vue du côté nord.

En S le Soleil a une vitesse *apparente v*. En réalité le Soleil est fixe; la vitesse de la Terre est v' égale et parallèle à v, mais de sens contraire.

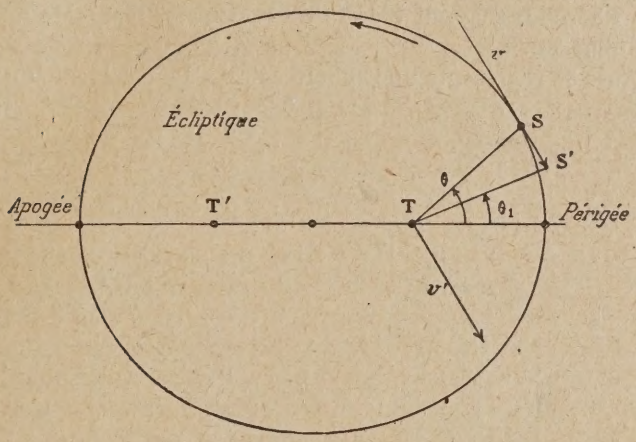


Fig. 32.

Nous verrons (§ 88) que la vitesse linéaire apparente du Soleil pour une anomalie vraie (longitude) est :

$$v = r\frac{d\theta}{dt} = a\omega(1 + e\cos\omega t).$$

La quantité $\overline{SS'}$ dont l'aberration déplace le Soleil dans le sens de la vitesse actuelle de la Terre est

$$\frac{rv}{V} = \frac{ra\omega}{V}(1 + e\cos\omega t).$$

Comme la vitesse est toujours très sensiblement perpendiculaire au vecteur qui va de la Terre au Soleil, *l'angle dont l'anomalie est diminuée, a pour valeur :*

$$\theta - \theta_1 = \frac{a\omega}{V}(1 + e\cos\omega t) = 20'',47\,(1 + e\cos\omega t).$$

On a : $e = 0{,}0168$, $\quad 20'',47 \times 0{,}0168 = 0'',34$.

On peut donc admettre sans erreur sensible que l'anomalie ou la longitude solaires sont constamment diminuées de $20'',47$, ce qui donne une diminution de $1^s,4$ en temps.

En fait elle varie de 20″,13 à 20″,81.

Comme nous le montrerons au § 36 *bis* d'une manière générale, on obtient le même résultat en supposant la Terre fixe et le Soleil mobile. Sa lumière met 498 secondes à nous arriver : l'ascension droite du Soleil est par conséquent diminuée du chemin que le Soleil parcourt en 498 secondes de temps. Or le moyen mouvement solaire en longitude est de 3548″ par jour, En 498 secondes il parcourt moyennement :

$$3548 \times 498 : 86\,400 = 20'',47$$

2° — Cherchons ce qui résulte de là pour les temps de passage du Soleil au méridien.

La figure 33 représente une sphère céleste. Le méridien M d'un lieu A

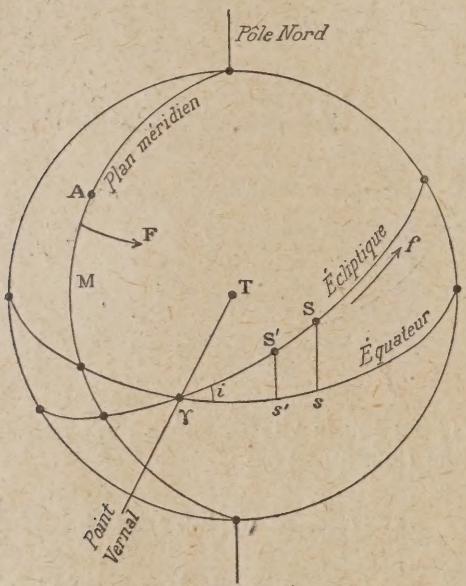


Fig. 33.

tourne journellement d'un tour dans le sens de la flèche F ; il contient le Soleil à une certaine heure qui est celle du passage du Soleil au méridien. Il est clair que le plan M passe plus tôt sur le Soleil apparent S′ que sur le Soleil vrai S.

Or la longitude solaire est comptée à partir du *point vernal* γ sur l'écliptique dans le sens de la flèche *f*. Si l'aberration diminue la longitude, le passage apparent du Soleil au méridien précède son passage réel.

Cherchons de combien.

Il faut évaluer l'arc *s′s* sachant que l'arc S′S vaut 20″,47.

Dans le triangle rectangle, on a :

$$\operatorname{tg} \mathcal{R} = \operatorname{tg} L . \cos i, \qquad \frac{d\mathcal{R}}{\cos^2 \mathcal{R}} = \cos i \frac{dL}{\cos^2 L}, \qquad d\mathcal{R} = \frac{\cos i . dL}{1 - \sin^2 L . \sin^2 i}.$$

Pour $L = 0$, $L = 180°$: $d\mathrm{R} = \cos i \,.\, dL$;

$L = 90°$, $L = 270°$: $d\mathrm{R} = (1 : \cos i)\, dL$.

Pour $i = 23°27'$, $\cos i = 0{,}917$.

Donc le passage apparent précède le passage réel d'une quantité qui oscille entre $1^s{,}3$ et $1^s{,}5$.

34. Nature des phénomènes dus à la parallaxe annuelle.

Représentons l'ellipse de parallaxe comme nous avons fait plus haut pour l'ellipse d'aberration (fig. 34). Elle a pour équation :

$$x = \alpha \sin \theta, \qquad y = -\alpha \sin l. \cos \theta.$$

Pour une distance donnée ρ de l'astre, le grand axe est encore indé-

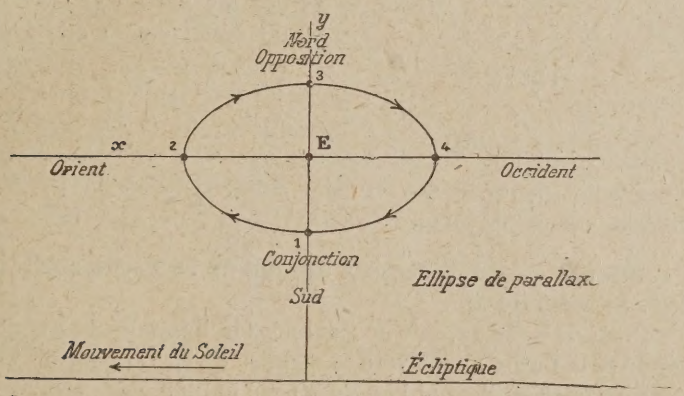


Fig. 34.

pendant de la latitude et parallèle à l'écliptique; le rapport des axes est encore $\sin l$. On ne peut cependant pas confondre les ellipses d'aberration et de parallaxe, parce qu'elles sont décalées de 90° ou de trois mois l'une sur l'autre.

C'est maintenant pour la conjonction et l'opposition (*syzygies*) que la latitude est minima et maxima.

Si une étoile est au pôle même de l'écliptique, l'ellipse de parallaxe devient un cercle (fig. 35) :

$$x = \alpha \sin \theta, \qquad y = -\alpha \cos \theta,$$

dont le centre est précisément le pôle Π de l'écliptique. La longitude apparente de l'étoile est toujours égale à la longitude du Soleil; la latitude de l'étoile est plus petite quand elle est en conjonction.

C'est ce qui arriverait sensiblement pour l'étoile 36 Dragon dont les coordonnées sont $\mathrm{R} = 18$ h. 13 m., $\mathrm{D} = 65°21'$, tandis que les coordonnées du pôle de l'écliptique sont $\mathrm{R} = 18$ h., $\mathrm{D} = 66°33'$.

En comparant les figures 34 et 35, le lecteur n'oubliera pas que la figure 34 est vue du centre de la sphère céleste; la figure 35 est vue de l'extérieur de cette sphère.

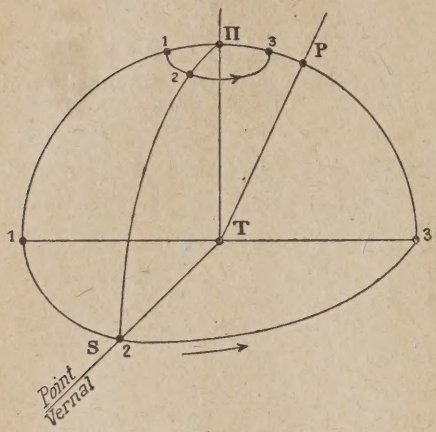


Fig. 35.

Bradley découvrit l'aberration en cherchant la parallaxe. Il étudia l'étoile γ du Dragon, étoile boréale dont l'ascension droite est voisine de 18 heures et qui est en conjonction au mois de décembre. C'est donc en décembre que sa latitude devrait être minima, tandis qu'effectivement elle l'est trois mois après.

Je reviendrai plus loin sur l'étude de la parallaxe (§ 234); qu'il suffise pour l'instant de savoir que α est pratiquement nul pour la très grande majorité des étoiles. En particulier la parallaxe de 36 Dragon est négligeable.

35. **Influence du déplacement annuel de la Terre sur les coordonnées équatoriales.**

1° — Prenons pour axes de coordonnées la ligne des équinoxes, l'axe du monde et la droite allant vers le solstice d'été. Le plan de la trajectoire solaire fait maintenant l'angle ω avec le plan yOx; elle passe toujours par l'axe Ox.

Les coordonnées solaires deviennent :

$$x = R\cos\theta, \qquad y = R\sin\theta\cos\omega, \qquad z = R\sin\theta\sin\omega.$$

Les équations (1) sont alors de même forme pour les trois coordonnées :

$$d(\rho\sin D) = R\sin\theta\,.\,\sin\omega - \beta\rho\cos\theta\,.\,\sin\omega,$$
$$d(\rho\cos D\,.\,\cos \text{Æ}R) = R\cos\theta + \beta\rho\sin\theta,$$
$$d(\rho\cos D\,.\,\sin \text{Æ}R) = R\sin\theta\,.\,\cos\omega - \beta\rho\cos\omega\,.\,\cos\theta.$$

2° — Calculons d'abord ce qui a trait à l'aberration, c'est-à-dire négligeons les premiers termes des seconds membres. On se trouve devant trois équations du premier degré faciles à résoudre. On trouve :

$$\cos D\,.\,d\text{Æ}R = -\beta(\sin\theta\,.\,\sin \text{Æ}R + \cos\theta\,.\,\cos \text{Æ}R\,.\,\cos\omega),$$
$$dD = \beta\cos\theta(-\cos D\,.\,\sin\omega + \sin D\,.\,\cos\omega\,.\,\sin \text{Æ}R) - \beta\sin\theta\,.\,\sin D\,.\,\cos \text{Æ}R.$$

On retombe sur les formules du paragraphe précédent en faisant $\omega = 0$, et en remplaçant Æ par L, D par l : ce que le lecteur vérifiera.

Pour obtenir les valeurs numériques, on posera $\beta = 20'',47$.

3° — Le calcul de ce qui a trait à la parallaxe, se fait de la même manière. On trouve :

$$\cos D \,.\, d\mathcal{R} = -\alpha(\cos\theta \,.\, \sin\mathcal{R} - \sin\theta \,.\, \cos\mathcal{R} \,.\, \cos\omega),$$
$$dD = \alpha \sin\theta\,(\cos D \,.\, \sin\omega - \sin D \,.\, \cos\omega \,.\, \sin\mathcal{R}) - \alpha\cos\theta \,.\, \sin D \,.\, \cos\mathcal{R}.$$

36. **Aberration diurne.**

Utilisons le procédé de calcul du § 27, 2°. En raison du mouvement diurne, chaque point de la surface terrestre décrit en un jour sidéral un

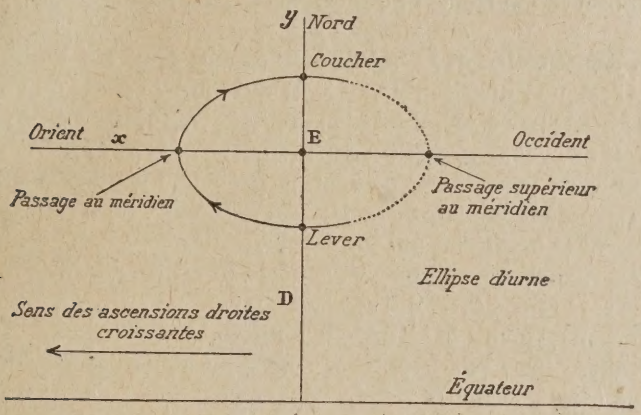


Fig. 36.

cercle *parallèle* à l'équateur; la vitesse linéaire est $465.\cos\lambda$ mètres par seconde; λ est la latitude géographique.

L'étoile semble donc parcourir un cercle parallèle à l'équateur et dont nous voyons la projection sur la sphère céleste.

D'où les variations suivantes des coordonnées *équatoriales* :

$$d\mathcal{R} = \mu \frac{\cos\lambda}{\cos D} \cos\mathcal{H},$$
$$dD = \mu \cos\lambda \,.\, \sin D \,.\, \sin\mathcal{H}.$$

$\mathcal{H}$ est l'angle horaire compté négativement à l'est, positivement à l'ouest.

L'étoile décrit une ellipse diurne d'équation :

$$x = \mu \cos\lambda \,.\, \cos\mathcal{H}, \qquad y = -\mu \cos\lambda \,.\, \sin D \,.\, \sin\mathcal{H}.$$

Pour les étoiles qui se lèvent et qui se couchent, le déplacement en ascension droite est donc pratiquement toujours à l'est, d'une quantité qui, nulle 6^h sidérales avant le passage au méridien, est maxima lors de ce passage, et s'annule de nouveau 6^h après le passage au méridien.

La déclinaison est trop petite avant le passage au méridien, correcte lors de ce passage, trop grande après le passage.

Quand les étoiles ne se couchent pas, la portion de l'ellipse à l'ouest de la position moyenne devient théoriquement observable.

La constante μ de l'aberration diurne est à la constante de l'aberration annuelle 20″,47 comme la vitesse d'un point de l'équateur en raison du mouvement diurne (465 mètres) est à la vitesse moyenne du centre de gravité de la Terre (29,77 kilomètres) :

$$\mu = 20'',47 \frac{465}{29\,770} = 0'',32.$$

C'est une quantité très petite, inférieure aux erreurs d'expériences sur une observation isolée et qui disparaît dans les moyennes.

36 *bis*. **Les Étoiles et le Soleil sont-ils où nous les voyons?**

1° — C'est une question capitale et qui vaut la peine qu'on insiste. Elle a été posée par d'Alembert et clairement traitée par Arago ; au reste elle n'avait pas échappé aux Anciens (Montucla, I, p. 142).

Pour préciser le problème comparons les deux hypothèses suivantes :

a) la Terre dont le centre d'inertie est immobile, ne tourne pas ; c'est le firmament et les étoiles qui tournent autour d'elle.

b) la Terre dont nous supposons encore le centre d'inertie immobile, tourne ; c'est le firmament qui est fixe.

Considérons d'abord la seconde hypothèse.

Les étoiles, fixes par hypothèse, envoient dans l'espace des ondes lumineuses.

Vu la distance des étoiles, ces ondes sont planes là où se trouve la Terre ; autrement dit, les rayons sont parallèles.

Dire qu'une étoile passe dans le méridien (ou dans l'horizon), c'est dire que dans sa rotation, le méridien (ou l'horizon) rencontre le rayon : donc quand l'étoile *passe dans le méridien* (*ou dans l'horizon*), *elle s'y trouve effectivement*.

Passons à la première hypothèse.

Les étoiles tournent autour de la Terre fixe. Les rayons qu'elles envoient sont courbes : quand l'étoile *passe dans le méridien*, elle est en réalité dans un plan défini par un angle horaire d'autant plus grand que sa distance à la Terre est plus grande. En définitive l'hypothèse d'une Terre absolument immobile et d'un firmament mobile, jointe à l'hypothèse d'une vitesse finie pour la lumière, conduit à cette conclusion que nous voyons les étoiles dans des positions très éloignées de leurs positions réelles. Elles peuvent en différer d'un très grand nombre de circonférences. Inversement deux étoiles inégalement éloignées et occupant dans le ciel des positions très différentes, peuvent paraître en contact. Nous pouvons restituer au centre d'inertie de la Terre son mouvement sans rien changer aux conclusions, vu la petitesse de ce mouvement par rapport à la distance des étoiles.

Arago considère avec raison que c'est là une des meilleures preuves de la rotation de la Terre et de la fixité du firmament. En effet il est bien difficile de ne pas admettre que dans leurs mouvements autour de

leur position moyenne, les étoiles n'ont pas des déplacements de l'ordre de la distance de la Terre au Soleil, distance que la lumière met 498^s à parcourir.

Si la Terre était fixe et le firmament mobile, il résulterait de là des changements apparents énormes dans les positions relatives des étoiles. Ce qui n'est pas.

2° — Passons au Soleil,

S'il est fixe, le raisonnement précédent s'applique : à l'aberration près ci-dessus étudiée et qui dépend du mouvement de la Terre, nous voyons le Soleil où il se trouve en réalité.

Mais (§ 62) nous avons lieu d'admettre que tout le système solaire

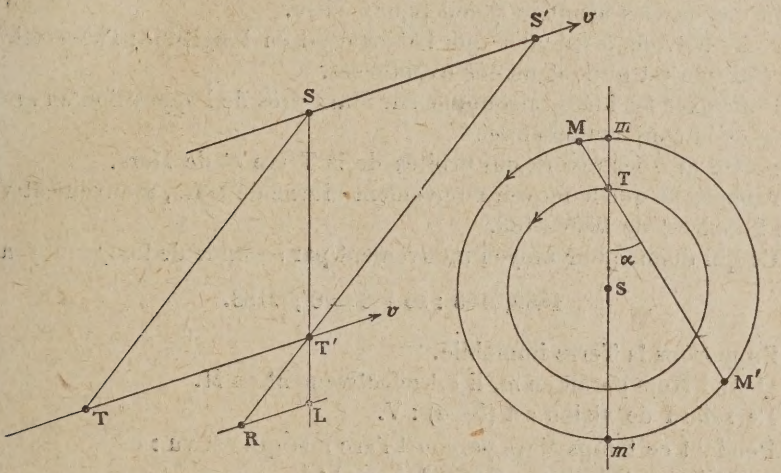


Fig. 37.

subit une translation d'ensemble. Il est facile de montrer qu'elle n'intervient pas sur les positions apparentes des astres qui constituent ce système. Autrement dit, supposons la Terre et le Soleil toujours animés de vitesses égales et parallèles : nous voyons le Soleil dans la même direction que si le mouvement commun n'existait pas.

En effet assimilons la lumière à la propagation rectiligne de petits projectiles de vitesse V.

Soit v la vitesse commune du Soleil S et de la Terre T.

A l'origine des temps, le Soleil S émet un projectile qui arrive sur la Terre T′ au temps t, dans la direction ST′.

A ce moment le Soleil est en S′; on a $\overline{SS'} = vt$.

Mais le projectile entré par le centre optique de la lunette, prend par rapport à cette lunette une trajectoire relative T′R qu'on obtient en composant la longueur $\overline{T'L}$ proportionnelle à V, à la longueur $\overline{LR}$ proportionnelle à v. Il est évident que la droite RT′, *dans la direction de laquelle il faut mettre l'axe optique de la lunette pour recevoir le pro-*

jectile sur le réticule, est précisément la direction actuelle T'S' *actuelle* du Soleil. C. Q. F. D.

36 *ter*. **Aberration des planètes.**

1° — Nous ne voyons pas les planètes dans la direction qu'elles occupent réellement à cause du mouvement de la Terre (*aberration*), et à cause du mouvement propre des planètes. D'après le § précédent, nous n'avons pas à tenir compte du mouvement d'ensemble de translation du système solaire, s'il existe.

Évaluons l'*aberration totale* des planètes. Pour simplifier supposons qu'elles se déplacent toutes dans le même plan et que leurs trajectoires sont des cercles ayant le Soleil pour centre.

Nous n'avons à calculer que l'aberration en longitude; l'aberration en latitude est nulle dans nos hypothèses.

Pour fixer les idées raisonnons sur Mars près de l'opposition en m et près de la conjonction en m'.

Soit a et b les rayons des orbites de la Terre et de Mars.

Admettons que le moyen mouvement diurne de Mars, mouvement vu du Soleil est de 1886″,5183.

Ce qui donne pour moyen mouvement par seconde de temps moyen :

$$1886{,}5183 : 86\,400 = 0'',02183.$$

Supposons la Terre immobile.

Quand Mars paraît en m, il est effectivement en M.

Le retard de vision est $(b-a) : V$.

Pendant ce temps Mars parcourt l'arc $\overline{m\mathrm{M}}$ qui est vu :

du Soleil sous l'angle : $0{,}02183\,(b-a) : V$,

de la Terre sous l'angle :

$$\alpha = 0{,}02183\,\frac{b-a}{V}\,\frac{b}{b-a} = 0{,}02183\,\frac{b}{V}.$$

Nous pouvons écrire :

$$\alpha = 0{,}02183\,\frac{a}{V}\,\frac{b}{a} = 0{,}02183 \times 498 \times 1{,}52 = 16'',52.$$

L'erreur en longitude géocentrique est la même et égale à 16″,52 pour l'opposition et pour la conjonction. En effet l'arc parcouru pendant le retard de vision est plus grand dans le second cas; mais il est vu de plus loin : il y a compensation.

2° — A l'aberration qui provient du mouvement de la Planète, il faut ajouter celle qui provient du mouvement de la Terre.

Or si la Terre et Mars avaient des vitesses linéaires égales et parallèles, l'aberration serait nulle (§ 36 *bis*, *2°*). Voyons ce qu'il en est.

Les moyens mouvements diurnes par rapport au Soleil sont :

3548″ pour la Terre, 1887″ pour Mars.

Les rayons sont comme 1 et 1,52.

Donc les moyennes vitesses linéaires sont comme :

3 548 pour la Terre, 2868 pour Mars.

L'aberration due au mouvement de la Terre est de 20″,47.

Donc au voisinage de l'opposition (distance de l'astre au Soleil 180° environ), Mars réel est en retard sur Mars apparent de :

$$20{,}47 - 16{,}52 = 3{,}95 \text{ secondes d'arc.}$$

Au voisinage de la conjonction les vitesses des deux astres sont

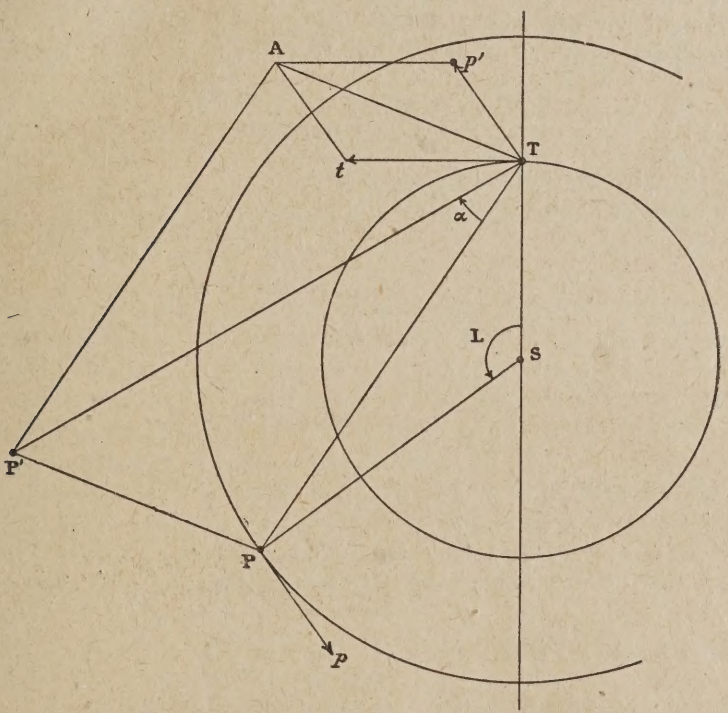


Fig. 38.

opposées, les aberrations s'ajoutent; Mars réel est en avance sur Mars apparent de :

$$20{,}47 + 16{,}52 = 36{,}99 \text{ secondes d'arc,}$$

ou en retard de

$$-20{,}47 - 16{,}52 = -36{,}99 \text{ secondes d'arc.}$$

3° — D'une manière générale, soit T la Terre et t sa vitesse actuelle; soit P la planète et p sa vitesse actuelle.

Annulons le mouvement de la planète en donnant au système une vitesse p' égale et contraire. La Terre est maintenant censée se mouvoir

avec la vitesse $\overline{TA}$. Prenons le vecteur $\overline{TA}$ de longueur telle que $\overline{TA}$ soit le chemin parcouru pendant que la lumière vient de P en T.

Par la planète, menons $\overline{PP'}$ égal et parallèle à $\overline{TA}$; quand la planète réelle est en P, nous la voyons dans la direction P'.

L'aberration est l'angle α.

Comme première approximation, on obtient un terme périodique en cosL. Par exemple, pour Mars on a sensiblement :

$$\alpha = -16{,}52 + 20{,}47.\cos L.$$

Pour Saturne le moyen mouvement diurne est $120'',4547$; le moyen mouvement par seconde de temps moyen est $0^s,001395$.

La distance moyenne est 9,555. La constante de la formule est donc :

$$0{,}001395 \times 498 \times 9{,}555 = 6^s,64.$$

D'où :
$$\alpha = -6^s,64 + 20{,}47.\cos L.$$

α varie entre 13,83 et $-27{,}11$ secondes.

Les mêmes calculs s'appliquent aux planètes inférieures.

CHAPITRE III

OBSERVATIONS MÉRIDIENNES[1]

37. Description de la lunette méridienne.

1° — L'instrument fondamental des observations astronomiques est la *lunette méridienne* : elle fournit directement les coordonnées équatoriales célestes : l'*ascension droite* et la *déclinaison*. Sans entrer dans un détail qui fatiguerait le lecteur, je dois insister sur l'établissement et le réglage de cet instrument.

La figure 39 le représente schématiquement. C'est une lutte astronomique ordinaire d'objectif A, d'oculaire B, montée sur un axe de manière à diminuer les flexions. Pour cela quatre troncs de cône creux en fonte sont boulonnés sur une caisse centrale de fonte : deux portent les pièces optiques A et B; les deux autres sont terminés par les tourillons T qui reposent dans les coussinets D.

L'axe géométrique de rotation doit être rendu parfaitement horizontal et orienté normalement au méridien. Pour cela les diamètres des tourillons sont tournés aussi rigoureusement égaux que possible; les coussinets sont déplaçables dans un plan horizontal et réglables en hauteur.

Généralement les piliers P porteurs des coussinets sont en maçonnerie; parfois on les construit en fonte.

2° — Coaxialement à l'axe de rotation sont montés deux cercles C de 80^{cm} à 1^{m} de diamètre. L'un d'eux est divisé (de 5′ en 5′ par exemple); l'autre sert à caler l'appareil dans un azimut connu et à lui imposer de petits mouvements angulaires à l'aide de vis de rappel appropriées.

On lit sur le cercle divisé au moyen de six microscopes (par exemple) portés par des cercles parallèles et coaxiaux, fixés aux coussinets. A la rigueur on pourrait n'utiliser qu'un seul microscope; mais plusieurs

1. Dans une collection d'ouvrages telle que celle que je publie, il serait absurde de se répéter. Je renvoie donc le lecteur au volume intitulé *Construction, description et emploi des instruments de mesure et d'observation*, où il trouvera tous les renseignements utiles sur les appareils que je ne décris pas ici. Pour l'*Optique géométrique*, je le renvoie aux volumes qui portent ce titre, principalement au premier. La photographie est étudiée dans le volume intitulé *Vision et reproduction des formes et des couleurs*.

microscopes permettent d'étudier la graduation. Le même dispositif (non représenté) est répété des deux côtés de l'appareil. C'est qu'en effet l'axe de la lunette doit pouvoir être retourné bout pour bout; le retour-

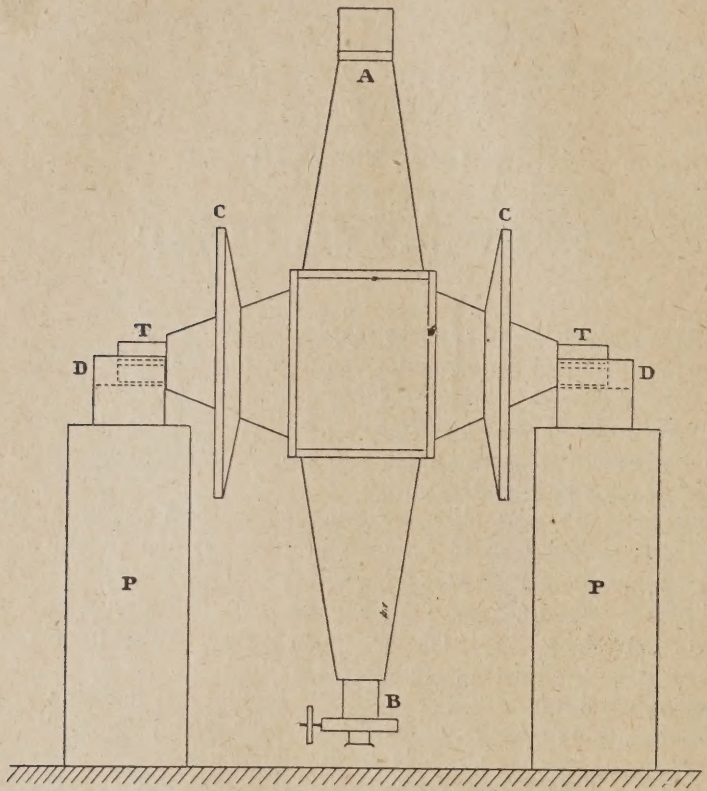


Fig. 39.

nement amène le cercle gradué en face de l'un ou de l'autre groupe de microscopes.

3° — Retournement.

Pour retourner l'appareil, on amène au-dessous un chariot qui porte deux béquilles. On les élève au moyen d'une espèce de double cric; on soulève ainsi l'axe de la lunette au-dessus des coussinets. On retire le chariot, on le retourne de 180°, on le ramène entre les coussinets et on laisse lentement retomber l'instrument. L'axe est ainsi retourné bout pour bout.

Cette opération très simple en théorie, est difficile et dangereuse pour l'instrument.

38. **Réglage et emploi de la lunette méridienne.**

L'axe optique de la lunette est la droite qui va du second point nodal

de l'objectif à un repère *arbitrairement* placé dans le plan focal principal. La lunette est réglée quand, dans la rotation sur ses coussinets, l'axe optique décrit un plan, et quand ce plan est le méridien du lieu d'observation.

1° — Quand l'axe optique décrit un plan, on dit que l'*erreur de collimation* c est nulle. Si cette erreur n'est pas nulle, l'axe optique n'est pas normal à l'axe géométrique de rotation : dans la rotation de la lunette sur ses coussinets, il décrit un cône dont l'angle au sommet est, par définition, $180° - 2c$. *La définition matérielle de l'axe optique d'une lunette étant arbitraire*, il suffit de le choisir tel que c soit nul; autrement dit, le réglage en collimation de la lunette revient à déterminer quels sont les points du plan focal dont la collimation est nulle (qui sont dans le plan normal à l'axe horizontal de rotation) : leur lieu est une droite normale à l'axe de rotation (*fil sans collimation*).

2° — Ce premier réglage effectué, il s'agit de régler l'axe de rotation normalement au méridien du lieu, c'est-à-dire dans le plan horizontal et suivant la ligne est-ouest.

L'erreur d'*inclinaison* β est l'angle que l'axe de rotation fait avec le plan horizontal; l'erreur d'*azimut* α est l'angle que sa projection sur le plan horizontal fait avec la direction est-ouest; c'est encore, si l'on veut, l'angle que fait le plan vertical passent par l'axe de rotation de la lunette avec le *premier vertical* (§ 12).

3° — Supposons la lunette réglée : dans la rotation autour des coussinets, l'axe optique balaie le plan méridien; en particulier, il est possible de l'amener parallèlement à l'axe du monde.

Prenons cet azimut comme origine des angles.

Inclinons la lunette de manière qu'une étoile E passe sur la trace de l'axe optique dans le plan focal principal. La *distance polaire* δ de cet astre est immédiatement connue par la lecture du cercle gradué; le complément D de δ est la *déclinaison* de l'astre.

Prenons l'heure de passage de cette étoile E comme origine des temps *sidéraux*. Déterminons l'heure sidérale H de passage de l'étoile E'. De la définition des *ascensions droites* et de l'uniformité de la rotation de la Terre résulte la formule (§ 12) :

$$H = \text{Æ}' - \text{Æ}.$$

L'horloge est réglée en temps sidéral par la condition qu'elle batte 86 400 fois entre deux passages consécutifs de l'étoile E (supposée équatoriale) dans le méridien.

Avec la lunette méridienne nous déterminons donc les déclinaisons des étoiles et la différence de leurs ascensions droites.

Autrement dit, la lunette méridienne su. . pour mettre en place les étoiles sur la sphère céleste.

Reprenons les divers points de ce résumé.

39. **Formules de correction.**

La figure 40, représente en Z le zénith, en P le pôle, en A la position correcte de la trace de l'axe de rotation, en A′ la position vraie.

L'étoile est observée en *e*, alors qu'elle devrait l'être en E.

Les erreurs en azimut α, en inclinaison β, et en collimation *c* (l'arc A′*e*,

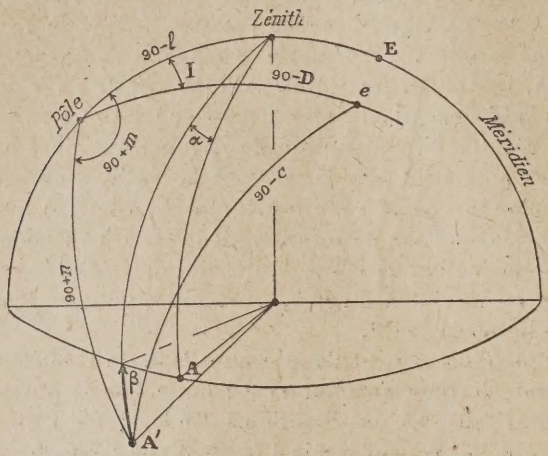


Fig. 40.

au lieu d'être 90°, n'est que 90° — *c*), représentées par la figure 40, entraînent toutes trois un retard sur le temps de passage.

L'arc PZ est le complément de la latitude *l*.

Dans le triangle PZA′ on a (formules I et III, § 356) :

$$\sin n = \sin\beta \,.\, \sin l - \cos\beta \,.\, \sin\alpha \,.\, \cos l,$$
$$\cos n \,.\, \sin m = \sin\beta \,.\, \cos l + \cos\beta \,.\, \sin\alpha \,.\, \sin l.$$

A cause de la petitesse des angles α, β, *n* :

$$n = \beta \sin l - \alpha \cos l, \qquad (1)$$
$$m = \beta \cos l + \alpha \sin l. \qquad (2)$$

Dans le triangle PeA′ on a (formule I du § 354) :

$$\sin c = -\sin n \,.\, \sin D + \cos n \,.\, \cos D \,.\, \sin(I - m).$$

A cause de la petitesse des angles, on trouve la formule de Bessel :

$$I = m + n \operatorname{tg} D + \frac{c}{\cos D}. \qquad (3)$$

Connaissant α et β, ainsi que la latitude au moins approchée, les formules (1) et (2) donnent *m* et *n*; la formule (3) fournit la correction en ascension droite.

On a proposé plusieurs formules équivalentes. Par exemple on a :

$$m = \beta \cos l + \alpha \sin l = \frac{\beta (1 - \sin^2 l) + \alpha \sin l \,.\, \cos l}{\cos l}$$

$$m = \frac{\beta}{\cos l} - \operatorname{tg} l \,(\beta \sin l - \alpha \cos l) = \frac{\beta}{\cos l} - n \operatorname{tg} l.$$

D'où la formule de Hansen :

$$I = \frac{\beta}{\cos l} + n(\operatorname{tg} D - \operatorname{tg} l) + \frac{c}{\cos D}.$$

40. Réglage horizontal de l'axe de rotation.

Pour amener l'axe de rotation de la lunette dans un plan horizontal,

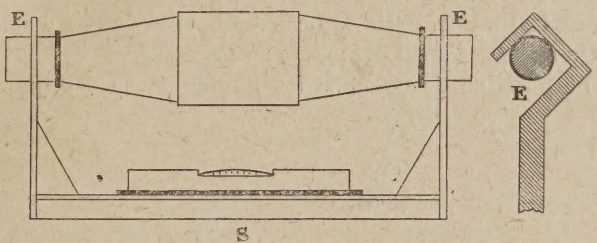


Fig. 41.

on utilise un niveau à bulle fixé sur un fer à T, lui-même porté par des étriers E permettant de le suspendre aux tourillons de la lunette. On trouvera au chapitre VII de notre *Construction, description,...* tout ce

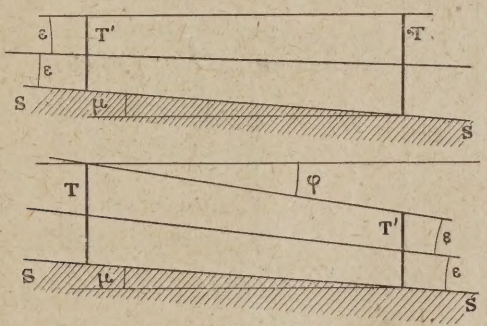


Fig. 42.

qui se rapporte à la construction et au réglage des niveaux. Dans les niveaux des astronomes la division vaut généralement 2″.

Quand les tourillons ont exactement le même diamètre, on est assuré de l'horizontalité de leur axe géométrique si, le niveau étant placé sur les tourillons et la bulle ramenée entre ses repères, elle y reste après le retournement de 180° du niveau qui est bien entendu fixe sur son

support S. Peu importe que les crochets de suspension soient identiques ou non. Mais cette réussite ne prouve l'horizontalité de l'axe des tourillons que s'ils ont même diamètre. Pour le vérifier, on recommence l'opération après retournement de la lunette elle-même sur ses coussinets. Si la bulle, réglée dans la première opération, reste entre ses repères, les tourillons sont identiques. Sinon le déplacement de la bulle permet de calculer l'inclinaison β. La figure 42 montre schématiquement les tourillons en T et T′ reposant sur les coussinets dont la ligne SS fait avec l'horizon l'angle μ. Par hypothèse dans la première opération la ligne qui passe par le sommet des tourillons est horizontale : d'où la condition :

$$\mu = 2\varepsilon.$$

Retournons la lunette, cette ligne s'incline d'un angle φ que mesure le niveau. On a : $\mu + 2\varepsilon = \varphi$, $\varphi = 2\mu = 4\varepsilon$.

Il est donc possible de calculer les angles $\beta = \mu \mp \varepsilon$ que fait avec

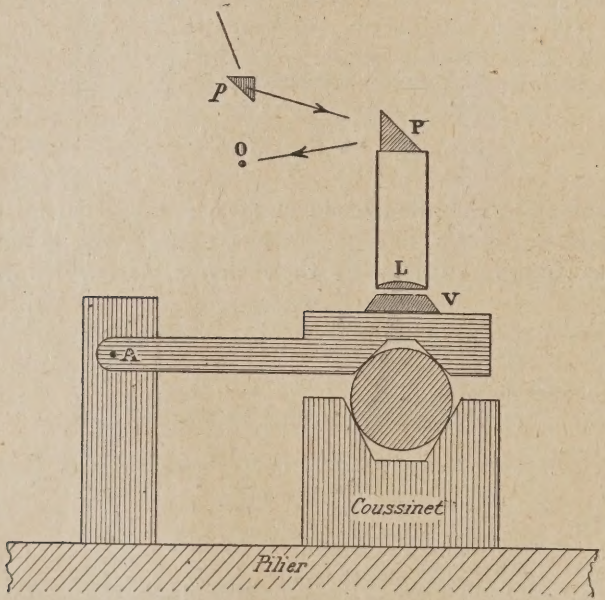


Fig. 43.

l'horizon l'axe géométrique de rotation de la lunette avant et après le retournement.

L'industrie fournit aujourd'hui des cylindres tournés au centième de millimètre. Une seconde d'angle à un mètre correspond à un arc d'un peu moins de 5 microns, soit un demi-centième de millimètre. C'est dire avec quelle précision *insuffisante* la condition d'identité des tourillons peut être réalisée. Mais il suffit de pouvoir déterminer la correction.

A la condition du moins que les tourillons soient circulaires. Pour le vérifier, on utilise la méthode de Fizeau et l'appareil de Desains dont la figure 43 montre un schéma. On produit des franges d'interférence entre le morceau de verre noir V et la face frontale de la lentille plan convexe L; le verre V est porté par un coussinet renversé qui tourne autour de A. L'axe est un cylindre circulaire si les franges ne se déplacent pas quand on fait tourner la lunette. Pour la théorie de l'expérience, le lecteur se reportera au volume *Interférences et Diffraction.*

41. Réglage de l'axe optique.

1° — L'axe optique d'une lunette est la droite passant par le second point nodal de l'objectif et par un point matériel *arbitraire*, fixé d'une manière rigide dans le plan focal de cet objectif; dans l'espèce, ce point est la croisée des fils d'un réticule.

Il s'agit d'amener l'axe optique à être normal à l'axe de rotation. Le constructeur s'efforce de réaliser la normalité entre l'axe géométrique du double cône AB et l'axe des tourillons; nous pouvons donc supposer les axes optique et de rotation *approximativement* rectangulaires quand la croisée des fils du réticule est dans l'axe géométrique du cylindre B. La réalisation rigoureuse de la normalité doit être possible par un déplacement très petit de la croisée des fils du réticule à partir de la position précédente. Pour l'obtenir nous pouvons employer deux méthodes.

Avant de les appliquer nous devons faire en sorte que les fils réticulaires fondamentaux soient normaux l'un sur l'autre, que leur plan coïncide avec le plan focal de l'objectif, enfin que l'un deux soit horizontal. La première condition est réalisée par la division exacte de la lunette qui supporte les fils du réticule; la seconde est une mise au point ordinaire sur un objet éloigné; enfin la troisième consiste à prendre pour cet objet une droite rendue horizontale par des niveaux et à faire coïncider son image avec le fil horizontal du réticule.

2° — MÉTHODE DE RETOURNEMENT.

Soit un point éloigné M dont pour une inclinaison convenable de la

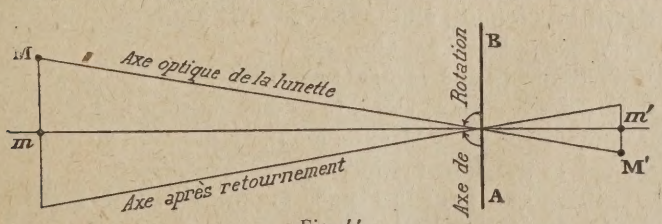


Fig. 44.

lunette l'image coïncide avec la croisée des fils du réticule, ce qu'il est toujours facile d'obtenir. Retournons l'axe AB bout pour bout; en inclinant convenablement la lunette, on amène encore la coïncidence si l'axe optique est normal à l'axe de rotation.

Si la coïncidence n'est plus possible, *partageons la différence* : ramenons la coïncidence par un déplacement du réticule de la moitié de l'écart, et par un déplacement de M en *m* du point M visé, déplacement tel que son image se déplace de l'autre moitié de l'écart.

Retournons alors l'axe AB bout pour bout : nous vérifierons que la coïncidence reste possible, sinon exactement, au moins d'une manière très approchée. Recommençons l'opération (partage de la différence) jusqu'à ce que la coïncidence reste rigoureusement possible après retournement de l'axe : quand il en est ainsi, l'axe optique est normal à l'axe de révolution.

Nous verrons plus loin quelles mires il est commode d'employer.

42. Bain de mercure ou bain nadiral.

Le second procédé pour rendre l'axe optique normal à l'axe de rotation, sert aussi à déterminer sur le cercle divisé l'azimut de la verticale ou l'origine *pratique* des angles. Il consiste dans l'emploi d'un horizon artificiel qui est ici un bain de mercure.

Si nous parvenons à rendre l'axe optique vertical, il sera normal à l'axe de rotation qui par hypothèse est horizontal (§ 37). Pour cela, supposons les fils du réticule illuminés par un procédé quelconque (*autocollimation, Description des appareils*, § 239 *bis*). Regardons avec la lunette par réflexion sur un miroir *horizontal*; l'axe optique est vertical si l'image du réticule coïncide avec le réticule lui-même : condition facile à réaliser par un déplacement de ce réticule (en particulier par un déplacement parallèle au fil qui doit rester horizontal pour une inclinaison quelconque de la lunette).

La condition réalisée, nous lisons sur le cercle la division correspondante : c'est l'origine *pratique* des angles.

43. Réglage dans le méridien.

1° — Nous sommes donc en possession d'une lunette dont l'axe optique décrit un *vertical*; elle tourne en effet autour d'une horizontale à laquelle son axe optique est normal.

Il s'agit d'obtenir que ce vertical soit le méridien.

Pour bien comprendre la suite, le lecteur placera la figure 45 à peu de distance au-dessus de sa tête, de manière que le point P se projette à peu près sur le pôle (au voisinage de l'étoile polaire).

Il se rappellera que pour la France le pôle est dirigé naturellement vers le nord, à 45° environ du zénith.

Il placera le point marqué zénith du côté de son zénith.

Sachant que les étoiles se meuvent dans le même sens que le Soleil, il vérifiera qu'effectivement le petit cercle qu'une étoile *circumpolaire* décrit autour du pôle, est parcouru dans le sens des flèches.

Le méridien ZSPI coupe ce petit cercle en deux parties *égales*; tout

autre vertical le coupe en deux parties *inégales* : cela tient à ce que le méridien est en même temps un vertical et un cercle horaire.

Une étoile circumpolaire coupe le méridien d'abord en S en allant de l'est à l'ouest (passage dit *supérieur*, la figure montre pourquoi), puis en T en allant de l'ouest à l'est (passage dit *inférieur*).

Voici maintenant grâce à quelle circonstance on règle la lunette dans le méridien. *Si le vertical de la lunette est le méridien, les temps qui s'écoulent entre trois passages consécutifs sont égaux.*

Ils sont évidemment inégaux si le vertical de la lunette est quelconque.

On déplacera donc l'axe de la lunette dans un plan horizontal jusqu'à ce que la condition susdite soit réalisée.

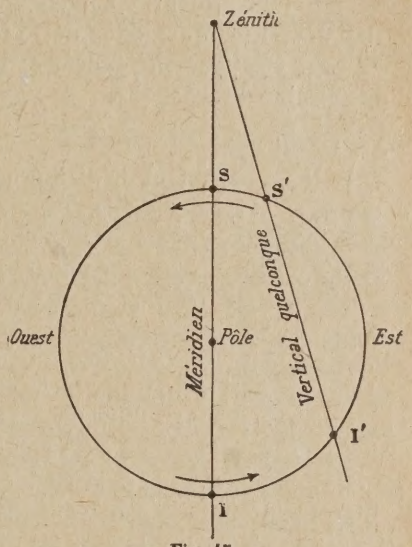


Fig. 45.

2° — MÉTHODE DES HAUTEURS ÉGALES.

Si pour une raison quelconque on ne peut observer les étoiles circumpolaires, on doit utiliser un second instrument analogue au théodolite, permettant de déterminer les temps t_1 et t_2 de passage d'une étoile *à la même hauteur*, avant et après le passage du méridien. Le temps de passage au méridien est $(t_1 + t_2) : 2$. On règle la lunette méridienne en azimut de manière que l'étoile passe au fil sans collimation précisément à l'heure ci-dessus trouvée. Il est nécessaire d'avoir une horloge parfaitement réglée en temps sidéral; mais ce réglage n'exige qu'une lunette de direction invariable (§ 3).

3° — EMPLOI DE MIRES.

La mise en place de la lunette exige toujours l'opération précédente, longue et difficile. Il y a donc grand intérêt à retrouver rapidement le méridien déterminé une fois pour toutes. On se sert pour cela de mires fixes placées à une distance suffisante de la lunette. Je les étudie aux §§ 216 et suivants de ma *Construction, description...*. Le lecteur imaginera à une grande distance de la lunette un signal placé une fois pour toutes dans le méridien. Pour ramener l'axe de la lunette dans le méridien après un déplacement pour une cause quelconque, il suffit d'orienter l'axe de rotation de manière que l'image de la mire se fasse sur le fil sans collimation; le bain de mercure donne la seconde direction nécessaire pour déterminer le méridien. La mire est utilisée du reste pour déterminer la position du fil sans collimation par retournement de la lunette.

En définitive le réglage *ordinaire* de la lunette consiste à viser la mire avant et après retournement sur les coussinets : on annule ainsi autant que possible l'erreur de collimation et l'erreur azimutale.

Une visée par autocollimation sur le bain de mercure sert à annuler l'erreur d'inclinaison.

Ce réglage est à répéter très souvent. C'est une erreur naturelle mais grossière d'imaginer le sol comme invariable. Nous étudierons des variations périodiques dans notre Cours de *Géographie mathématique*; elles sont relativement énormes; la variation annuelle est de l'ordre d'une dizaine de secondes.

44. Flexions.

1° — Il est important de distinguer la *flexion mécanique* de l'appareil de sa *flexion astronomique*. Tandis qu'on ne peut pas annuler la première, on peut annuler la seconde en réalisant certaines conditions de symétrie. Cette circonstance heureuse provient de ce que, les distances des astres étant énormes, il n'y a aucun inconvénient à ce que l'axe optique de la lunette soit *excentré*, à ce qu'il ne passe pas par l'axe géométrique de rotation. Peu importe donc les flexions pourvu qu'elles transforment l'axe optique (droite joignant le second point nodal de l'objectif à un point arbitrairement choisi du plan focal principal) en une droite parallèle, c'est-à-dire pourvu qu'elles déplacent l'objectif et le plan du réticule de longueurs égales et parallèles.

D'où résulte que le constructeur, après avoir choisi la forme la plus rigide, doit s'efforcer de réaliser une parfaite symétrie de forme et de charges entre les bouts de la lunette. Les tubes doivent être tournés intérieurement et extérieurement; la matière bien homogène sera de préférence l'acier; outre sa rigidité, il présente l'avantage que, son coefficient de dilatation étant voisin de celui du verre, l'ajustage de l'objectif peut être plus exact : tout déplacement de l'objectif joue en effet le même rôle qu'une flexion.

L'expérience montre qu'il n'est pas impossible de réaliser des lunettes méridiennes dont la flexion *astronomique* soit négligeable.

2° — MESURE DE LA FLEXION ASTRONOMIQUE HORIZONTALE.

Imaginons la pesanteur supprimée et l'axe réglé horizontalement.

Fig. 46.

Rétablissons la pesanteur : s'il y a flexion astronomique, l'axe optique s'incline d'un angle ε dans un certain sens.

Supposons la pesanteur rétablie, mais qu'elle soit dirigée vers le haut : l'axe optique s'incline d'un angle égal en sens contraire; on

obtient exactement le même résultat en faisant l'expérience précédente après avoir tourné la lunette à 180° autour de son axe horizontal.

D'où la méthode suivante.

De part et d'autre de la lunette et à la hauteur de son axe, disposons deux collimateurs C, C', à peu près horizontaux, *que nous pointons l'un sur l'autre*. Visons successivement avec la lunette dans ces collimateurs, *c'est-à-dire suivant la même direction*. L'angle dont il faut tourner la lunette, serait 180° pour une flexion nulle; il est $180 \pm 2\varepsilon$, pour une flexion ε.

3° — APPAREIL DE LŒVY POUR DÉTERMINER LA FLEXION DANS UN AZIMUT QUELCONQUE.

La figure 47 montre schématiquement le dispositif.

Il s'agit de déterminer la flexion d'une poutre VV dont le milieu tourne autour d'un axe fixe.

En R est le réticule du micromètre; en B est un fil; R et B sont inva-

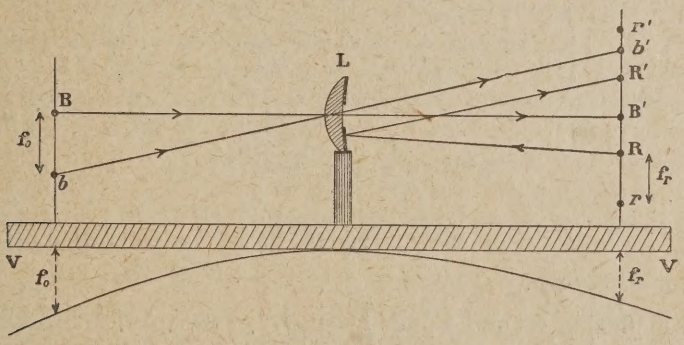


Fig. 47.

riablement liés à la poutre. En L, milieu de la poutre, est une lentille argentée sur une portion de sa face droite; *à supposer nulles les flexions*, elle donne par réfraction l'image B' de B, par réflexion l'image R' de R. Les flexions amènent B en *b*, R en *r*. Posons : $\overline{Bb} = f_0$, $\overline{Rr} = f_r$.

B' était à la distance (non mesurable) $\overline{B'R}$ du réticule; il en est maintenant à la distance mesurable avec un micromètre : $\overline{b'r} = \overline{B'R} + f_0 + f_r$.

La distance (non mesurable) $\overline{RR'}$ du réticule et de son image est devenue la distance mesurable : $\overline{rr'} = \overline{RR'} + 2f_r$.

La flexion astronomique est la différence $f_0 - f$; on la détermine par un retournement qui fournit deux nouvelles équations où les signes des quantités f_0 et f_r sont changés : d'où ces quantités.

4° — FORMULE REPRÉSENTATIVE.

Représentons par z la distance zénithale.

Mesurons-la sur un cercle chiffré de 0 à 360.

L'erreur Δz due à la flexion est évidemment une fonction périodique de la distance z. Indépendamment de toute hypothèse, on a donc :

$$\Delta z = e + f \sin z + g \cos z + k \sin 2z + i \cos 2z.$$

L'expérience et la théorie montrent que les coefficients k et i sont toujours négligeables pour une lunette rationnellement construite.

g nul, signifie que pour la même inclinaison z de la lunette de part et d'autre de la verticale, la flexion est la même; elle donne des erreurs égales et de signes contraires sur le cercle gradué de 0 à 360. La flexion est la même et donne des erreurs de même signe pour z et $180 - z$.

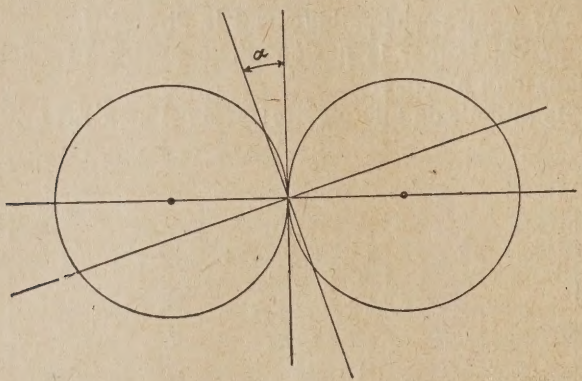


Fig. 48.

Enfin la flexion est nulle pour $z = 0$ et $z = 180$, c'est-à-dire quand la lunette est verticale.

Dans le cas général où les masses ne sont pas symétriquement distribuées autour de l'axe géométrique de la lunette, le coefficient g n'est pas nul. La flexion peut être représentée en coordonnées polaires par deux cercles tangents à la droite d'azimut :

$$\operatorname{tg} \alpha = -g : f.$$

C'est ce que l'appareil de Lœvy permet de vérifier.

Nous venons d'étudier la *flexion dite verticale* ordinaire; elle n'a pas d'effet sur les ascensions droites. Il arrive que le tube en fléchissant se déjette à droite ou à gauche : d'où une *flexion latérale* qui modifie les ascensions droites; à la vérité on ne s'en préoccupe pas.

45. Horloge. Réglage en temps sidéral.

La mesure des ascensions droites se ramenant à une mesure de temps, une horloge *exacte* est nécessaire. L'exactitude consiste non pas à battre 86 400 fois dans un jour sidéral, mais en ce que les battements

sont également espacés dans le temps (*isochrones*). En effet supposons cette condition réalisée : pour déterminer la valeur des battements, on mesure leur nombre entre deux passages d'une même étoile sur le réticule d'une lunette à laquelle on ne demande que d'être immobile; une simple règle de trois donne l'inconnue du problème.

Malheureusement il est compliqué par l'irrégularité de la marche des horloges : les variations de la température, de la pression atmosphérique, de l'état hygrométrique, modifient la longueur du pendule simple équivalent au pendule de l'horloge. On compense au mieux les effets de la température; de plus l'horloge *mère* est mise dans une cave dont la température reste constante. On l'enferme dans une caisse de tôle épaisse hermétiquement close dans l'espoir que la pression et l'état hygrométrique resteront invariables. L'horloge mère commande les horloges de service au moyen de communications électriques.

Disons quelques mots de l'horloge mère de l'Observatoire de Paris. Elle est installée à 27 mètres de profondeur dans une cave dont la température ne varie pas de plus de $0^{o},02$. Elle est renfermée dans une caisse hermétiquement close. *Malgré cela la pression barométrique intervient à peu près comme si la caisse n'existait pas.*

On a trouvé que la *marche diurne* m, c'est-à-dire la quantité dont croît le retard en 24 heures, est liée à la pression atmosphérique p par la relation :

$$m = m_0 + 0^{s},0140\,(p - 753^{mm}).$$

La pendule retarde d'autant plus que la pression est plus grande, mais très régulièrement.

Il est possible d'avoir le temps exactement avec une horloge installée dans un local bien stable et à température bien constante, pourvu qu'on tienne compte de la variation de pression.

Le retard pour un temps t est :

$$\int_0^t m\,dt = M_0 t + k \int_0^t p\,dt.$$

La seconde intégrale s'effectue en quadrant la courbe des pressions barométriques.

La pendule de l'Observatoire est un cas exceptionnel. En général les irrégularités à craindre sont supérieures à $0^{s},1$ par 24 heures. Pour contrôler la marche à l'intérieur d'intervalles *plus courts*, on se sert des étoiles fondamentales (voir § 48); on admet la régularité de l'horloge entre les passages au méridien de deux de ces étoiles. Connaissant la différence de leurs ascensions droites, on peut par de simples règles de trois déterminer les valeurs relatives des ascensions droites des étoiles dont les cercles horaires se trouvent entre les cercles des étoiles fondamentales utilisées. Nous verrons plus loin comment se résout le cercle vicieux que nous venons de poser

46. Valeurs des fils en temps.

Les fils *verticaux* (*ou d'ascension droite*) fixes du réticule (on les appelle verticaux parce qu'ils sont toujours situés dans un *plan vertical*, quelle que soit l'inclinaison de la lunette) sont généralement au nombre de 7, 9 ou 11.

Leur distance est telle que la lunette étant disposée dans l'équateur, le temps que met une étoile à passer de l'un à l'autre, est voisin de 16 secondes de temps. L'angle sous-tendu par deux fils consécutifs vus du second point nodal de l'objectif, est donc voisin de 4 minutes d'arc.

Si l'on observe un astre dont la déclinaison est D, le temps de passage d'un fil à l'autre devient évidemment voisin de (§ 115) :

$$16 : \cos D \text{ secondes.}$$

Dans ces conditions cherchons la distance linéaire des fils pour une lunette de 4 mètres de distance focale.

A un mètre une seconde vaut $4^{\mu},85$; quatre minutes ou 240 secondes font $1^{mm},164$. A 4 mètres cet angle correspond à $4^{mm},656$. Les fils sont distants de près de 5 millimètres. Cette distance correspond à 6 tours environ de la vis micrométrique qui déplace le fil mobile (voir plus loin).

Si l'on détermine le passage d'un astre qui est dans l'équateur à $0^{s},1$ de temps sidéral près, son ascension droite est déterminée à $0^{s},1$ de temps, c'est-à-dire à $1'',5$ d'arc près.

Comme l'observation à l'œil et à l'oreille ne donne que le dixième de seconde, comme les chronographes enregistreurs augmentent à peine la précision, on voit ce qu'il faut penser des centièmes de seconde d'arc dont on nous accable. En fait, les observations isolées conduisent à des nombres qui diffèrent souvent de plusieurs secondes d'arc, comme on s'en convainc en feuilletant les *Annales des Observatoires*.

Le lecteur n'oubliera pas que la seconde d'arc vaut 31 mètres environ à la surface de la Terre.

Les distances relatives des fils sont déterminées à l'aide d'un fil parallèle, fixé sur un chariot mobile, mu par une vis bien régulière; son pas est de l'ordre du millimètre.

Pour mesurer les déclinaisons, on se sert de fils *horizontaux* (*ou de déclinaison*) analogues aux fils verticaux, mais orientés à angle droit dans un plan très voisin. A la rigueur un seul fil horizontal est nécessaire. Pour déterminer les diamètres apparents, au fil horizontal fixe sont adjoints deux fils montés sur des chariots mus par des vis micrométriques.

47. Catalogues d'étoiles.

Les observations méridiennes sont le seul moyen *précis* qu'on ait de connaître les positions relatives des étoiles. Des astronomes attachés aux grands observatoires passent leur vie à ce travail : ils résument

leurs labeurs dans des catalogues qui fixent l'état du Ciel à une certaine époque.

La comparaison des Catalogues qui correspondent à des époques très différentes, fait apparaître les changements survenus dans le Ciel. C'est un avantage de l'Astronomie sur les autres Sciences qu'il suffit d'attendre pour qu'une observation même peu précise acquière une importance considérable : non qu'elle s'améliore en vieillissant; mais le

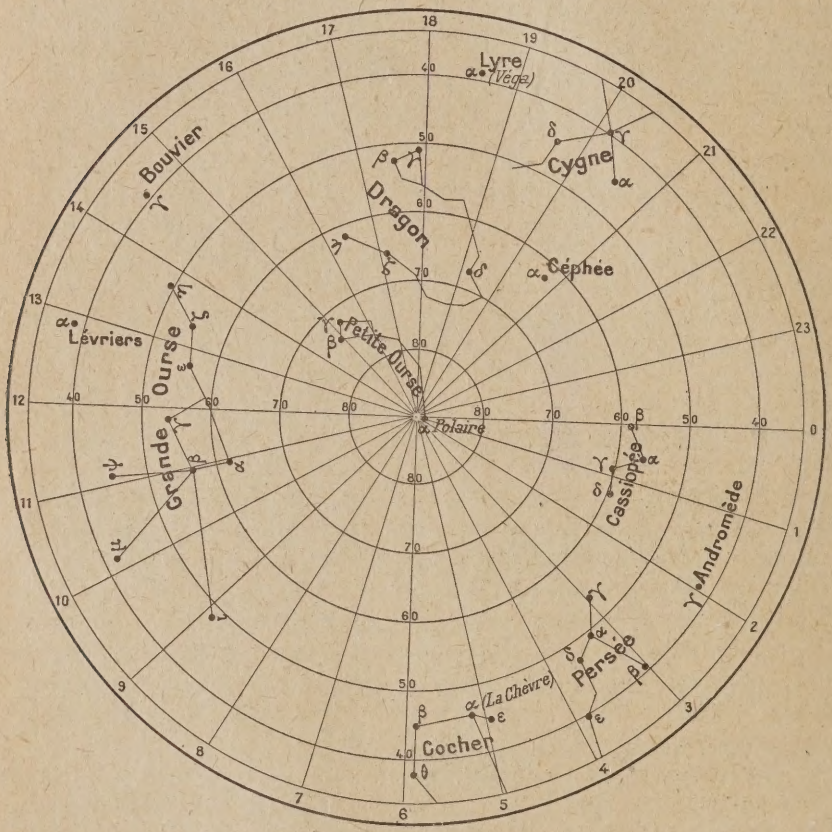
temps, accumulant les petits changements, diminue l'importance de la très haute précision. Une variation de 50″ par an était inappréciable aux instruments des Grecs; mais après 100 ans, le changement survenu était de $5\,000'' = 83' = 1°\,23'$ environ, soit une quantité très appréciable. Il n'y a pas à nous étonner que la précession des équinoxes fût connue d'eux (§ 22).

Les catalogues rendent possible l'étude précise des astres errants (planètes) : la détermination des trajectoires de ces derniers se trouve ramenée à la comparaison de leurs positions avec celle des étoiles.

Je reviens sur ces questions au § 58.

48. Étoiles fondamentales.

1° — Puisque les étoiles servent de repère pour toutes les mesures astronomiques, il est du plus grand intérêt que ces repères soient sûrs. Or il est évidemment impossible d'effectuer les mesures avec le même soin et la même variété pour toutes les étoiles : d'où le choix d'un certain nombre d'entre elles, dites *fondamentales*, sur lesquelles on porte une attention spéciale, dont on détermine un assez grand nombre



de fois les coordonnées pour espérer que les erreurs *accidentelles* s'éliminent dans les moyennes.

Par exemple, la température agit sur l'horloge, sur la réfraction atmosphérique, sur les flexions,... d'une manière qu'on ne corrige qu'imparfaitement. Toutes les erreurs météorologiques sont dans le même cas; elles présentent une périodicité diurne et une périodicité annuelle. Il y a des chances pour qu'en répétant les mesures à toutes les heures du jour et de la nuit, dans toutes les saisons, la moyenne soit corrigée de la plus grosse part de ces erreurs.

Certes il ne faut avoir aucune confiance dans la Théorie des proba-

bilités; une mesure bien faite vaut mieux qu'un million de mesures mal faites : les imbéciles seuls (ils sont légion) soutiennent le contraire.

Mais en admettant que les mesures soient bien faites, il est clair qu'elles présentent plus de garanties quand on les répète *dans des conditions très différentes*, seul moyen de découvrir, par suite de corriger les erreurs systématiques contre lesquelles en tout état de cause la moyenne est impuissante.

Pour fixer les idées, étudions le passage de la même étoile tous les jours de l'année : il aura lieu à des heures de temps moyen qui avanceront de 4 minutes par jour environ. Si donc il existe une erreur qui dépend de l'heure solaire, les observations répétées toute l'année auront des chances de la supprimer. A cet égard il est heureux que les étoiles des premières grandeurs soient visibles le jour comme la nuit.

D'où la nécessité de prendre les *fondamentales* parmi les plus brillantes.

De même pour éviter les petites erreurs qui dépendent de la nutation (§ 20), il est bon d'espacer les observations sur la période de 18 ans 8 mois qui correspond à ce phénomène.

2° — Nous avons vu plus haut qu'il est impossible de compter sur la régularité de l'horloge à $0^s,1$ près pendant une période de 24 heures. Nous nous sommes servis des étoiles fondamentales pour raccourcir l'intervalle dans lequel nous posons que la régularité est suffisante : *ce qui est un cercle vicieux*. On le résout pratiquement en répétant un grand nombre de fois les mesures sur les étoiles fondamentales : on est en droit d'espérer que les erreurs accidentelles sur la mesure du temps s'éliminent par la répétition. De plus, répétant de jour en jour les observations sur une vingtaine d'étoiles également réparties à peu près à la même hauteur, les étoiles revenant passer au méridien *exactement* à 24 heures sidérales d'intervalle, il devient possible de se rendre compte des irrégularités de la marche de l'horloge, pour peu qu'elles soient systématiques.

3° — Étoiles circumpolaires.

Les étoiles circumpolaires ont une grande importance puisqu'elles permettent de déterminer la position du pôle et de régler les lunettes en azimut.

Pour déterminer la position du pôle, la lunette étant réglée comme il est dit au § 39, il suffit *théoriquement* de pointer les distances zénithales d'une étoile circumpolaire lors de ses deux passages au méridien, et de prendre la moyenne. L'opération est moins simple qu'elle ne paraît. D'abord les hauteurs zénithales étant différentes, la réfraction n'intervient pas de la même manière sur les deux mesures. Ensuite et surtout les observations se faisant à 12 heures d'intervalle, l'une est de jour, l'autre de nuit : d'où une très grande différence d'aspect de l'image de l'étoile.

Voici comment on tourne la difficulté. Considérons une série d'étoiles circumpolaires α, β, γ,... μ, passant au méridien les unes après les autres et telles que la dernière μ passe au méridien 12 heures après α. Uniquement par des observations de nuit (qui sont meilleures), on détermine les différences de distances zénithales ou de distances polaires (ce qui revient au même) $\alpha - \beta$, $\beta - \gamma$,...; d'où finalement la différence $\alpha - \mu$. Mais α et μ viennent simultanément dans le méridien : on peut mesurer leur distance $\alpha + \mu$, toujours par une observation de nuit. Connaissant $\alpha - \mu$ et $\alpha + \mu$, on connaît α ou μ, c'est-à-dire la position du pôle.

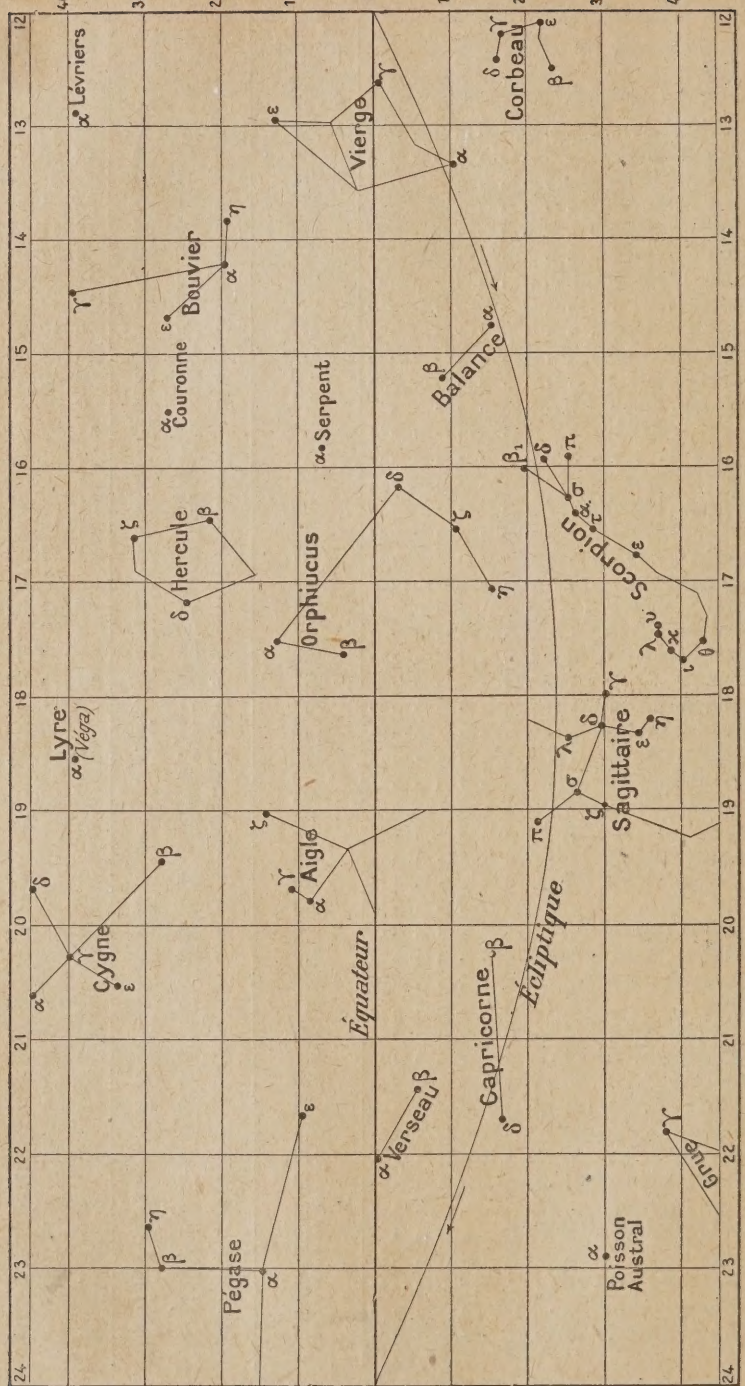
49. Positions moyennes des étoiles fondamentales au 1er janvier 1915.

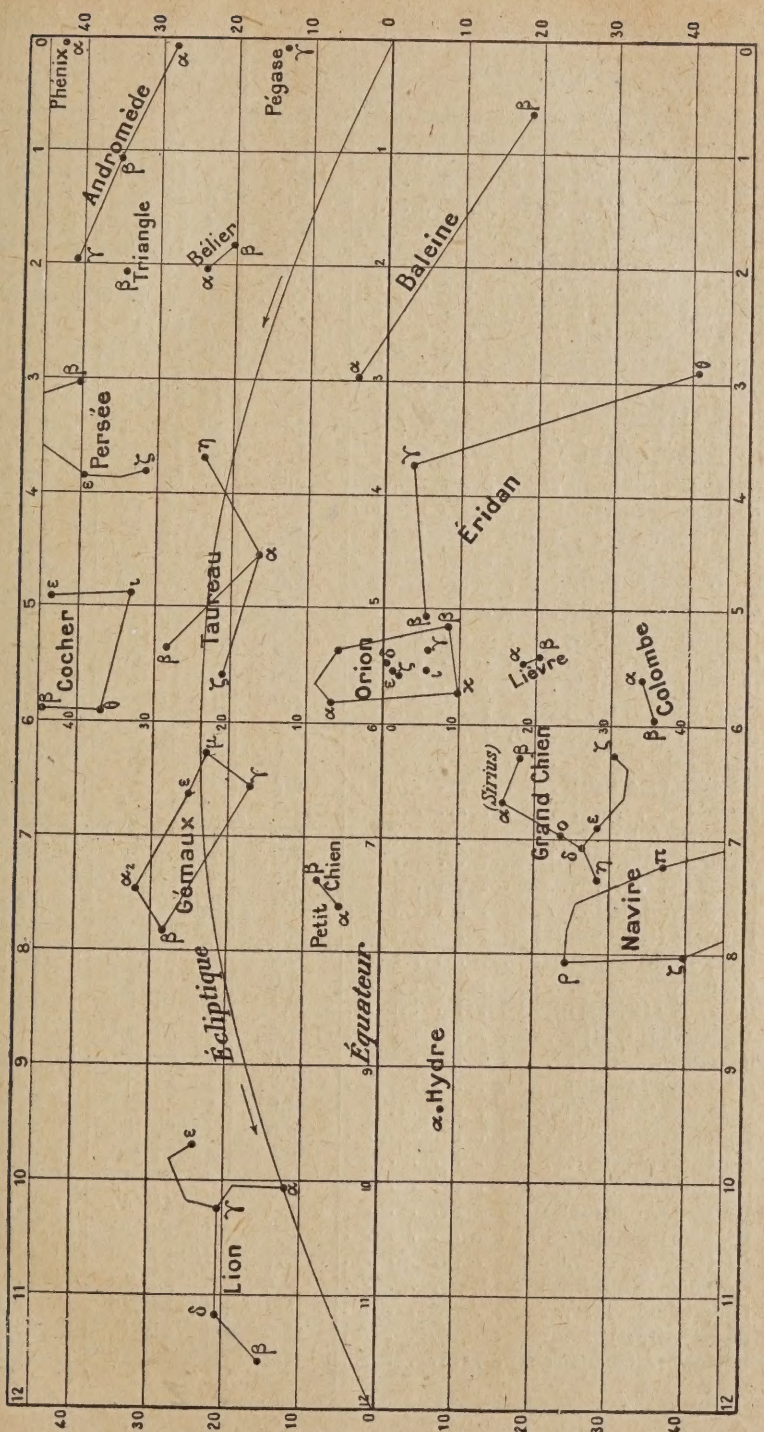
B = boréale, A = australe; [*d*] = double, [*t*] = triple.

Les grandeurs *négatives* signifient que les étoiles sont *plus* que de 1re grandeur. Quand aucune grandeur n'est indiquée, c'est que l'étoile est variable.

NOM	GRANDEUR	ASCENSION DROITE	DÉCLINAISON
α Andromède (Sirrah) [*d*]	2,1	0h 3m 59s	28° 37′ 16″ B
β Cassiopée (Caph)	2,4	0 4 38	58 40 52 B
γ Pégase (Algenib)	2,9	0 8 51	14 42 40 B
β Hydre mâle	2,9	0 21 18	77 43 59 A
α Phénix (Nairalzaurak)	2,4	0 22 5	42 46 3 A
α Cassiopée (Schedir)	2,4	0 35 40	56 4 17 B
β Baleine (Diphda)	2,2	0 39 19	18 27 10 A
γ Cassiopée (Tsih)	2,3	0 51 34	60 15 24 B
β Andromède (Mirach)	2,4	1 4 58	35 10 13 B
δ Cassiopée (Rukbah)	2,8	1 20 15	59 47 39 B
α P. Ourse (Polaire) [*d*]	2,1	1 29 16	88 51 6 B
α Eridan (Achernar)	0,5	1 34 33	57 40 6 A
β Bélier (Sharatan)	2,7	1 49 56	20 23 35 B
α Hydre mâle	3,0	1 56 5	61 59 0 A
γ Andromède (Alamak) [*t*]	2,2	1 58 41	41 55 21 B
α Bélier (Hamal)	2,2	2 2 23	23 3 40 B
β Triangle	3,1	2 4 29	34 35 9 B
θ Eridan (Acamar) [*d*]	3,0	2 55 2	40 38 41 A
α Baleine (Menkar)	2,8	2 57 50	3 45 25 B
γ Persée	3,1	2 58 38	53 10 28 B
β Persée (Algol) [*d*]		3 2 38	40 37 44 B
α Persée (Mirfak)	1,9	3 18 15	49 33 34 B
δ Persée	3,2	3 36 52	47 31 0 B
η Taureau (Alcyone)	3,0	3 42 26	23 50 35 B
γ Hydre mâle	3,1	3 48 32	74 29 59 A
ζ Persée	3,0	3 48 47	31 37 56 B

NOM	GRANDEUR	ASCENSION DROITE	DÉCLINAISON
ε Persée	3,0	3 52 9	39 45 55 B
γ Eridan (Zaurac)	3,3	3 54 4	13 44 59 A
α Taureau (Aldébaran)	1,1	4 31 2	16 20 21 B
ι Cocher (Altawabi)	2,9	4 51 27	33 1 57 B
ε Cocher (Almaaz)	3,2	4 55 52	43 41 55 B
β Eridan (Cursa)	2,9	5 3 40	5 11 44 A
α Cocher (la Chèvre) [*d*]	0,2	5 10 24	45 54 46 B
β Orion (Rigel)	0,3	5 10 27	8 17 56 A
γ Orion (Bellatrix)	1,7	5 20 34	6 16 25 B
β Taureau (El Nath)	1,8	5 20 55	28 32 12 B
β Lièvre (Nihal)	3,0	5 24 36	20 49 35 A
δ Orion (Mintakah) [*d*]	2,5	5 27 40	0 21 40 A
α Lièvre (Arneb)	2,7	5 28 59	17 52 57 A
ι Orion (Fa)	3,0	5 31 16	5 57 54 A
ε Orion (Alnitam)	1,7	5 31 54	1 15 19 A
ζ Taureau (Thien Kouan)	3,0	5 32 34	21 5 30 B
ζ Orion (Alnitak) [*d*]	1,9	5 36 28	1 59 13 A
α Colombe (Phad)	2,7	5 36 34	34 7 8 A
κ Orion (Saïph)	2,2	5 43 43	9 41 56 A
β Colombe (Wezn)	3,1	5 47 58	35 47 59 A
α Orion (Betelgeuse)	0,9	5 50 34	7 23 32 B
β Cocher (Menkalinan) [*d*]	2,1	5 53 18	44 56 24 B
θ Cocher	2,7	5 53 55	37 12 28 B
ζ Gr. Chien (Furud)	3,2	6 17 3	30 1 31 A
μ Gémeaux (Tejat post.)	3,2	6 17 49	22 33 30 B
β Gr. Chien (Murzim)	2,0	6 18 57	17 54 46 A
α Navire (Canopus)	— 1,0	6 22 4	52 38 56 A
γ Gémeaux (Alhena)	1,9	$6^h\ 32^m\ 48^s$	16° 28′ 22″ B
ν Navire	3,2	6 35 10	43 7 15 A
ε Gémeaux (Mebsuta)	3,2	6 38 42	25 12 59 B
α Gr. Chien (Sirius) [*d*]	— 1,4	6 41 24	16 35 56 A
τ Navire	2,8	6 47 50	50 30 48 A
ε Gr. Chien (Adhara)	1,6	6 55 17	28 51 20 A
o_2 Gr. Chien (Thanit aladzari)	3,0	6 59 29	23 42 30 A
δ Gr. Chien (Wesen)	2,0	7 4 56	26 15 27 A
π Navire	2,7	7 14 8	36 56 40 A
η Gr. Chien (Aludra)	2,4	7 20 44	29 8 12 A
β Petit Chien (Gomeiza)	3,1	7 22 33	8 27 41 B
σ Navire	3,0	7 26 32	43 7 44 A
α_2 Gémeaux (Castor) [*d*]	1,6	7 29 11	32 4 34 B
α P. Chien (Procyon) [*d*]	0,5	7 34 51	5 26 36 B
β Gémeaux (Pollux)	1,2	7 40 7	28 13 57 B
ζ Navire (Suhelhadar)	2,3	8 0 36	39 45 48 A
ρ Navire (Tureis)	2,9	8 3 55	24 3 31 A
γ Navire (Alsuhail al Mulhif)	1,9	8 6 55	47 5 9 A
ε Navire	1,7	8 20 46	59 14 8 A
δ Navire (Koo She)	2,0	8 42 21	54 23 48 A
ι Gr. Ourse (Talita)	3,1	8 53 24	48 22 34 B
λ Navire (Alisuhalal Warn)	2,3	9 4 52	43 5 21 A


Lévriers
Lyre
α (Véga)
Cygne
Couronne
Bouvier
Hercule
Serpent
Orphiucus
Vierge
Balance
Corbeau
Scorpion
Aigle
Équateur
Sagittaire
Écliptique
Capricorne
Verseau
Pégase
Poisson Austral
Grue


Phénix
Andromède
Triangle
Bélier
Pégase
Persée
Baleine
Cocher
Taureau
Éridan
Orion
Lièvre
Colombe
Gémaux
Grand Chien
(Sirius)
Petit Chien
Écliptique
Équateur
Navire
Hydre
Lion

NOM	GRANDEUR	ASCENSION DROITE	DÉCLINAISON
β Navire (Miaplacidus)	1,7	9h 12m 16s	69° 22′ 1″ A
ι Navire (Scutulum)	2,2	9 14 49	58 55 5 A
κ Navire (Markeb)	2,6	9 19 29	54 38 51 A
α Hydre (Alphard)	2,2	9 23 25	8 17 22 A
ε Lion	3,1	9 41 2	24 9 58 B
υ Navire [d]	3,0	9 44 59	64 40 39 A
α Lion (Régulus)	1,3	10 3 51	12 22 59 B
γ Lion (Algiéba) [d]	2,3	10 15 17	20 16 19 B
μ Gr. Ourse (Tania austr.)	3,2	10 17 16	41 55 39 B
θ Navire	3,0	10 39 55	63 56 58 A
η Navire (Tseen She)		10 41 46	59 14 15 A
μ Navire	2,8	10 43 7	48 58 16 A
β Gr. Ourse (Mérak)	2,4	10 56 43	56 50 18 B
α Gr. Ourse (Dubhe)	2,0	10 58 30	62 12 37 B
ψ Gr. Ourse (Ta Tsun)	3,2	11 4 53	44 57 36 B
δ Lion (Zosma)	2,6	11 9 35	20 59 22 B
β Lion (Denebola)	2,2	11 44 44	15 2 50 B
γ Gr. Ourse (Phacd)	2,5	11 49 22	54 10 3 B
δ Centaure (Ma Wei)	2,8	12 3 57	50 14 57 A
ε Corbeau (Tchin)	3,2	12 5 45	22 8 50 A
δ Croix	3,1	12 10 38	58 16 35 A
γ Corbeau (Giena)	2,7	12 11 26	17 4 12 A
α_1 Croix (Acrux) [d]	1,0	12 21 52	62 37 41 A
δ Corbeau (Algorab)	3,1	12 25 28	16 2 32 A
γ Croix [d]	1,6	12 26 26	56 38 14 A
β Corbeau (Tso Hea)	3,0	12 29 55	22 55 36 A
α Mouche	2,9	12 32 6	68 40 2 A
γ Centaure [d]	2,4	12 36 49	48 29 35 A
γ Vierge (Porrima) [d]	3,0	12 37 21	0 58 0 A
β Croix	1,5	12 42 45	59 13 28 A
ε Gr. Ourse (Alioth)	1,8	12 50 18	56 25 16 B
α Lévriers (Cor Caroli) [d]	2,8	12 52 3	38 46 38 B
ε Vierge (Vindemiatrix)	3,0	12 57 57	11 24 57 B
ι Centaure	3,0	13 15 49	36 15 51 A
ζ_1 Gr. Ourse (Mizar) [d]	2,1	13 20 30	55 22 8 B
α Vierge (l'Épi) [d]	1,2	13 20 43	10 43 4 A
ε Centaure	2,6	13 34 30	53 2 5 A
η Gr. Ourse (Alkaïd)	1,9	13 44 12	49 44 14 B
ζ Centaure (Alnaïr) [d]	2,8	13 50 14	46 52 14 A
η Bouvier (Muphrid)	2,8	13 50 38	18 49 24 B
β Centaure (Agena)	0,8	13 57 49	59 57 49 A
θ Centaure	2,1	14 1 40	35 57 8 A
α Bouvier (Arcturus)	0,3	14 11 47	19 37 28 B
γ Bouvier (Seginus)	3,0	14 28 39	38 40 47 B
η Centaure	2,7	14 30 6	41 47 6 A
α Centaure (Rigil kentarus) [d]	0,2	14 33 49	60 29 7 A
α Loup (Men)	2,5	14 36 16	47 1 27 A
ε Bouvier (Izar)	2,6	14 41 16	27 25 55 B
α Balance (Kiffa australis)	2,9	14 46 10	15 41 21 A

NOM	GRANDEUR	ASCENSION DROITE	DÉCLINAISON
β Petite Ourse (Kochab)	2,2	14 50 56	74 30 10 B
β Loup (Ke Kouan)	2,7	14 52 57	42 47 33 A
γ Triangle austral	3,0	15 10 57	68 22 0 A
β Balance (Kiffa borealis)	2,8	15 12 26	9 4 12 A
γ_2 Petite Ourse (Pherkad major)	3,1	15 20 51	72 8 11 B
γ Loup [*d*]	3,0	15 29 28	40 52 55 A
α Couronne (Margarita)	2,3	15 31 5	27 0 0 B
α Serpent (Unukalhai)	2,8	15 40 5	6 41 32 B
β Triangle austral	3,1	15 47 38	63 10 10 A
π Scorpion [*d*]	3,1	15 53 42	25 52 13 A
δ Scorpion (Iclarkrau)	2,5	15 55 18	22 22 50 A
β_1 Scorpion (Acrab) [*d*]	2,7	16 0 29	19 34 25 A
δ Ophiuchus (Yed prior)	3,0	16 9 53	3 28 34 A
σ Scorpion (Precordia)	3,1	16 16 1	25 23 23 A
η Dragon (Shang Tsae)	2,9	16 22 50	61 42 23 B
α Scorpion (Antarès)	1,3	16 24 12	26 14 39 A
β Hercule (Korneforos) [*d*]	2,8	16 26 34	21 40 26 B
τ Scorpion (Alnyat)	2,9	16 30 35	28 2 26 A
ζ Ophiuchus (Han)	2,7	16 32 29	10 23 45 A
ζ Hercule [*d*]	3,0	16 38 5	31 45 22 B
α Triangle austral	1,9	16 39 39	68 52 24 A
ε Scorpion (Wei)	2,3	16 44 39	34 8 24 A
ζ Autel	3,0	16 51 35	55 51 26 A
η Ophiuchus (Alsabik)	2,6	17 5 30	15 37 14 A
ζ Dragon	3,2	17 8 32	65 49 9 B
δ Hercule	3,2	17 11 32	24 56 19 B
β Autel	2,7	17 18 14	55 27 2 A
υ Scorpion (Lesath)	2,8	17h 24m 59s	37° 13′ 45″ A
α Autel (Choo)	2,9	17 25 16	49 48 36 A
λ Scorpion (Schaula) [*d*]	1,8	17 27 50	37 2 34 A
β Dragon (Rastaban)	3,0	17 28 31	52 21 50 B
α Ophiuchus (Rasalhague)	2,1	17 30 59	12 37 16 B
θ Scorpion (Sargas)	2,0	17 31 12	42 56 41 A
κ Scorpion (Girtab)	2,6	17 36 36	38 59 13 A
β Ophiuchus (Cebalrai)	2,9	17 39 16	4 36 7 B
ι_1 Scorpion	3,1	17 41 38	40 5 43 A
γ Dragon (Eltanin)	2,4	17 54 38	51 29 54 B
γ Sagittaire (Alnasl)	3,0	18 0 21	30 25 34 A
η Sagittaire (Rabah el Waridah)	3,1	18 11 53	36 47 17 A
δ Sagittaire (Kaus média)	2,8	18 15 33	29 51 55 A
ε Sagittaire (Kaus austr.)	1,9	18 18 32	34 25 33 A
λ Sagittaire (Kaus bor.)	2,9	18 22 44	25 28 11 A
α Lyre (Véga)	0,1	18 34 4	38 42 14 B
σ Sagittaire (Nunki)	2,1	18 50 0	26 24 12 A
ζ Sagittaire (Axilla) [*d*]	2,7	18 57 12	30 0 10 A
ζ Aigle	3,0	19 1 30	13 44 11 B
π Sagittaire (Albaldah)	3,0	19 4 43	21 9 35 A
δ Dragon (Nodus secundus)	3,2	19 12 32	67 30 43 B
β Cygne (Albireo) [*d*]	3,1	19 27 18	27 46 50 B

NOM	GRANDEUR	ASCENSION DROITE	DÉCLINAISON
γ Aigle (Tarazed)	2,8	19 42 13	10 24 19 B
δ Cygne [*d*]	3,0	19 42 19	44 55 22 B
α Aigle (Altaïr)	0,9	19 46 38	8 38 35 B
β Capricorne (Dabih) [*d*]	3,2	20 16 14	15 3 2 A
α Paon	2,0	20 18 56	57 0 31 A
γ Cygne (Sadr)	2,3	20 19 11	39 59 3 B
α Indien	3,2	20 31 36	47 35 20 A
α Cygne (Deneb)	1,3	20 38 32	44 58 34 B
ε Cygne (Gienah)	2,6	20 42 46	33 39 5 B
α Céphée (Alderamin)	2,6	21 16 33	62 13 31 B
β Verseau (Sadalsund)	3,3	21 27 5	5 56 45 A
ε Pégase (Enif)	2,5	21 40 1	9 29 5 B
δ Capricorne (Deneb algedi)	3,0	21 42 21	16 30 49 A
γ Grue (Al dhanab)	3,2	21 48 47	37 45 55 A
α Verseau (Sadalmelik)	3,2	22 1 25	0 43 59 A
α Grue (Almaïr)	1,9	22 2 53	47 22 24 A
α Toucan	2,9	22 12 41	60 41 1 A
β Grue	2,1	22 37 36	47 19 46 A
η Pégase (Matar) [*d*]	3,1	22 39 1	29 46 35 B
α Poiss. austr. (Fomalhaut)	1,3	22 52 57	30 4 23 A
β Pégase (Scheat)	2,7	22 59 39	27 37 17 B
α Pégase (Markab)	2,6	23 0 32	14 44 52 B

Dans les figures 49 et 50 je donne à deux échelles différentes un coin du Ciel. Le lecteur vérifiera que les coordonnées des étoiles d'Orion

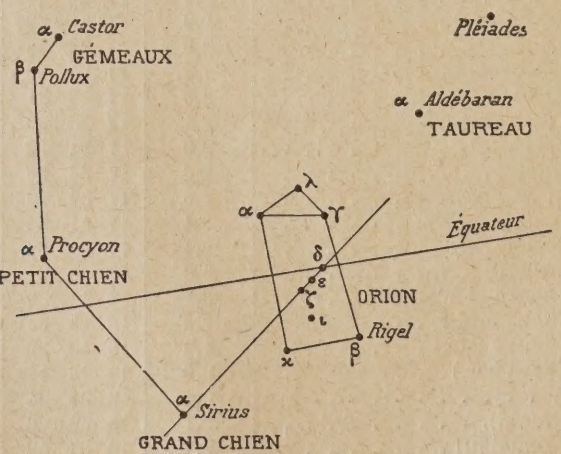


Fig. 49.

sont bien celles de la table. Pour l'ensemble des étoiles fondamentales, il se reportera aux quatre planches des pages 87, 88, 92 et 93.

50. Lunette parallactique.

La *lunette parallactique* réalise les coordonnées équatoriales. Elle est montée sur un axe parallèle à l'axe du monde. Quand elle tourne

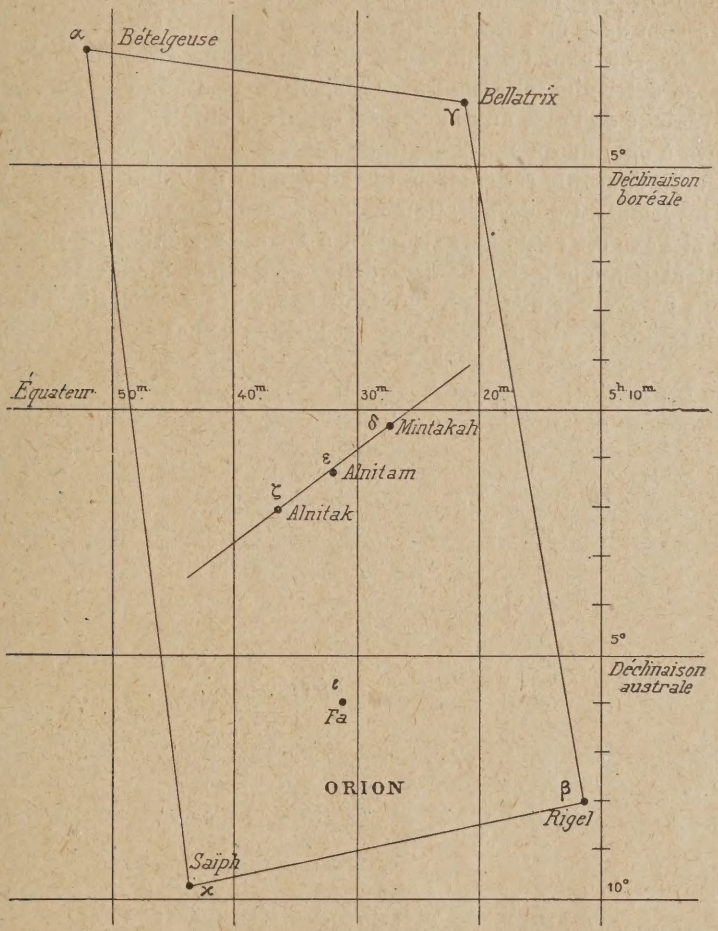


Fig. 50.

autour de cet axe, son axe optique engendre un cône ayant l'axe du monde pour axe de révolution ; il décrit un parallèle de déclinaison. La lunette permet donc de suivre commodément le mouvement diurne des astres. Si avec un mouvement d'horlogerie, on lui impose un mouvement angulaire uniforme d'un tour par jour sidéral, l'image d'une étoile reste constamment sur la croisée de deux fils du réticule (à la réfraction près, voir § 28 *bis*).

J'étudie tout au long la construction des lunettes parallactiques et

des lunettes équatoriales coudées dans ma *Description, construction,... des instruments de mesure et d'observation*; j'y renvoie le lecteur.

La lunette parallactique sert à observer les différences d'ascension droite ou de déclinaison hors du méridien. Les fils *verticaux* de la lunette sont dans un cercle horaire, quel que soit l'azimut de la lunette autour de son axe. La différence de déclinaison, *pourvu qu'elle soit petite*, se détermine aisément avec les fils horizontaux du micromètre.

Le réglage de l'axe, autour duquel tourne la lunette, consiste *théoriquement* à obtenir qu'une étoile puisse être amenée constamment sur la croisée de deux fils réticulaires quand l'angle de la lunette et de l'axe reste invariable. Ce n'est pratiquement pas exact en raison de la réfraction; si l'axe est réglé parallèlement à l'axe du monde, l'étoile ne se maintient pas à la même hauteur dans le champ de la lunette.

Nous trouverons des applications de la lunette parallactique dans la photographie du ciel (§ 58) et dans l'étude des taches solaires (§ 152).

CHAPITRE IV

CLASSIFICATION ET DISTRIBUTION DES ÉTOILES

51. Définition et mesure des grandeurs stellaires.

Tout le monde sait que les étoiles apparaissent successivement au coucher du Soleil. Quelques-unes peuvent être vues avant ce coucher; pour les plus faibles, il faut attendre que le crépuscule soit à sa fin. D'autre part, il suffit de jeter un coup d'œil sur la voûte céleste pour reconnaître les différences énormes d'éclat qu'offrent les étoiles.

Il s'agit de classer numériquement les étoiles d'après leurs éclats.

Dès Hipparque les étoiles ont été groupées par estime *en grandeurs*. Les plus brillantes sont dans les premières grandeurs, les moins brillantes sont de grandeurs élevées. On a même dû introduire des grandeurs négatives pour les étoiles extraordinairement brillantes.

Cherchons à quoi d'objectif correspond ce classement à l'œil nu (classement subjectif).

Bien qu'on ne puisse mesurer la sensation, il est naturel de penser qu'elle croît de la même quantité quand on passe de la grandeur $m+1$ à la grandeur m. Or la loi de Fechner (voir *Vision*, ...) a pour énoncé :

$$S = a \log E + b;$$

la sensation croît proportionnellement au logarithme de l'excitation qui est ici proportionnelle à la quantité de lumière envoyée (à l'intensité de la source lumineuse, à ce qu'on appelle *l'éclat* de l'étoile).

Admettons cette loi (nous verrons comment on a précisé le coefficient numérique de la formule); nous posons donc :

$$\log E_m = 0{,}4(1-m) = -0{,}4(m-1); \qquad (1)$$

les logarithmes sont vulgaires. Une étoile de première grandeur a donc par convention l'éclat unité; une étoile de la deuxième a un éclat 2,514 fois plus petit, et ainsi de suite. La formule (1) donne en effet :

$$E_m = (0{,}398)^{(m-1)} = (1 : 2{,}514)^{(m-1)}.$$

Par exemple, l'éclat des étoiles de 11e grandeur est environ 6,25 fois plus petit que celui des étoiles de 9e grandeur.

Les coefficients ne sont déterminés qu'à une précision telle qu'on pose aussi bien :

$$E_m = (0,4)^{(m-1)} = (1 : 2,5)^{(m-1)}, \qquad \log E_m = 0,398(1 - m).$$

52. Résultat des observations à l'œil nu. Méthode des séries. Revenons sur la notion de grandeur.

Herschel dit à ce sujet des choses très justes. Sur une foule de corps lumineux qui diffèrent probablement entre eux par leurs éclats et par leurs distances, l'un doit nécessairement paraître le plus brillant, un autre un peu moins, ... et ainsi de suite. Un ordre de succession, relatif à la situation de la Terre par rapport aux étoiles, doit nécessairement exister. Nous devons pouvoir classer les étoiles en une série linéaire, par ordre d'éclats apparents décroissants.

Cette série constituée, il est indifférent *a priori* que nous mettions les lignes de démarcation ici ou là; c'est pure convention si nous la divisons en *grandeurs*.

De fait Herschel et son fils se sont efforcés de comparer les étoiles entre elles, et non plus à une sorte d'étalon par nature indéterminé. Au lieu de donner une grandeur à chaque étoile, ils la situent dans une série. Par exemple, pour exprimer l'éclat de D, ils disent CDE, exprimant que, quel que soit l'éclat absolu de D, cette étoile est moins brillante que C, plus brillante que E. Telle est la *méthode des séries*.

Observant par une belle nuit et inscrivant un certain nombre d'étoiles par ordre d'éclat décroissant, ils cherchent à intercaler entre ces étoiles d'autres étoiles : d'où une série.

Une fois obtenue, rien n'empêche de la découper en *grandeurs*.

Évidemment cette méthode réduit au minimum l'arbitraire de la classification des étoiles à l'œil nu. Au reste Herschel reconnaît lui-même l'intérêt de préciser la série linéaire qualitative par des mesures quantitatives, ce qui ne doit évidemment pas modifier l'ordre des étoiles si la série a été construite sans erreur. Du temps d'Herschel fils les astronomes n'avaient pu s'entendre sur le principe d'une photométrie stellaire; ils soupçonnaient seulement que d'une grandeur à l'autre devait exister un rapport constant pour la lumière totale envoyée : ils le fixaient au voisinage de 2.

Herschel fils dit que la lumière de Sirius est environ 324 fois celle d'une étoile de 6e grandeur. Posons Sirius de 1re grandeur; la cinquième puissance de 2,514 est 100,4. On voit combien son estimation est éloignée de ce qu'on admet aujourd'hui.

53. Photométrie visuelle.

1° — La définition des grandeurs du § 51 correspond à l'emploi comme photomètre d'une lame absorbante A en forme de coin. C'est

un prisme très aigu A de verre fumé doublé d'un prisme transparent B de même angle et de même indice qui compense la déviation et la dispersion du premier. On fait glisser la lame plan parallèle ainsi constituée, devant le point lumineux à photométrer, jusqu'à ce qu'il devienne invisible.

Soit E la quantité de lumière incidente; la quantité de lumière transmise e est :

$$e = \mathrm{E}ka^{-x},$$

k est un coefficient qui tient compte des réflexions aux surfaces de séparation; a mesure le pouvoir absorbant du verre fumé, x son épais-

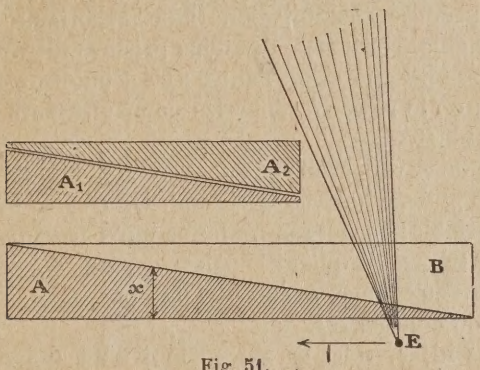


Fig. 51.

seur. Quand l'étoile disparaît, on peut admettre que e a une valeur bien déterminée pour un observateur dans des conditions physiologiques bien déterminées :

$$\log \mathrm{E} - x \log a = \log e - \log k. \qquad (2)$$

Comparons cette formule à la formule (1); il vient :

$$0{,}4m + x \log a = \text{Constante}.$$

Autrement dit, disposons les images d'étoiles des diverses grandeurs, dans l'ordre des grandeurs croissantes, à égale distance les unes des autres, devant le prisme absorbant et suivant sa ligne de plus grande pente. Arrangeons-nous de manière que l'épaisseur du prisme diminue quand la grandeur croît. Pour un prisme donné, il existe une équidistance des images telle qu'elles disparaissent toutes à la fois, quand on fait glisser le prisme devant ce système.

2° — En pratique, on maintient le prisme immobile dans le plan du réticule d'une lunette méridienne, l'arête parallèle aux fils d'ascension droite et tournée vers la droite de l'observateur. On détermine la distance (en temps) de cette arête au fil sans collimation. On attend que par suite du mouvement diurne (il se fait de droite à gauche en raison du

renversement par l'objectif), l'étoile disparaisse. On note le temps t_1 de la disparition. On détermine le temps t_0 du passage à l'un des fils verticaux du réticule. Connaissant la valeur en temps de l'espace dans le plan du réticule, on a ce qu'il faut pour déterminer la position de l'étoile sur le prisme au moment de la disparition.

La grandeur m est liée à la différence $t_1 - t_0$ des temps, par la formule linéaire :

$$m = p - q(t_1 - t_0);$$

p et q sont des constantes qu'on détermine au moyen de deux étoiles dont les grandeurs sont arbitrairement choisies.

3° — On a proposé l'emploi d'une lame absorbante plan parallèle d'épaisseur variable, constituée par deux prismes identiques A_1, A_2, de verre fumé, glissant l'un devant l'autre : c'est un dispositif bien connu des physiciens; on le retrouve dans les compensateurs de Billet, Bravais, Soleil, Babinet.

L'étalonnage de ces appareils se fait avec un photomètre quelconque. Il est beaucoup plus facile avec le second. On éclaire avec une source d'intensité invariable; on détermine le facteur par lequel il faut multiplier l'intensité transmise quand l'épaisseur passe de x_1 à x_2, pratiquement quand les deux lames avancent l'une par rapport à l'autre d'un nombre connu de millimètres.

Pour fixer les idées, voici les dimensions d'un appareil du premier système mais employé autrement que nous l'avons dit : longueur des prismes 15 cm.; largeur $2^{cm},5$; épaisseur sur la partie épaisse 5 mm. Le prisme est en arrière de l'oculaire, entre l'œil et le verre de l'œil; il est mobile dans une coulisse. On le déplace jusqu'à ce que l'image de l'étoile disparaisse. Sa monture porte une graduation.

54. Vision à travers une lunette plus ou moins diaphragmée.

1° — Plaçons-nous d'abord au point de vue purement géométrique. Négligeons les absorptions par l'atmosphère et dans la lunette, ou supposons les invariables.

Posons que pour un œil donné, l'étoile devient invisible quand la quantité totale de lumière reçue tombe au-dessous d'une certaine limite. Nous n'avons pas à parler du diamètre de l'image : il est toujours nul pour l'Optique Géométrique.

Soit O l'ouverture (diamètre utile) de l'objectif.

La quantité de lumière reçue par l'œil est proportionnelle à O^2.

La condition de visibilité limite est :

$$O^2 E_m = k = \text{Constante.} \qquad (1)$$

E_m est la quantité de lumière envoyée par unité de surface par l'étoile de grandeur m (surface terrestre normale aux rayons).

La constante k dépend de la sensibilité de la rétine de l'observateur.

D'où : $2 \log O + \log E_m = \text{Constante.}$

Rapprochons de la formule du § 51. Pour la visibilité limite, on a :

$$m = \alpha \log O + \beta.$$

2° — Les phénomènes de diffraction compliquent les choses. L'image n'est plus un point : le diamètre de la tache lumineuse centrale formant l'image est en raison inverse de l'ouverture. Nous ne pouvons plus

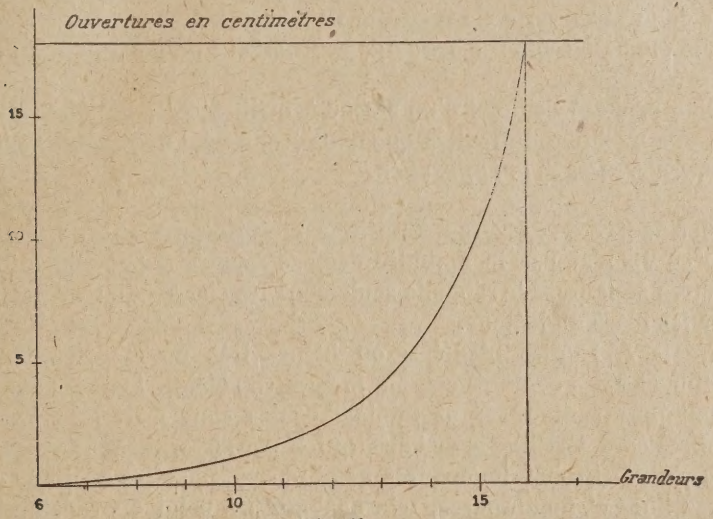


Fig. 52.

admettre que la visibilité ne dépend que de la quantité de lumière reçue, *quelle que soit l'aire sur laquelle elle s'étale.*

Bref la loi (1) n'est plus nécessairement vérifiée.

La loi expérimentale conserve toutefois la même allure.

La figure 52 représente pour un œil moyen, dans des conditions atmosphériques moyennes, la relation qui existe entre la grandeur m de l'étoile et l'ouverture de l'objectif (en centimètres) pour la limite de visibilité. La courbe expérimentale est quasi confondue avec l'axe des grandeurs pour les grandeurs inférieures à la sixième.

C'est à partir de la 7e grandeur que les étoiles sont dites *télescopiques*; elles sont invisibles à l'œil nu. La courbe expérimentale a bien l'allure de la courbe déterminée en admettant que, pour une étoile donnée, l'éclat de l'image est proportionnel au carré de l'ouverture.

3° — On peut déterminer la *grandeur* des étoiles en diminuant dans un rapport connu les quantités de lumières qu'elles envoient dans une lunette, jusqu'à ce qu'elles deviennent invisibles. *A la condition que le*

solide de diffraction reste le même dans tous les cas, on peut admettre que le commencement de l'invisibilité correspond à une quantité de lumière bien déterminée, pour un observateur dans des conditions physiologiques bien déterminées. Le rapport de réduction fournit le rapport des quantités émises.

Il résulte de ce qui précède que ce serait une grossière erreur de modifier les quantités de lumière admises dans la lunette en plaçant devant l'objectif des plaques percées de trous circulaires de diamètre O.

On modifierait ainsi les phénomènes de diffraction, par suite la grandeur de l'image et la loi de distribution de la lumière sur cette image. Il faut donc faire varier la quantité de lumière admise en ne modifiant que le moins possible *le solide de diffraction* : on y parvient au moyen de *grilles*.

On a proposé l'emploi d'un réseau à mailles rectangulaires : mais il présente quelques difficultés que nous étudierons dans notre Cours sur *les Interférences et la Diffraction*.

55. Spectre des étoiles. Photométrie photographique.

1° — Je n'ai pas le moindre désir d'exposer la classification des spectres stellaires. Je rappelle seulement les classes du P. Secchi pour fixer les idées du lecteur.

Classe I. Étoiles blanches ou bleues très nombreuses. Spectres continus à raies sombres comme le spectre solaire. Les raies obscures métalliques sont rares et faibles; seules sont marquées les raies sombres caractéristiques de l'absorption par l'hydrogène.

Classe II. Étoiles jaunes très nombreuses. Spectres continus à raies noires fines et nombreuses, très analogues à celui du Soleil qui fait partie de cette classe.

Classe III. Étoiles rouges ou orangées. Spectres contenant des raies sombres métalliques et des bandes sombres dont l'arête est tournée vers le violet; elles se dégradent insensiblement vers le rouge. Cela signifie qu'il y a discontinuité dans l'éclat du côté violet de la bande et continuité du côté rouge. Ces bandes sont attribuées au manganèse et au titane.

Classe IV. Étoiles de faible éclat rouges rubis. Spectres à bandes sombres dont les arêtes sont tournées vers le rouge; elles sont attribuées au carbone. Ces deux dernières classes sont peu nombreuses.

Les découvertes modernes ont rendu cette classification insuffisante; mais elle suffit pour notre objet. C'est dans l'étude de l'émission que rentre celle de ces spectres.

2° — PHOTOMÉTRIE PHOTOGRAPHIQUE.

Il n'existe aucun rapport nécessaire entre la *grandeur visuelle* et la *grandeur photographique* des étoiles; la proportionnalité exigerait une composition identique des spectres. Il est malheureusement très difficile de déterminer les grandeurs photographiques.

On a relié la grandeur m au diamètre des images photographiées.

Le diamètre δ du cercle noir augmente avec le temps de pose, et pour un temps de pose donné, avec la grandeur de l'étoile. En admettant la proportionnalité entre le diamètre δ et l'éclat E, il existe entre le diamètre et la grandeur une relation de la forme (1) :

$$m = a - b \log \delta.$$

Les paramètres a et b sont quasi constants pour une même lunette, une même plaque, une même soirée, enfin un développement de la plaque dans des conditions déterminées.

On a même proposé des formules contenant le temps t de pose :

$$m = a - b \log \delta + c \log t.$$

On trouvera dans les *Réunions du comité de la Carte du Ciel* de nombreux mémoires sur la question; je me garderai d'insister, tout cela étant un beau gâchis, d'intérêt éducatif et scientifique exactement nul. Quelques astronomes ont été jusqu'à soutenir qu'on peut compenser l'éclat par le temps de pose, de sorte que le diamètre δ serait proportionnel au produit Et : opinion d'une fausseté absolue et quasi évidente. En ces matières les incapables (ils pullulent dans nos Observatoires) trouvent l'occasion de mémoires qui, à défaut d'autres résultats, leur valent des prix à l'Institut quand ils sont apparentés à des bonzes légumineux. Grand bien leur fasse!

56. Changements d'éclat.

La grandeur des étoiles varie d'une manière non périodique ou d'une manière périodique. Je parlerai des variations périodiques à propos des étoiles doubles; je dirai seulement ici quelques mots des variations non périodiques, toutes restrictions faites sur le provisoire de l'appellation.

Il est incontestable que l'éclat des étoiles peut varier brusquement. On cite de nombreux cas d'apparition soudaine d'une étoile; ce qui signifie qu'une étoile antérieurement non observée ou de très faible éclat, acquiert en peu de temps un éclat considérable.

Quelques étoiles après avoir brillé d'un éclat exceptionnel, finissent par devenir invisibles même à travers les plus forts instruments.

Au reste, je ne peux mieux faire que de transcrire ce que dit Lalande à propos d'une des plus fameuses étoiles nouvelles.

« Elle fut remarquée au commencement de novembre 1572, faisant un rhombe parfait avec les étoiles α, β, γ, de Cassiopée (voir la planche de la page 88). Tycho Brahé, qui l'aperçut le 11 novembre, détermina son ascension droite à 0° 26′, sa déclinaison à 61° 47′. Cette étoile parut dès le commencement fort éclatante, comme si elle se fût formée tout à coup avec tout son éclat; elle surpassait Sirius, la plus brillante des étoiles, et même Jupiter lorsqu'il est périgée (le plus voisin

de nous); on l'apercevait même pendant le jour. Dès le mois de décembre 1572, elle commença à diminuer peu à peu, jusqu'au mois de mars 1574 qu'on la perdit de vue. Elle n'avait aucune parallaxe sensible ni aucun mouvement propre apparent; d'où il est aisé de conclure qu'elle était beaucoup plus loin de nous que Saturne, sans quoi elle aurait eu une parallaxe annuelle sensible. Elle n'avait point de chevelure comme les comètes, mais elle brillait comme les étoiles fixes. »

On trouve dans Lalande plusieurs douzaines de descriptions analogues. On y remarquera le soin de préciser l'absence de parallaxe et de mouvement propre.

57. Catalogues.

On appelle *catalogues* les recueils donnant une liste d'étoiles avec leurs coordonnées pour une certaine date.

Le premier catalogue méritant ce titre est celui d'Hipparque (127 ans avant J.-C.). Il renferme 1 080 étoiles déterminées par leurs longitudes et par leurs latitudes. Ptolémée le ramena à l'an 138 après J.-C., en corrigeant les longitudes modifiées par la précession des équinoxes.

Je signale les catalogues de La Caille (9 766 étoiles jusqu'à la 7e grandeur), de Bradley Bessel (3 222 étoiles jusqu'à la 8e grandeur), de Lalande (47 390 étoiles jusqu'à la 10e grandeur).

Dans le dernier siècle, les catalogues se sont multipliés. Argelander a publié un catalogue (*Bonner Sternverzeichniss*) comprenant 457 847 étoiles jusqu'à la 10e grandeur, depuis le pôle nord jusqu'au parallèle de 23° de déclinaison sud.

A côté de ces catalogues généraux, je citerai les catalogues *d'étoiles fondamentales* étudiées avec plus de soin (§ 48) et servant de repères dans le ciel. Un des plus importants est le catalogue d'Auwers pour le ciel boréal; il contient les positions de 539 étoiles rapportées à 1875,0. Un autre catalogue est celui de Newcomb qui contient 1 098 étoiles.

58. Carte du Ciel.

1° — En principe la photographie des étoiles ne présente aucune difficulté; seul offre quelque intérêt le détail des précautions prises et des moyens utilisés.

Les lunettes ont un objectif de 30 cm. d'ouverture environ, et une distance focale voisine de $3^m,50$: nous raisonnerons sur ce nombre.

Deux degrés d'angle à $3^m,50$ font un peu plus de 12 cm.

En utilisant des plaques de 16 cm. de côté, on photographie donc un carré ayant un peu plus de 2° de côté.

Avec des plaques très sensibles, pour aller jusqu'à la 11e grandeur inclusivement, on admet qu'une pose de six minutes est suffisante. Bien que la lunette soit montée parallactiquement, le mécanisme n'est jamais d'une précision telle que l'image d'une étoile ne soit pas déformée si l'on abandonne la lunette à elle-même. Force est donc avec un *cher-*

cheur solidaire de la lunette photographique, de suivre une étoile *guide* et de corriger à chaque instant, par les mouvements de rappel, les imperfections du régulateur et les écarts provenant des ondulations de l'atmosphère. L'expérience prouve que grâce à ces précautions, on obtient des images stellaires quasi punctiformes.

Pour ne pas confondre les images d'étoiles vraiment existantes avec les fausses images provenant des poussières, on fait sur la même plaque trois poses de six minutes chaque, en déplaçant légèrement de l'une à l'autre la lunette par rapport au ciel. On choisit ces déplacements de manière que les images des étoiles vraies soient à peu près aux sommets d'un petit triangle équilatéral. L'expérience montre que les fausses images représentent en moyenne 10 p. 100 du nombre total des images.

2° — Pour que la couche sensible soit plus exactement plane, on l'étend sur des glaces et non sur de simples lames de verres.

La détermination des coordonnées des étoiles sur les plaques est grandement facilitée par l'impression d'un *réseau*. Une glace est recouverte d'une couche opaque d'argent sur laquelle on trace avec une pointe fine et à la machine à diviser, un quadrillage de traits rectangulaires longs de 13 cm., distants de 5 mm. On met la couche d'argent au quasi-contact de la couche sensible non impressionnée, on éclaire le réseau par derrière avec de la lumière à peu près parallèle ; on utilise enfin la plaque à la photographie du ciel. Au développement le réseau apparaît en traits noirs et fournit des repères extrêmement utiles.

Malheureusement la couche d'argent s'altère, se perce de petits trous qui s'impriment sur la plaque et donnent de fausses étoiles.

Le réseau doit être tracé avec la plus grande exactitude puisque la précision du relèvement des étoiles en dépend au premier chef.

La position des étoiles est déterminée par comparaison avec quelques belles étoiles du champ dont on fixe les coordonnées au moyen du cercle méridien. Elles donnent avec exactitude l'orientation des traits du réseau, et l'échelle de réduction des coordonnées rectangulaires des étoiles en ascension droite et en déclinaison.

3° — Le travail est confié à une vingtaine d'observatoires ayant chacun environ 1200 clichés à fournir. Ils sont répartis entre les latitudes 60°B (Helsingfors) et 38°A (Melbourne). Sauf pour les zones extrêmes, le Ciel est divisé en bandes de 6° de déclinaison, soit une largeur de trois clichés ; à la vérité la répartition a varié, peu importe pour nous. Par exemple Toulouse devait au début photographier toutes les étoiles comprises entre les déclinaisons boréales 18° et 12°. Pour couvrir une bande de 6° de large à l'équateur, il faut $3 \times 180 = 540$ clichés comprenant chacun un carré de 2×2 degrés ; mais le nombre croît singulièrement si l'on veut des parties communes suffisantes pour le raccord.

Chaque cliché du Catalogue contient environ 250 étoiles ; le nombre des étoiles des grandeurs qui viennent avec 6 minutes de pose, est de l'ordre de 70 au degré carré.

Chaque observatoire doit mesurer les coordonnées de 2 à 300·000 étoiles.

Les grincheux appellent ce beau travail de l'occupation pour manœuvres inintelligents; évidemment ils ont tort puisque le plus clair du travail des Observatoires français consiste en ce labeur hautement philosophique.

Le nombre de degrés carrés que contient la surface d'une sphère se calcule aisément.

La surface est 4π; le degré vaut $2\pi : 360$; l'aire du carré d'un degré de côté est à peu près $(2\pi : 360)^2$. D'où un nombre de degrés carrés voisin 41·200. A 70 étoiles par degré carré, on trouve 2·885·000 étoiles au total.

Si les clichés n'empiétaient pas nécessairement les uns sur les autres, le nombre de clichés nécessaire serait $41{\cdot}200 : 4 = 10{\cdot}300$.

En réalité il sera près du quadruple.

On compte ainsi cataloguer trois millions d'étoiles. On se propose ensuite de faire une carte du ciel contenant les étoiles jusqu'à la 14e grandeur, avec des poses de 30 minutes à 1 heure. Malgré l'abondance des vierges en quête d'une position sociale, on considère comme impossible de mesurer les coordonnées de toutes ces étoiles : on se contentera donc de reproduire les clichés par l'héliogravure.

Les plaques seront aciérées et leur conservation presque indéfinie sera garantie par le gouvernement.

Ainsi l'homme exagère l'importance de son œuvre jusqu'à la vouloir impérissable, du moment même qu'il catalogue trois millions de mondes!

Là-dessus les savants s'exaltent et, sans souci de coordonner leurs métaphores, ils s'écrient avec Tisserand : « La génération actuelle aura élevé un monument impérissable et préparé à nos successeurs une riche moisson de découvertes. » Allons, tant mieux! En attendant nos manœuvres se couvrent de croix et de costumes chamarrés; pour le cas que je fais des croix et des costumes, cela ne me gêne en rien.

On voit des chamarrures sur les habits d'Auguste, au Cirque!

59. Précision sur les coordonnées déduites des observations photographiques.

Nous avons dit que les lunettes employées ont $3^m,50$ environ de distance focale principale : le degré vaut 6 cm. environ, la minute vaut 1 mm., la seconde vaut 17 microns. Comme on prétend fixer les coordonnées à $0'',2$ près, une précision de 3 microns ou environ est nécessaire dans le dépouillement des clichés. La précision est du reste limitée par la grosseur des grains de l'émulsion.

On peut alors se demander si les objectifs couvrent *sans distorsion* toute la plaque sensible. Le fait qu'on n'utilise qu'une inclinaison de 1° de part et d'autre de l'axe, n'est pas convaincant, en raison de la précision qu'on exige dans l'exactitude de la reproduction. D'autant plus que les objectifs astronomiques ne sont généralement pas étudiés pour donner des images d'aussi grand champ : la Lune et le Soleil qui sont

les astres de plus grands angles apparents, n'ont qu'un demi-degré de diamètre angulaire.

Dès qu'on s'écarte du centre, les images stellaires deviennent nettement elliptiques.

Quelle précision atteint-on dans la mesure des clichés? J'ai feuilleté les documents officiels pour le savoir. J'y trouve des erreurs *probables* à profusion, des erreurs *moyennes* jamais. J'y trouve des secondes d'arcs, mais point de microns. Ces illustres astronomes ne songent pas à nous dire ceci : « Quand elles répètent dix fois la même mesure, nos vierges trouvent des résultats qui diffèrent de tant de microns, qui sont compris entre telles limites. » Certes je suis capable de calculer que pour une distance focale de $3^m,50$, l'angle $0'',2$ correspond à 3 microns : mais cela ne me dit pas quelle précision est réalisée. J'aurais pu le demander à nos illustres astronomes; à supposer qu'ils eussent compris le sens de ma question, ce qui est douteux, ils m'auraient systématiquement mis dedans pour ne pas débiner le truc dont ils vivent. Que leur importe du reste? C'est l'éternel bluff! Il faut que chaque employée relève tous les jours un lot d'étoiles; bien ou mal, qui jamais s'en inquiétera? Nos directeurs d'Observatoires français sont-ils fichus de faire une mesure proprement et de contrôler le travail de leurs subordonnés? Ne craignez rien : personne ne se plaindra; ils savent que je les connais trop bien!

Je lis qu'à Oxford l'erreur probable d'une mesure sur une seule image est environ $\pm 0'',21$, et qu'avec deux pointés l'erreur probable s'abaisse à $0'',15$. Comme Oxford est un grand nom, je n'ose pas dire que cette phrase est absurde : pour courageux qu'on soit, le courage a des limites. Je vous conseille de parcourir la *Réunion de la Carte* pour 1896 : si vous n'êtes pas malade d'esprit, vous vous tordrez. Pourtant on y découvre un éclair de bon sens : Cornu soutient timidement l'impossibilité d'accroître indéfiniment la précision du résultat par l'augmentation du nombre des mesures *avec un instrument de valeur quelconque*. Un bon point à Cornu qui pose enfin le problème et énonce, en style modéré, que la théorie des probabilités est une fichaise quand on l'applique à tort et à travers, ce que font nos illustres astronomes.

60. **Réduction des clichés photographiques.**

1° — Soit E une étoile occupant sensiblement le centre du cliché.

On en connaît par hypothèse les coordonnées Æ, D.

En E_1 est une étoile dont les coordonnées sont :

$$\text{Æ}' = \text{Æ} + \Delta\text{Æ}, \qquad D' = D + \Delta D.$$

Elle est définie par rapport E au moyen de l'angle de position p et de la distance s comptée sur l'arc de grand cercle EE_1.

Son image sur le cliché *idéal* se fait en E'_1.

Le cliché *idéal* est dans le plan tangent à la sphère au point E.

Traçons dessus deux axes rectangulaires : l'axe Y est tangent au méridien, l'axe X est tangent au parallèle céleste.

Les coordonnées rectangulaires de E'_1 sont :

$$X = \operatorname{tg} s \,.\, \sin p, \qquad Y = \operatorname{tg} s \,.\, \cos p.$$

Dans le triangle sphérique PEE_1 on a :

$$\begin{aligned} \sin s \,.\, \sin p &= \sin \Delta R \,.\, \cos D', \\ \sin s \,.\, \cos p &= \cos D \,.\, \sin D' - \sin D \,.\, \cos D' \,.\, \cos \Delta R, \\ \cos s &= \sin D \,.\, \sin D' + \cos D \,.\, \cos D' \,.\, \cos \Delta R. \end{aligned}$$

Des transformations simples donnent :

$$\operatorname{tg} \Delta R = \frac{X}{\cos D - Y \sin D}, \qquad \operatorname{tg} D' = \frac{\sin D + Y \cos D}{X} \sin \Delta R.$$

D'où aisément $\operatorname{tg}(D' - D) = \operatorname{tg} \Delta D$.

Je n'insiste pas sur l'obtention des développements en série qui fournissent X et Y en fonction de ΔD et de ΔR, ou inversement.

Les voici : le lecteur s'amusera à les retrouver, ce qui n'est pas difficile.

$$\Delta R = \frac{X}{\cos \delta - Y \sin \delta} - \frac{1}{3}\left(\frac{X}{\cos \delta - Y \sin \delta}\right)^3 + \ldots$$

$$\Delta D = Y - \frac{1}{4}\overline{\Delta R^2} \sin 2D - \frac{1}{2} Y \overline{\Delta R^2} \cos 2D - \frac{Y^3}{3} + \ldots$$

$$X = \left(\Delta R + \frac{1}{3}\overline{\Delta R^3} + \ldots\right)(\cos D - Y \sin D$$

$$Y = \Delta D + \frac{1}{4}\overline{\Delta R^2} \sin 2D + \frac{1}{2} \Delta D \,.\, \overline{\Delta R^2} \cos 2D + \frac{1}{3}\overline{\Delta D^3} + \ldots$$

X et Y sont des angles; ce sont les quotients des longueurs prises sur le cliché idéal par le rayon TE de la sphère. La lunette ayant $3^m,50$ de distance focale et le cliché 16 cm. de côté, le maximum des quantités X et Y est $8 : 350 = 0{,}023$. On comprend la nécessité de pousser les calculs jusqu'aux termes du troisième ordre.

2° — Le cliché *idéal* est parfaitement orienté et normal à l'axe de la lunette. Le cliché *réel* ne l'est évidemment pas. Les coordonnées x et y mesurées dessus ne sont pas proportionnelles à X et à Y.

Vu la forme des équations de transformation des coordonnées, il est naturel de poser :

$$X = A + Bx + Cy, \qquad Y = A' + B'x + C'y.$$

Pour calculer les paramètres de ces formules, on utilise trois étoiles assez distantes sur le cliché et dont on connaît les coordonnées célestes comme résultat de mesures méridiennes. Par les formules ci-dessus, on calcule leurs X et Y sur le cliché idéal. On mesure leurs coordonnées x, y, sur le cliché réel : on a ce qu'il faut pour calculer les paramètres A A',... des formules de passage.

En réalité dans le calcul des paramètres, on fait intervenir une dizaine d'étoiles de repère; d'où vingt équations qu'on traite par la méthode des moindres carrés.

On a dû construire des tables pour abréger ces calculs. Le lecteur comprend maintenant pourquoi le procédé en apparence si simple de la photographie ne fournit les résultats demandés qu'après une élaboration pénible. On a même proposé de créer un institut de réduction qui se chargerait de ce labeur. Je crains que la précision de tous ces calculs ne soit fictive; je ne sais comment on travaille à l'étranger, mais j'ai vu donner tant de coups de pouce par des subordonnés *qui s'en vantaient*, que j'ai peu de confiance en un travail exécuté par des employés, scientifiquement anonymes, mal payés et qui demandent surtout à en faire le moins possible. Au reste je pourrais citer un directeur d'observatoire qui sur les bordereaux d'émargement enrôlait toute sa famille (y compris les bonnes et les nourrices) comme calculateurs auxiliaires : je doute de la précision des calculs ainsi réalisés; pour l'exactitude des résultats, j'aime à croire que les fils à papa se contentaient d'émarger!

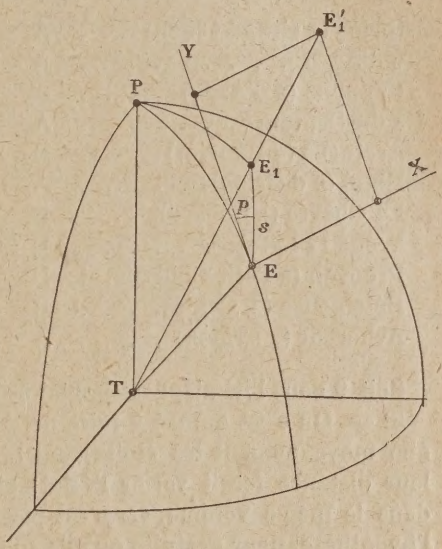


Fig. 53.

61. Nombre des étoiles.

1° — Voici les nombres d'étoiles visibles à l'œil nu, classées par grandeur pour les hémisphères nord et sud.

GRANDEURS	H. NORD	H. SUD	GRANDEURS	H. NORD	H. SUD
De 0 à 1	3	5	De 4,1 à 5	412	321
1,1 à 2	19	14	5,1 à 6	1 415	1 238
2,1 à 3	56	66	6,1 à 7	5 745	4 888
3,1 à 4	150	166			

Soit au total 7 800 + 6 698 = 14 498.

Soit environ 15 000 étoiles visibles à l'œil nu.

On peut même affirmer qu'un observateur non exercé ne voit pas plus de 8 000 étoiles : les poètes exagèrent donc quand ils parlent de l'innombrable armée des étoiles : un régiment sur pied de guerre, pas davantage.

Voici les étoiles les plus brillantes :

Sirius (α Grand Chien) . . .	A	Aldébaran (α Taureau) . . .	B
η d'Argo	A	β Centaure	A
Canopus (α d'Argo)	A	α Croix	A
α du Centaure	A	Antarès (α Scorpion)	A
Arcturus (α Bouvier)	B	Ataïr (α Aigle)	B
Rigel (β d'Orion)	A	L'épi (α Vierge)	A
La Chèvre (α Cocher)	B	Fomalhaut (α Poisson) . . .	A
Véga (α Lyre)	B	β Croix	A
Procyon (α Petit Chien) . . .	B	Régulus (α Lion)	B
Bételgeuse (α Orion)	B	Pollux (β Gémeaux)	B
Achernar (α Eridan)	A		

Soit 9 dans l'hémisphère boréal et 12 dans l'austral.

2° — On s'est amusé à faire de petits calculs basés sur l'hypothèse que moyennement les étoiles ont la même intensité lumineuse (seule leur distance ferait varier l'éclat) et qu'elles sont en même nombre dans le même volume. Ce n'est pas un crime de voir ce qui résulte de l'hypothèse, pour gratuite qu'elle soit.

Appelons N le nombre d'étoiles dans la sphère de rayon r. On a :

$$N = N_0 r^3.$$

D'ailleurs : $$E = E_0 : r^2$$

D'où :

$$\frac{dE}{E} = -2\frac{dr}{r}, \qquad \frac{dN}{N} = 3\frac{dr}{r}.$$

Introduisons les grandeurs par la formule (§ 51) :

$$\log E = 0{,}4(1 - m), \qquad \frac{dE}{E} = -0{,}4\,.\,dm.$$

D'où :

$$0{,}2\,dm = \frac{dr}{r}, \qquad \frac{dN}{N} = 0{,}6\,dm.$$

Le nombre des étoiles jusqu'à une grandeur déterminée croît en progression géométrique quand la grandeur croît en progression arithmétique. La distance moyenne des étoiles d'une grandeur déterminée croît en progression géométrique quand la grandeur croît en progression arithmétique.

L'hypothèse se vérifie très mal. Du reste elle est en contradiction avec le fait qu'il n'existe pas de relation nécessaire entre la grandeur d'une étoile et sa distance au Soleil, ou la grandeur d'une étoile et sa masse (voir § 70).

Mouvements dus aux déplacements de la Terre et du système solaire.

62. Mouvement du système solaire.

1° — Supposons que le Soleil et son système se meuvent *d'un mouvement rectiligne et uniforme* vers un point de la voûte céleste que nous appellerons *apex*; le point diamétralement opposé sera *l'antiapex*. C'est admettre que les étoiles ont sur notre système une action moyennement nulle.

En raison de ce mouvement SS', les projections *e* sur la voûte céleste

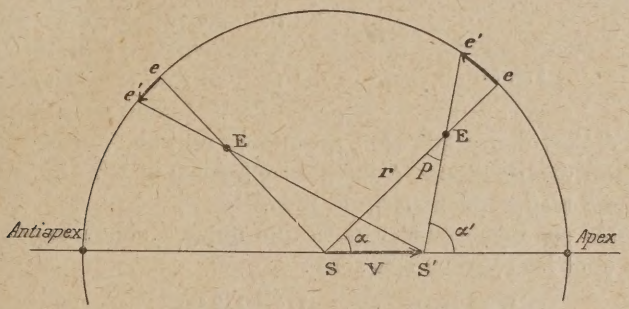


Fig. 54.

des étoiles E dont la distance n'est pas infinie, se déplacent de *e* en *e'*; elles s'éloignent de l'apex et se rapprochent de l'antiapex, sur les grands cercles de la sphère céleste qui joignent ces points. On a :

$$\overline{SS'} = V, \qquad p = \alpha' - \alpha = d\alpha, \qquad r\,d\alpha = V \sin\alpha.$$

Soit $\mathcal{R}_0$, D_0, l'ascension droite et la déclinaison de l'apex; soit $\mathcal{R}$, D, les coordonnées de l'étoile. On a (fig. 55) :

$$\sin\alpha \,.\, \sin\beta = \cos D_0 \,.\, \sin(\mathcal{R} - \mathcal{R}_0),$$
$$\sin\alpha \,.\, \cos\beta = \cos D \,.\, \sin D_0 - \cos D_0 \,.\, \sin D \,.\, \cos(\mathcal{R} - \mathcal{R}_0).$$

Déterminons les variations que subissent l'ascension droite et la déclinaison d'une étoile d'année en année; ces formules différentiées donnent, *dans notre hypothèse*, la variation de la distance angulaire α de l'étoile à l'apex.

2° — Si donc notre système se déplace d'un mouvement rectiligne et uniforme, nous devons observer des variations systématiques des coordonnées des étoiles, nulles pour deux points de la sphère, l'apex et l'antiapex, maxima pour les points situés dans le grand cercle normal au diamètre passant par ces points.

La difficulté de cette constatation provient : d'abord de la petitesse

des quantités en jeu; ensuite de ce que la distance généralement inconnue r des étoiles intervient; enfin de ce que les étoiles peuvent être animées d'un mouvement propre. Bien entendu nous supposons les observations corrigées de la réfraction, de l'aberration et de la nutation. Une conclusion nette ne peut donc ressortir que de l'emploi d'un grand nombre d'étoiles; on peut alors admettre que les mouvements propres s'éliminent dans la moyenne.

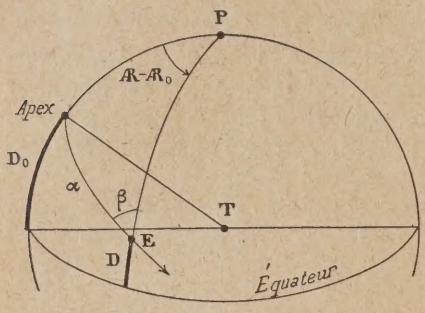


Fig. 55.

Herschel, à qui l'on doit la démonstration du mouvement d'ensemble de notre système, montra que tracés sur un globe céleste, les mouvements constatés pour les étoiles convergent (en gros) vers un point (antiapex). Depuis on a utilisé des méthodes d'apparence beaucoup plus savantes, mais qui au fond n'apprennent rien de plus.

De toutes ces discussions ressort que notre système se déplace vers un point dont les coordonnées sont :

$$A = 260°, \qquad D = +34°;$$

je supprime intentionnellement les fractions écrites pour les gogos, puisque suivant les auteurs, les nombres varient de plusieurs degrés. L'apex correspond à peu près à π *Hercule* dont les coordonnées sont :

$$A = 17^h\ 11^m\ 20^s, \qquad D = +36°\ 54'\ 15''.$$

Il ne faut pas oublier que tous ces raisonnements reposent sur des variations de l'ordre de la seconde d'arc.

3° — Voici la manière la plus simple de mettre le résultat hors de doute.

Partageons la sphère en 24 fuseaux formés par les cercles horaires qui correspondent à une heure, deux heures,... Limitons-les par deux cercles menés à 30° de l'équateur de part et d'autre. Supprimons les étoiles à grands mouvements propres, celles dont les mouvements en un siècle sont supérieurs à 64″.

Faisons dans chaque fuseau la moyenne des variations séculaires des déclinaisons et des ascensions droites. Le calcul portant sur plus de 1 500 étoiles, on trouve que les déclinaisons diminuent pour tous les fuseaux, et à peu près de 13″.

Quant aux ascensions droites, leurs variations sont représentées par la courbe 56; la valeur du maximum et du minimum est de 13″. Bien entendu la courbe corrige des écarts grands, mais qui ne laissent pas de doute sur la périodicité.

L'interprétation est compliquée par le fait que l'apex n'est pas sur l'équateur. Si l'apex était sur l'équateur et avait 17^h pour ascension droite, une figure très simple montre que pour toutes les étoiles dont les ascensions droites sont comprises entre 5^h et 17^h, l'ascension droite, doit diminuer, avec maximum de diminution pour celles dont l'ascension est 11^h. L'ascension droite augmenterait pour les étoiles dont les ascensions sont comprises entre 17^h et 5^h en passant par 24^h.

C'est en gros ce que fournit l'expérience, avec la complication que l'apex n'est pas sur l'équateur.

Quant aux déclinaisons, les étoiles étant toutes de déclinaisons comprises entre $\pm 30°$ et les mouvements s'effectuant sur des grands cercles

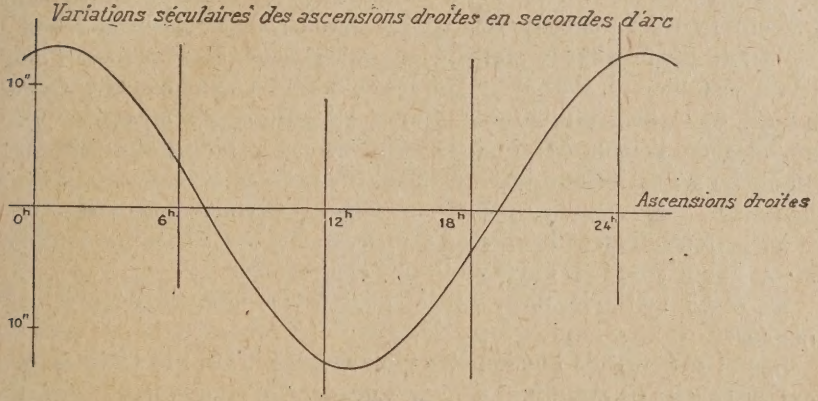


Fig. 56.

d'un point de déclinaison $+34°$ vers un point de déclinaison $-34°$, il est clair que les déclinaisons doivent décroître.

4° — Emploi des vitesses radiales.

Nous verrons plus loin que le spectroscope permet de déterminer, en kilomètres par seconde, de la vitesse relative d'une étoile à la Terre, la composante dirigée suivant la droite TÉ qui joint la Terre à l'Étoile.

Toutes les étoiles voisines de l'apex doivent *en moyenne* se rapprocher de nous; toutes les étoiles voisines de l'antiapex doivent *en moyenne* s'éloigner de nous de la même quantité; je dis *en moyenne* afin d'éliminer autant que possible les mouvements propres.

On peut utiliser les vitesses radiales des autres étoiles, mais elles sont moins favorables.

Malgré les nombreux travaux exécutés dans cette voie, les estimations de la vitesse de notre système vers l'apex varient de 10 à 60 kilomètres à la seconde. Quelle que soit du reste cette vitesse qui paraît être de l'ordre de la vitesse de la Terre sur son orbite ($29^k,4$) on remarquera la différence des phénomènes qui résultent de ces deux espèces de déplacements. Les premiers sont *séculaires* : ils s'accumulent au cours des

temps ; les seconds sont *périodiques* ; ils ont l'année pour période. Dans quelques milliers d'années, sans qu'il soit nécessaire d'imaginer un perfectionnement des méthodes, l'aspect du ciel aura changé suffisamment pour que le mouvement vers π Hercule (ou vers toute autre étoile) soit connu avec précision. La même amélioration automatique n'aura pas lieu pour la valeur des parallaxes stellaires dont nous allons parler.

63. **Parallaxes stellaires.**

1° — Au § 30 nous disons quels phénomènes résultent de la proximité d'une étoile ; quand le paramètre $\alpha = R : \rho$, n'est pas pratiquement nul, elle décrit annuellement une *ellipse de parallaxe* étudiée au § 34. L'expérience a montré que si toutes les étoiles décrivent annuellement une ellipse, c'est pour une raison différente (*ellipse d'aberration*, § 31).

En fait les parallaxes stellaires (paramètres α) sont si petites que jusqu'au milieu du XIX^e siècle, on les considérait comme pratiquement nulles. Leur non-nullité ne fut mise hors de doute qu'à partir du moment où l'on se décida à l'emploi de *mesures différentielles*. On étudie les variations de distance de l'étoile E soupçonnée de parallaxe non nulle, à deux étoiles voisines considérées comme fixes : on élimine ainsi la réfraction et l'ellipse d'aberration qui sont sensiblement les mêmes pour l'étoile E et les étoiles de comparaison.

2° — La méthode différentielle peut être appliquée de plusieurs manières.

Bessel se servit de l'héliomètre (voir mon Cours sur la *Construction des appareils de mesure et d'observation*). La méthode la plus précise d'emploi consiste à dédoubler le système de l'étoile E et de l'étoile de comparaison C, de manière que les quatre images E, C, E′, C′, soient équidistantes sur une même droite. Il faut pour cela donner un azimut convenable au système des deux lentilles, et les écarter de manière que l'une des doubles images soit déplacée d'une longueur $\overline{EE'}$ double de la distance $\overline{EC}$ à mesurer.

On peut utiliser la photographie, soit en obtenant des clichés différents à six mois d'intervalle, au moment des quadratures, soit en utilisant le même cliché non développé et conservé dans l'obscurité ; on le développe après 3 poses à 6 mois d'intervalle. La distance des astres est mesurée entre les images ponctuelles par les méthodes que nous verrons plus loin. Dans les diverses poses, on s'arrange de manière que les images correspondantes soient voisines et non superposées.

Enfin on peut utiliser les observations méridiennes, mais en déterminant les coordonnées de l'étoile E par rapport aux étoiles voisines de comparaison ; ce qui élimine encore l'aberration et la réfraction.

3° — Pour fixer les idées sur les ordres de grandeur, rappelons que la seconde sexagésimale d'angle a pour valeur en radian :

$$0{,}000\,004\,848 = 1 : 206\,300 \text{ environ.}$$

Si la parallaxe annuelle vaut 1″, l'astre est à la distance de la Terre égale 206·300 fois la distance moyenne de la Terre au Soleil (149·500·000 kilomètres).

Ceci posé la plus grande parallaxe connue est celle de α Centaure. Elle vaut 0″,75. La distance de α Centaure à la Terre est donc :

(206·300 × 4) : 3 = 275·000 rayons moyens de l'orbite terrestre.

Cela fait : $41 \cdot 10^{12}$ kilomètres = 41 trillions de kilomètres.

Pour parcourir une telle distance à raison 3.10^5 kilomètres à la seconde, il faut à la lumière $1{,}37.10^8$ secondes.

Or un jour contient 86·400 = $8{,}64.10^4$ secondes;

une année contient $3{,}1557.10^7$ secondes.

Il faut donc 4,343 ans à la lumière pour venir de α Centaure jusqu'à nous.

Bien entendu, il est plus que suffisant de conserver les deux premiers chiffres $4^a{,}3$, les valeurs trouvées de la parallaxe oscillant entre 0″,72 et 0″,78.

La première étoile dont la parallaxe fut déterminée est 61 Cygne; elle est de 0″,33. Sa distance à la Terre est de 720·000 rayons moyens de l'orbite terrestre, soit 106 trillions de kilomètres. Sa lumière met 11,3 ans à nous parvenir.

CHAPITRE V

MOUVEMENTS PROPRES. SYSTÈMES MULTIPLES

64. Définition des mouvements propres stellaires.

Corrigeons la position apparente de l'étoile de la réfraction, de l'aberration, de la nutation. Corrigeons les coordonnées ainsi obtenues de la parallaxe et de l'effet de perspective qui provient du déplacement d'ensemble de notre système. Le déplacement qui subsiste, constitue le *mouvement propre* de l'étoile.

Il peut être de deux espèces : l'astre semble décrire une courbe fermée ou non fermée. Nous verrons plus loin comment on interprète le premier cas (§ 67); bornons-nous pour l'instant au second.

Le mouvement propre des étoiles est de l'ordre de quelques secondes par an; on n'en trouve pas au total une centaine dont le déplacement dépasse 1″. Un déplacement de 4 à 5″ est très exceptionnel.

Il semble que les mouvements propres correspondent pour toutes les étoiles à des déplacements linéaires de même ordre, dirigés dans tous les sens. Conformément à ce que nous disons au § 61, on constate des mouvements propres considérables pour beaucoup d'étoiles de faible éclat, et des mouvements propres faibles pour beaucoup des premières grandeurs; ce qui donne à penser qu'entre l'éclat et la distance n'existe pas de relation nécessaire.

Mouvement suivant le rayon visuel.

65. Énoncé du principe de Döppler-Fizeau.

1° — Ce n'est pas ici le lieu de rattacher le principe de Döppler-Fizeau à une théorie plus générale : je me contente de l'énoncer.

Une étoile envoie dans un spectroscope une lumière qu'il décompose en un spectre de raies. Par hypothèse nous pouvons assimiler ces raies à celles d'une vapeur connue ou d'un gaz connu rendu lumineux. Nous connaissons donc leurs longueurs d'onde quand la lumière est émise à la surface de la Terre, quand la source est entraînée par le mouvement

de la Terre, en d'autres termes quand sa vitesse *relative* v par rapport à l'observateur est nulle.

Mais actuellement la source possède une vitesse relative *radiale* v; c'est dire que sa vitesse relative a une composante v dirigée dans la direction des rayons qu'elle nous envoie. Nous prendrons v positivement lorsque la source s'éloigne de l'observateur.

Soit V la vitesse de la lumière.

Le principe de Döppler-Fizeau consiste à poser :

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{V}.$$

La longueur d'onde λ est accrue de $\Delta\lambda$, lorsque la source s'éloigne de l'observateur de v kilomètres par seconde; V = 300·000 kilomètres.

2° — Réduction au Soleil.

v est la vitesse relative radiale de l'étoile et de la Terre.

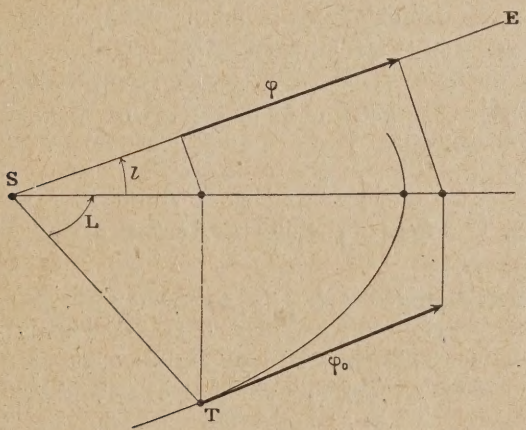


Fig. 57.

Elle dépend de la vitesse de la Terre par rapport au Soleil et de la vitesse propre du Soleil.

Pour ne pas faire de l'algèbre inutile, calculons la vitesse de la Terre par rapport au Soleil en admettant une trajectoire circulaire.

Soit L la différence actuelle des longitudes célestes héliocentriques de l'étoile et de la Terre (§ 178); soit l la latitude de l'étoile. Soit φ_0 la vitesse de la Terre (moyennement 29,450 kilomètres). La projection φ de la vitesse φ_0 sur la droite SE qui joint le Soleil à l'étoile est :

$$\varphi = \varphi_0 \sin L \,.\, \cos l.$$

Si la méthode spectroscopique donne la vitesse relative radiale v de la Terre par rapport à l'étoile, vitesse comptée positivement lorsqu'elle

correspond à un éloignement, la vitesse radiale *relative* de l'étoile par rapport au Soleil est :

$$v + \varphi = v + \varphi_0 \sin L \cdot \cos l.$$

Pour trouver la vitesse *absolue*, il faudrait connaître la vitesse absolue du Soleil; malheureusement on l'ignore. On se contente donc de déterminer les vitesses relatives suivant la ligne de visée, par rapport au Soleil.

Le lecteur n'oubliera pas que, même pour les étoiles les plus proches, l'angle des directions TE et SE est inférieur à la seconde d'arc.

3° — Précision de la méthode.

Les raies dont se compose la raie D du sodium, ont pour longueurs d'onde : $0_\mu,588\,998$, $0_\mu,589\,594$.

La différence est $0_\mu,000\,596$, soit environ 1 : 1 000 de la longueur d'onde. Il y aura donc déplacement d'une des raies, de l'intervalle qui sépare les deux raies, pour une vitesse relative de 300 kilomètres. Pour évaluer la vitesse radiale relative, à 1 kilomètre près, il faut donc évaluer le 1 : 300 de la distance des raies D.

C'est la limite de ce que l'expérience peut déceler avec certitude.

Il est très remarquable que la précision soit indépendante de la distance de l'étoile.

Étoiles doubles, triples.

66. Définition et observation des systèmes binaires.

1° — On appelle *étoiles doubles* des étoiles que l'on aperçoit doubles avec des appareils de pouvoir séparateur assez grand. On les classe suivant leurs distances angulaires; voici la classification de Struve :

1re classe	0″ à 1″	5e classe	8″ à 12″
2e —	1 à 2	6e —	12 à 16
3e —	2 à 4	7e —	16 à 24
4e —	4 à 8	8e —	24 à 32

Le système est en général formé d'une *étoile principale* et d'un *compagnon* beaucoup plus petit.

L'étoile double AB forme un *système binaire* quand ses constituantes agissent l'une sur l'autre d'après les lois de la gravitation (§ 67). Il faut pour cela que leur distance mutuelle linéaire soit assez petite, par conséquent que leurs distances à la Terre soient à peu près égales : pour un angle apparent δ donné, c'est alors que leur distance linéaire r est minima.

L'étoile double A'B forme simplement un *groupe optique* lorsque ses constituantes se projettent sur la voûte céleste au voisinage l'une de

l'autre; ce qui n'implique pas que leurs distances à la Terre soient quasiment égales, ni par suite que leur distance linéaire soit petite.

Pour trancher la question, il faut vérifier précisément si les étoiles tournent l'une autour de l'autre suivant les lois de la gravitation.

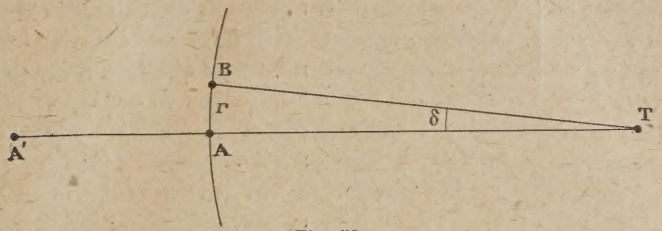


Fig. 58.

2° — Les mesures consistent à déterminer la distance r et l'*angle de position* p du compagnon C par rapport à l'étoile principale E.

L'angle p est l'angle que fait le grand cercle EC avec le cercle horaire PE passant par E; P est le pôle.

Posons $r = \overline{EC}$; on a pour les différences Δ des ascensions droites et des déclinaisons :

$$\Delta D = r\cos p, \qquad \Delta \text{Æ} = r\sin p : \cos D.$$

Pour que ces formules soient exactes en signes, il faut compter p positivement à partir du cercle horaire dans le sens indiqué par la

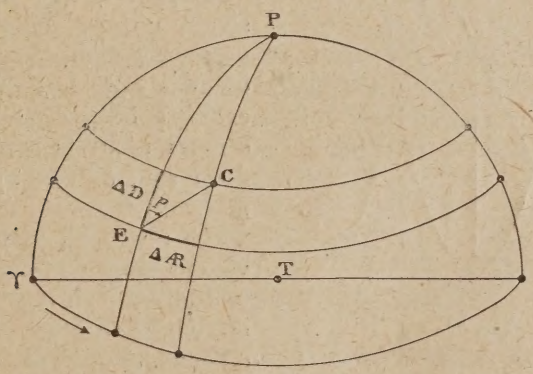


Fig. 59.

figure 59, c'est-à-dire du nord vers l'est. N'oublions pas que la Terre est en T et que nous représentons la sphère céleste vue du dehors : les ascensions droites sont comptées positivement du point vernal γ dans le sens de la flèche.

L'angle de position se mesure avec un fil du micromètre (§ 38) qui peut toujours se mouvoir d'un angle connu autour de l'axe de la lunette. On commence par régler le fil suivant le mouvement diurne,

en vérifiant que la trajectoire de l'étoile est parallèle au fil. Comme on utilise ordinairement une lunette montée parallactiquement, il n'y a qu'à arrêter un instant le mouvement d'horlogerie pour vérifier si la condition est satisfaite.

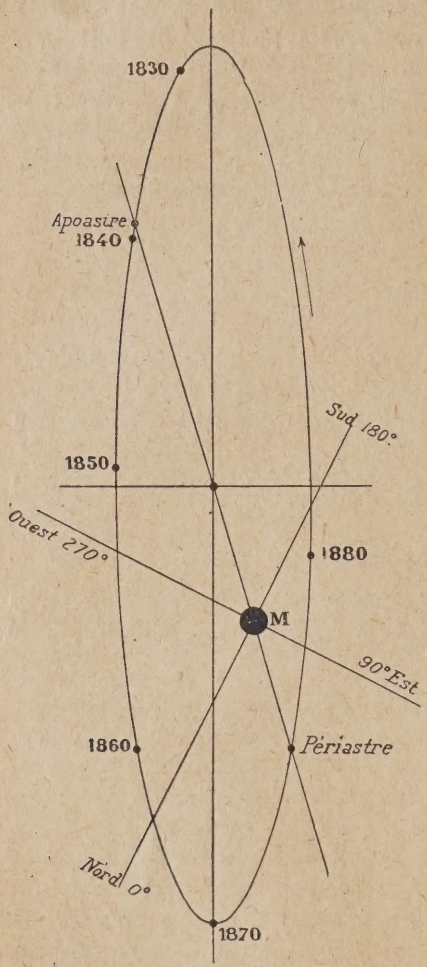


Fig. 60.

On fait alors tourner le micromètre de manière que le fil passe sur le centre des astres; le complément de l'angle dont il a tourné, est l'angle de position p.

On amène alors le fil mobile à angle droit de cette direction et on mesure la distance r des astres en agissant sur la vis du micromètre.

Comme r est de l'ordre de quelques secondes, c'est-à-dire ne peut être mesuré qu'avec une assez grossière approximation, il suffit largement de connaître p à quelques minutes près.

3° — ÉLABORATION DES RÉSULTATS.

Le plus simple est de construire un graphique et de faire passer au mieux par les points obtenus une courbe régulière. Il est fort inutile de bluffer; les erreurs relatives sur les distances r sont nécessairement énormes.

Nous verrons que les observations sont *a priori* reliées par une ellipse; on fait donc passer une ellipse au mieux par les points obtenus, *ce que l'expérience montre toujours légitime*. De cette ellipse on ne connaît souvent qu'un arc assez restreint, la période des étoiles doubles pouvant être de plusieurs centaines d'années. On calcule au mieux l'ellipse à partir de cet arc, laissant à nos petits neveux le soin de rectifier les résultats, s'ils n'ont rien de mieux à faire.

La figure 60 donne l'ellipse qui correspond à l'étoile double α *Centaure*. Elle est représentée comme elle est vue dans la lunette, c'est-à-dire renversée. On a marqué sur l'ellipse les positions du compagnon, de dix en dix ans. La période de révolution est d'environ 84 ans.

67. Énoncé des lois de Képler-Newton[1].

1° — Lorsqu'une hypothèse explique un grand nombre de phénomènes, on l'applique aux phénomènes analogues ; on vérifie si, oui ou non, elle est encore capable de les expliquer, c'est-à-dire *purement et simplement* de les résumer, de leur servir de cadre. Or les lois de Newton expliquent notre système planétaire ; *nous posons donc* qu'elles doivent s'appliquer aux systèmes stellaires : l'expérience vérifie qu'il en est ainsi. C'est la marche ordinaire et qui n'a rien de sensationnel.

Nous reviendrons longuement plus loin (§§ 165 et suivants) sur l'hypothèse de Newton et sur les lois qui en découlent, lois antérieurement énoncées par Képler comme résultat brut de l'observation. Les voici.

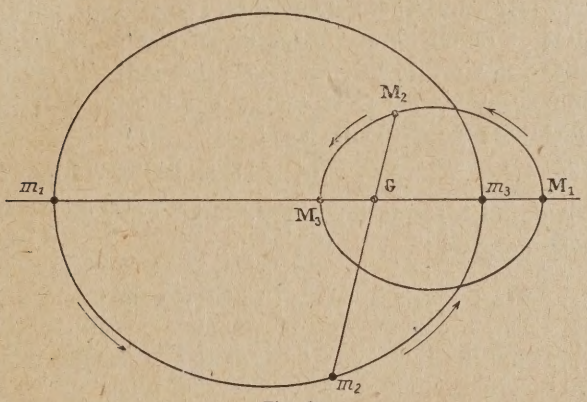


Fig. 61.

Lorsque deux astres de masses m et M tournent l'un autour de l'autre en raison de leurs attractions mutuelles, le centre d'inertie G du système est ou fixe ou animé d'un mouvement rectiligne et uniforme.

Par rapport au centre d'inertie G supposé fixe, les astres m et M ont des trajectoires elliptiques coplanaires dont G est un foyer commun. Elles les parcourent suivant la loi des aires : c'est dire que les vecteurs GM, Gm, issus du foyer G et aboutissant aux centres des astres balaient des aires proportionnelles au temps.

Il résulte de la définition du centre d'inertie que les astres sont à chaque instant sur la même droite passant par ce point.

2° — Soient a et A les demi-grands axes des ellipses décrites par m et M ; soit T la durée de révolution, G la constante de la gravité (force exercée par la masse 1 à l'unité de distance). On a :

$$T^2 \frac{G}{4\pi^2(M+m)^2} = \frac{a^3}{M^3} = \frac{A^3}{m^3}.$$

1. Le lecteur lira les paragraphes suivants plus utilement après avoir étudié la théorie du Soleil.

Si l'on fixe la masse M, la masse m décrit par rapport à elle une ellipse semblable aux précédentes, admettant M pour foyer; son demi-grand axe $A + a$ satisfait à la relation :

$$(a + A)^3 = \frac{T^2 G}{4\pi^2}(M + m).$$

Tout se passe donc comme si M était réellement fixe, mais comme si sa masse était devenue $M + m$.

Par un choix convenable des unités, débarrassons-nous de la constante G.

Appliquons la formule précédente à la Terre et au Soleil. Prenons comme unités de temps l'année sidérale, comme unité de longueur le demi-grand axe de l'orbite terrestre (distance moyenne de la Terre au Soleil), comme unité de masse la somme des masses de la Terre et du Soleil. La formule précédente devient :

$$G = 4\pi^2, \qquad (a + A)^3 = T^2 (M + m).$$

Appliquons-la au système binaire que nous étudions.

Nous pouvons écrire :

$$\left(\frac{a + A}{R}\right)^3 : \left(\frac{1}{R}\right)^3 = T^2(M + m);$$

R est la distance du Soleil (ou de la Terre, peu importe) à l'étoile. Or $(a + A) : R$ est en radian l'angle δ sous lequel on verrait de la Terre le demi-grand axe $(a + A)$ de l'orbite réelle, supposé normal à la ligne de visée. D'autre part $1 : R$ est la *parallaxe de l'étoile*, angle ε sous lequel de l'étoile on voit le demi-grand axe de l'orbite terrestre, supposé normal à la ligne de visée. La formule devient :

$$\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^3 = T^2(M + m).$$

On pourra donc déterminer la masse du système binaire si la parallaxe ε est connue. La formule étant homogène par rapport à ε et δ, on peut évaluer ces angles en secondes d'arc. On appelle parfois *parallaxe théorique* celle qui correspond à l'hypothèse : $M + m = 1$.

Représentons-la par ε_0; on a :

$$\varepsilon_0 = \delta \cdot T^{-\frac{2}{3}}, \qquad \varepsilon_0^3 = (M + m)\varepsilon^3.$$

La parallaxe théorique est égale au quotient du demi-grand axe de l'orbite par la puissance 2 : 3 de la durée de révolution. La masse du système est le cube du rapport de la parallaxe théorique à la parallaxe vraie. Ces propositions ne sont que les conséquences de la définition et ne nous apprennent rien de neuf.

68. Orbites réelles.

1° — Il est clair que l'étoile M de la figure 60 n'occupe pas un des foyers de l'ellipse. Comme nous voulons *a priori* que les lois de Képler-

Newton s'appliquent (quitte à les lâcher si nos efforts restent vains), nous concluons (ce qui du reste est tout naturel) que nous ne voyons pas l'orbite *réelle* O; nous n'en voyons que la projection *orthogonale* sur le plan tangent à la sphère céleste. Nous posons donc que cette orbite réelle O est telle que le point qui se projette en M, en est un des foyers.

Nous sommes donc ramenés au problème de taupins suivant : on donne une ellipse O′ et un point M quelconque à l'intérieur; trouver une ellipse O telle que O′ en soit la projection orthogonale, avec la

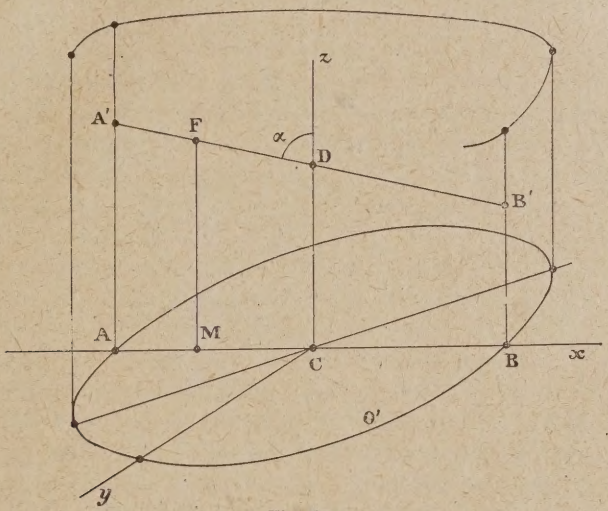


Fig. 62.

condition que le point M soit la projection d'un des foyers F de l'ellipse O (fig. 62).

Je me garderai d'assommer mon lecteur par des formules sans intérêt éducatif. Je me contenterai de montrer que le problème admet une solution : c'est juste le contre-pied de la méthode classique qui résout les problèmes sans les poser.

Plaçons l'orbite apparente dans le plan xCy (fig. 62); Cz est donc la direction des rayons visuels; le plan xCy est tangent à la sphère céleste. Les rayons visuels qui passent par l'orbite apparente O′, forment un cylindre de section droite elliptique O′.

L'orbite réelle O est une section oblique de ce cylindre.

Remarquons d'abord que les centres de toutes les sections sont sur Cz. Puisque M est la projection d'un des foyers F de l'ellipse O, le grand axe de cette ellipse à déterminer est contenu dans le plan xCz.

Choisissons A′B′ pour grand axe de l'ellipse O, ce qui revient à choisir l'angle α; peu importe la distance $\overline{CD}$, puisque nous coupons un cylindre.

Il est clair que parmi toutes les sections qui passent par A′B′, nous n'en trouverons qu'une inclinée sur xCz de manière que A′B′ soit son grand axe. Généralement F ne sera pas le foyer de cette ellipse.

Mais comme nous pouvons essayer tous les angles α, nous avons une infinité de sections dont le grand axe est dans le plan xCz. Comme

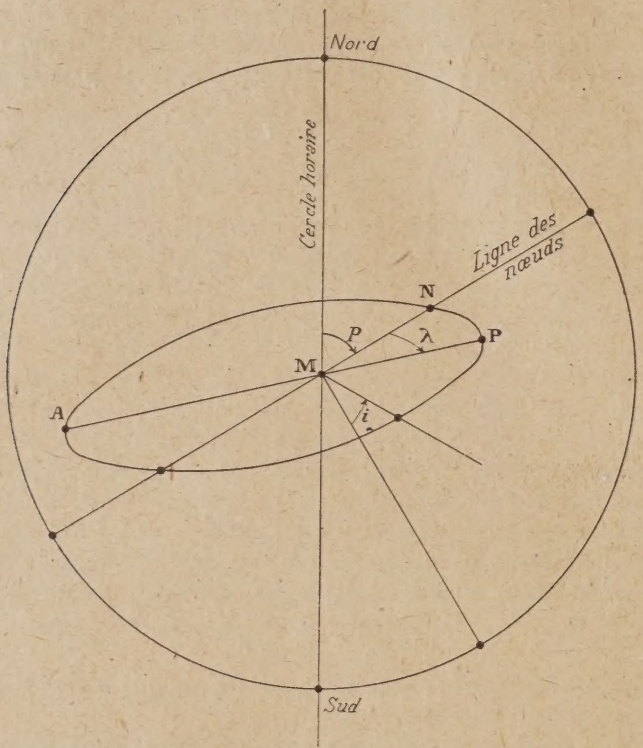


Fig. 63.

mettre le foyer sur la droite MF ne représente qu'une condition analytique, nous sommes sûrs qu'une section et une seule satisfait aux conditions du problème qui par suite est bien déterminé.

2° — En définitive on détermine l'orbite réelle. Tant qu'on n'a pas la parallaxe ε de l'étoile double (ce qui permet de calculer sa distance à la Terre), l'orbite est définie par l'angle apparent δ sous lequel, de la Terre, on voit son grand axe supposé rendu normal à la ligne de visée, et par l'excentricité e.

Le plan de l'orbite est défini d'abord par l'angle de position p que fait son intersection avec la sphère céleste (ligne des nœuds), avec la trace sur la sphère céleste (plan du tableau) du cercle horaire de l'étoile principale; il est défini en second lieu par son inclinaison i sur le plan

normal à la ligne de visée (plan tangent à la sphère céleste, plan du tableau).

L'orbite est définie dans son plan par l'angle λ de la ligne des nœuds avec la ligne des apsides du côté du périastre P (point où le compagnon est le plus voisin de l'étoile principale).

Rien ne précise dans quel sens tourne le compagnon sur son orbite, puisque nous n'avons que la projection de son mouvement. Mais les mesures spectroscopiques lèvent l'indétermination. On appelle *nœud ascendant* de l'orbite celui où le compagnon coupe le plan de projection *en s'éloignant de la Terre* : nous y considérons sa vitesse radiale comme positive.

69. Loi des aires.

1° — Pour déterminer la durée totale de révolution, évidemment le plus sûr est d'attendre qu'une révolution complète se soit effectuée. Mais nous sommes pressés, et la durée de révolution, toujours supérieure à 10 ans, est souvent de plusieurs centaines d'années : il serait imprudent d'attendre.

Force est de déduire cette durée de l'arc que nous connaissons.

Appuyons-nous sur le fait que *si la loi des aires est exacte pour un point et une courbe, elle se vérifie pour le même point et pour la projection du système sur un plan quelconque.*

Cela tient à ce que les aires planes sont égales à leurs projections, au facteur constant $\cos i$ près, où i est l'inclinaison des plans.

On trace l'orbite apparente à grande échelle sur du carton fort et régulier; on la découpe, on la pèse. On découpe des secteurs de sommets M (fig. 63), *qui correspondent à des temps connus*; on les pèse.

Les poids sont proportionnels aux aires balayées pendant les intervalles de temps correspondants; d'où la vérification de la loi des aires. La durée de révolution est à l'un de ces intervalles comme le poids de l'ellipse est au poids du secteur correspondant.

2° — Connaissant la durée de révolution, on détermine immédiatement le temps de passage au périastre P; il suffit de peser l'ellipse apparente et le secteur compris entre deux vecteurs, l'un qui va du point M à la position du compagnon pour un temps connu, l'autre qui va du point M au périastre P.

70. Mesures des masses.

1° — Emploi des parallaxes stellaires.

Pour aller plus loin, il nous faut absolument une mesure linéaire. On la trouve ordinairement dans la mesure de la *parallaxe stellaire*, angle sous lequel de l'étoile on voit normalement la distance moyenne de la Terre au Soleil. Je reviendrai longuement sur la mesure des parallaxes aux §§ 232 et suivants.

Par exemple, pour α Centaure ; on trouve :

$$\varepsilon = 0'',75, \qquad a + A = 18'', \qquad \tau = 84 \text{ ans.}$$

$$\frac{M+m}{\mu} = \left(\frac{18}{0,75}\right)^3 : \overline{84}^2 = 2 \text{ environ.}$$

Ainsi la masse du système binaire α *Centaure* est sensiblement 2 fois la masse du Soleil.

Ici une remarque. Dans l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* pour 1915, je trouve pour α Centaure :

$$a + A = 17'',71, \qquad \tau = 81 \text{ ans.}$$

En 1900 André admettait les nombres :

$$a + A = 18'',17, \qquad \tau = 84 \text{ ans.}$$

Le lecteur jugera d'après cet exemple de l'approximation des mesures et de la mauvaise plaisanterie qui sont les centièmes de seconde d'arc dont on nous accable.

2° — Mesure de la vitesse radiale.

Le spectroscope permet de mesurer la vitesse radiale *en kilomètres* (§ 62).

Montrons que de cette vitesse on peut déduire les dimensions de

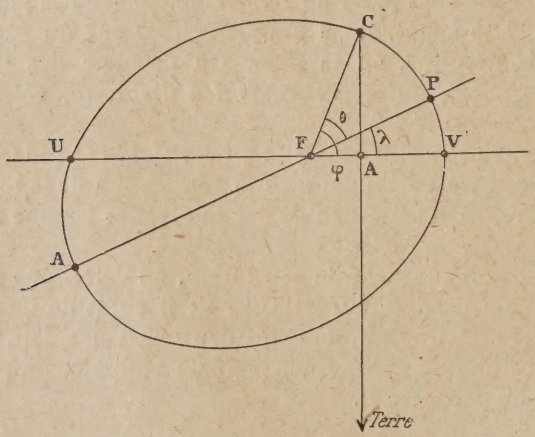


Fig. 64.

l'orbite *en kilomètres*, par suite la distance à la Terre ou la parallaxe stellaire, par suite enfin la masse $M + m$ du système.

La distance du compagnon C à la Terre est une constante augmentée de la distance $\overline{AC} = r \sin \varphi$ du compagnon à la perpendiculaire FA à la ligne de visée.

La vitesse radiale est donc :

$$v = \frac{d}{dt}(r\sin\varphi) = \frac{dr}{dt}\sin\varphi + r\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}$$

$$v = \frac{d\varphi}{dt}\left(\frac{dr}{d\varphi}\cdot\sin\varphi + r\cos\varphi\right). \qquad (1)$$

$\varphi = \theta + \lambda$; est l'anomalie, λ est un angle constant ci-dessus défini.

On a donc : $d\varphi = d\theta$.

D'autre part la définition de l'ellipse et la loi des aires donnent (§ 83) :

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}, \qquad r^2\,d\theta = C dt.,$$

Pour simplifier l'écriture nous remplaçons $a + A$ par a.

On tire de là :

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr}{d\varphi} = \frac{a(1-e^2)}{(1+e\cos\theta)^2}e\sin\theta = \frac{re\sin\theta}{1+e\cos\theta}.$$

Substituons dans (1); il vient :

$$v = \frac{C}{a(1-e^2)}[e\cos\lambda + \cos(\theta+\lambda)].$$

Mais l'ellipse est inclinée de l'angle i sur le plan normal à la ligne de visée. D'où finalement pour la vitesse radiale :

$$R = \frac{C\sin i}{a(1-e^2)}[e\cos\lambda + \cos(\theta+\lambda)].$$

D'après la définition des quantités introduites, on a :

$$2\pi ab = 2\pi a^2\sqrt{1-e^2} = CT.$$

D'où enfin : $$R = \frac{2\pi(a+A)}{T\sqrt{1-e^2}}\sin i\,[e\cos\lambda + \cos(\theta+\lambda)],$$

en rétablissant $a + A$ à la place de a.

La mesure de R fournira donc le demi-grand axe de l'orbite.

Le maximum de cette vitesse a lieu pour $\theta + \lambda = 0$ ou 180° qui correspondent aux points U et V de la trajectoire; le compagnon passe par ses nœuds.

La méthode est curieuse, mais ses difficultés d'application sont grandes puisqu'il s'agit d'apprécier un très faible déplacement de raies dans un spectre où la lumière est faible, sans parler des autres difficultés techniques.

Le résultat des expériences conduit à cette conclusion que les masses des systèmes binaires sont du même ordre que celles du Soleil.

3° — Rapport des masses de l'étoile principale et du compagnon. Dans ce qui précède nous ne déterminons que la somme des masses,

parce que, pour la commodité des observations, nous considérons comme fixe l'étoile la plus brillante que nous appelons *principale*. Pour déterminer le rapport des masses, il faut avoir les mouvements absolus de chacune des étoiles constituantes : la difficulté devient énorme. On s'appuie sur les observations méridiennes, en prenant comme point fixe une étoile voisine dont on a lieu de supposer les déplacements très petits.

Le résultat intéressant de ces recherches est que, même dans le cas où les éclats sont très différents, les masses sont du même ordre de grandeur. La *grandeur* d'une étoile ne semble donc pas être une mesure même grossière de sa masse : il n'existe entre ces quantités aucune relation nécessaire.

71. Astronomie de l'invisible.

Quels grands mots pour bien peu de chose!

La discussion des ascensions droites et déclinaisons de certaines étoiles mesurées à la lunette méridienne montre des irrégularités qui ne s'expliquent ni par l'aberration, ni par la réfraction, ni par la nutation. *Comme on veut que la loi de la gravitation contienne tous les phénomènes*, on conclut l'existence d'un compagnon invisible, ou non encore vu, qui cause les dérangements.

La seule difficulté des expériences est la petitesse des phénomènes et la nécessité de trouver des repères qu'on puisse considérer comme fixes. Ainsi Bessel (1844) comparait les ascensions droites de Sirius (α Grand Chien) avec β Orion, α Orion et Procyon (α Petit Chien).

Il comparait d'autre part les déclinaisons de Procyon à celles de huit étoiles voisines du parallèle de Procyon. On concoit en effet la nécessité d'éliminer les variations des repères en les multipliant.

Il parvint ainsi à cette proposition : les mouvements propres de Sirius et de Procyon ne s'effectuent pas en ligne droite : donc il existe un astre troublant. Le fait qu'on ne le voit pas ou qu'on ne l'a pas encore vu, n'est pas opposable, puisque nous savons que les masses ne sont pas proportionnelles aux intensités lumineuses (§ 70).

Un compagnon de Sirius a été découvert en 1862, un compagnon de Procyon en 1896. Mais je supplie le lecteur de méditer quelques minutes : la découverte des compagnons n'a pas apporté aux conclusions primitives un atome de certitude supplémentaire. Car si ces compagnons sont à ce point difficiles à voir, il paraît bien difficile de déterminer leurs trajectoires autour de l'étoile principale, par suite de savoir s'ils sont bien les astres troublants.

Quoi qu'on trouve du reste, ça collera ou ça ne collera pas. Si ça ne colle pas, on en sera quitte pour mettre un second compagnon invisible supplémentaire.

Il faudrait pourtant que les savants quittassent leurs admirations bêtes et apprissent à dire la vérité. La vérité est que nous voulons que

les phénomènes rentrent dans la loi de gravitation : tant qu'il nous suffira pour cela de fourrer dans le ciel des astres invisibles, nous n'hésiterons pas une minute : pour ce que ça nous coûte!

Au reste admirons la bonté de la Nature d'avoir créé plusieurs milliards d'étoiles auxquelles il est permis, en grattant les chiffres, d'associer des compagnons invisibles. Les astronomes ont du pain sur la planche. Croire que la philosophie naturelle y gagnera grand'chose, est montrer peu de sens critique. Si la loi de la gravitation colle pour notre système, pourquoi diable ne collerait-elle pas pour les autres? Ce qui serait intéressant et sensationnel, c'est qu'elle ne collât pas! Au lieu de pousser des cris d'extase, si les savants étaient raisonnables, ils seraient navrés de cette uniformité parfaitement ennuyeuse!

72. **Étoiles doubles photométriques : type Algol.**

1° — L'éclat de certaines étoiles subit des variations périodiques de courtes périodes (ο Baleine, β Percée). On les considère comme des

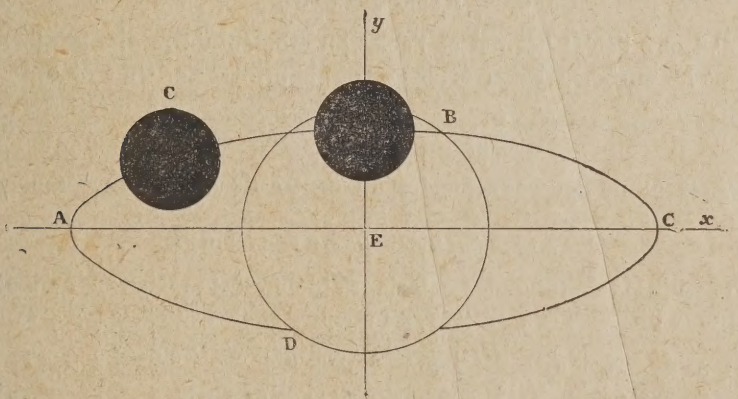


Fig. 65.

étoiles doubles; les constituantes sont d'éclats très différents, elles s'éclipsent mutuellement — pour nous, en tournant l'une autour de l'autre : d'où les variations d'éclat du système.

On les classe en deux groupes :

Les étoiles du type Algol ont un éclat habituellement constant, mais qui subit des variations lumineuses périodiques de courte durée.

Les étoiles du type α Lyre sont à variations lumineuses continues.

2° — Type Algol.

On admet l'existence d'une étoile principale E de disque circulaire et d'éclat uniforme. Autour d'elle tourne un compagnon obscur suivant une trajectoire telle que ABCD.

Comme le problème des variations d'éclat est encore trop indéterminé, on pose que la trajectoire du compagnon est circulaire : l'ellipse

de projection est donc symétrique (comme la représente la figure 65); on pose de plus qu'au maximum de l'éclipse, le disque du compagnon tangente intérieurement le disque de l'étoile.

Au reste nous ne savons rien sur la légitimité de ces hypothèses qui sont là pour rendre un calcul possible.

Si nous donnons le rapport du rayon des disques (déduit d'une mesure photométrique) et la période du phénomène, c'est un petit problème de taupin que de calculer la loi de variation de l'éclat.

Soit i l'inclinaison de plan de la trajectoire du compagnon sur le plan normal à la ligne de visée; soit a le rayon de sa trajectoire circulaire. L'équation de l'orbite projetée est :

$$x^2 + \frac{y^2}{\cos^2 i} = a^2.$$

Soit 1 et k les rayons des disques de l'étoile E et du compagnon.

La condition de tangence lors du minimum d'éclat fournit la relation :

$$a \cos i = 1 - k. \qquad (1)$$

Soit 1 et q l'éclat normal et l'éclat au moment du minimum; ils sont comme les surfaces découvertes de l'étoile principale. On a donc :

$$\frac{\pi}{\pi - \pi k^2} = \frac{1}{q}, \qquad k = \sqrt{1 - q}. \qquad (2)$$

Représentons les coordonnées du centre du disque du compagnon par :

$$x = a \cos u, \qquad y = a \cos i. \sin u.$$

La condition de tangence extérieure (début de la variation lumineuse) est que la distance des centres des disques égale la somme des rayons :

$$(1 + k)^2 = x^2 + y^2 = a^2 (\cos^2 u + \cos^2 i. \sin^2 u)$$
$$(1 + k)^2 = a^2 \cos^2 u + (1 - k)^2 \sin^2 u. \qquad (3)$$

Le mouvement du compagnon sur sa trajectoire circulaire est uniforme; donc l'angle u varie uniformément. Soit T la période totale du phénomène; soit 2τ la durée de sa variation.

Les valeurs de u correspondantes sont :

$$u = 90° \pm \frac{\tau}{T} 360°. \qquad (4)$$

u est donc connu; k est donné par l'équation (2); a est fourni par l'équation (3); enfin l'équation (1) donne i. Le problème est résolu.

Le lecteur déterminera la loi de variation de l'éclat.

3° — Pour Algol (β Persée) l'expérience donne :

$$T = 2^j\ 20^h\ 48^m; \qquad 2\tau = 9^h\ 12^m; \qquad k = 0{,}764.$$

A partir de ces données, on trouve :

$$a = 4{,}48, \qquad i = 87°.$$

Il est bien évident qu'on trouverait des nombres différents suivant les hypothèses sur la manière dont le compagnon passe sur l'étoile principale.

Conformément au principe de cette théorie, Vogel a trouvé que les raies spectrales d'Algol subissent un déplacement montrant une variation de la vitesse radiale de l'astre. Or si le compagnon tourne autour d'Algol, il faut qu'Algol tourne autour de son compagnon, de manière que le centre d'inertie du système soit fixe ou se meuve en ligne droite d'un mouvement uniforme.

C'est quand le compagnon est en A et en B, un quart de période avant et après le minimum, que sa vitesse radiale est maxima et minima : aux mêmes instants il en est de même pour la partie brillante du système. Effectivement les raies attribuables à l'hydrogène sont déplacées dans un sens un quart de période avant le minimum, en sens inverse un quart de période après.

Je reviendrai plus loin sur ce phénomène à propos des *étoiles spectroscopiques* (§ 75).

73. Étoiles doubles photométriques : type α Lyre.

Disons tout de suite comment on explique le phénomène, nous en comprendrons mieux ensuite la description.

Imaginons deux astres ovoïdes (ellipsoïdes de révolution allongés),

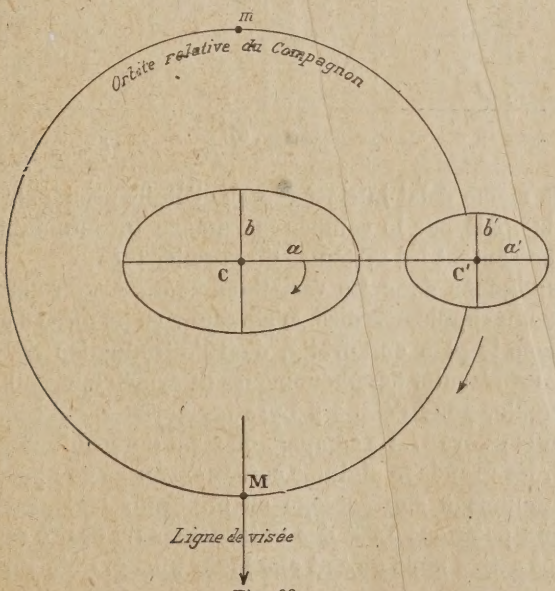


Fig. 66.

tournant l'un autour de l'autre de manière que les axes de révolution a et a' soient toujours dans le prolongement l'un de l'autre. Autrement

dit, les astres présentent invariablement l'un à l'autre les mêmes bouts de leurs axes de révolution. Pour simplifier la figure, maintenons fixe le centre d'inertie C de l'étoile principale ; posons que le centre d'inertie C′ du compagnon décrit une orbite circulaire.

Supposons enfin la ligne de visée dans le plan de l'orbite.

Quand l'étoile principale tourne, elle se projette sur le plan normal à la ligne de visée suivant une ellipse dont le petit axe est toujours égal à b, dont le grand axe oscille entre a et b. La surface lumineuse oscille donc entre πa^2 et πab du seul fait de la rotation de l'astre ellipsoïdal. De même pour le compagnon. Imaginons de plus que le compagnon

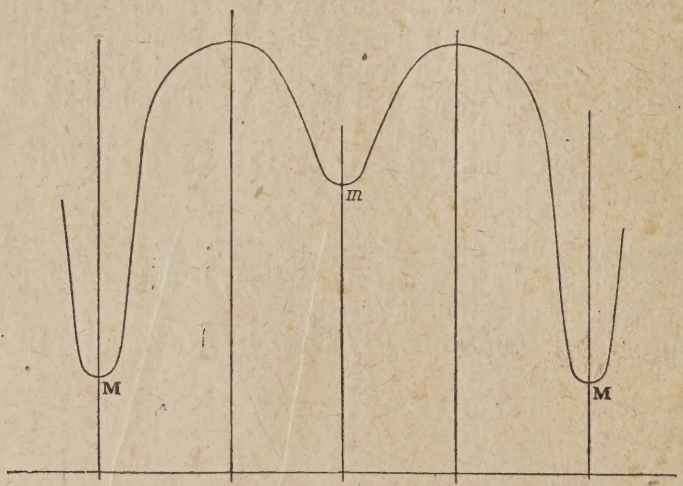


Fig. 67.

n'ait pas le même éclat intrinsèque que l'étoile principale : l'éclipse de l'étoile principale par le compagnon amène un minimum analogue à celui que présentent les systèmes du premier type.

Nous expliquons donc les variations continues d'éclat et l'existence d'un minimum supplémentaire. D'ailleurs rien ne force à mettre la ligne de visée dans le plan de l'orbite, d'où l'introduction de variables permettant de représenter des phénomènes dissymétriques plus compliqués.

Par exemple, pour l'étoile β Lyre les variations d'éclat sont représentées par la figure 67. Le compagnon étant moins lumineux que l'étoile principale, les grands minimums correspondent à son passage en M ; les petits minimums à son passage en m. Enfin les maximums correspondent aux positions à 90° des précédentes (la figure représente l'une d'elles) : les astres nous offrent alors leur plus grande surface totale.

74. Étoiles colorées.

Si l'étoile principale et son compagnon ne sont pas de la même couleur, au lieu d'observer des changements d'éclat, on observera des chan-

gements de couleur, lorsque les étoiles constituantes du système binaire passeront l'une sur l'autre.

Parfois les constituantes ont des couleurs quasi complémentaires; parfois l'étoile principale est blanche, le compagnon est bleu.

74 *bis*. **Étoiles doubles spectroscopiques.**

On appelle *étoiles doubles spectroscopiques* celles qui ne peuvent être dédoublées par les instruments puissants, *mais dont la vitesse radiale*

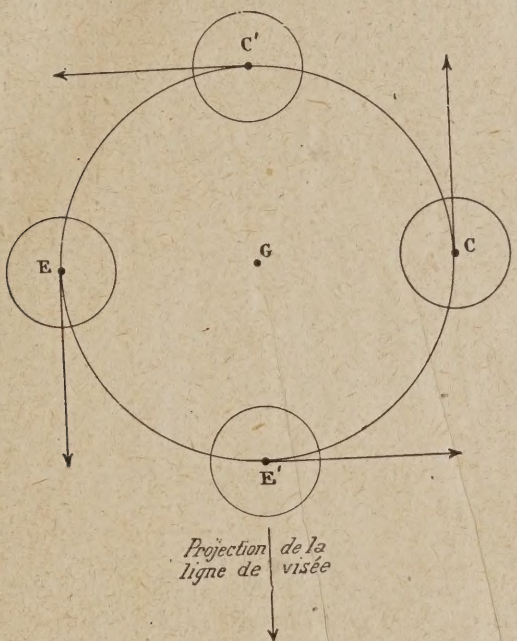


Fig. 68.

est variable : leur mouvement n'est donc pas rectiligne et uniforme; par suite il existe quelque action troublante, *puisque nous posons que la loi de la gravitation est générale*.

Voici l'image la plus simple qu'on puisse se faire d'une étoile double dont les étoiles constituantes sont également lumineuses et de même masse.

Imaginons qu'elles tournent sur la même orbite circulaire dont elles occupent à chaque instant les deux bouts d'un diamètre. Posons que la ligne de visée est dans le plan de l'orbite commune, ou peu inclinée sur cette orbite.

Lorsque les étoiles sont en E′ et en C′, la vitesse radiale est nulle : le spectre est unique. Lorsqu'elles sont en E et C, leurs vitesses radiales sont égales et de signes contraires : *le spectre est dédoublé*. Après une

rotation de 180°, le spectre est encore dédoublé, mais en sens contraire, ce dont on s'apercevra si les deux spectres ne sont pas de même intensité.

Le spectre est donc alternativement simple ou dédoublé; la période de dédoublement est moitié de la période de révolution.

Comme cas particulier un des spectres peut manquer, ce qui prouve que le compagnon est peu lumineux : nous retrouvons les phénomènes dont il est parlé au § 72 à propos d'Algol (β Persée).

Dans le cas où la trajectoire est elliptique, les phénomènes sont analogues. Mais en raison de la non-uniformité du mouvement autour du

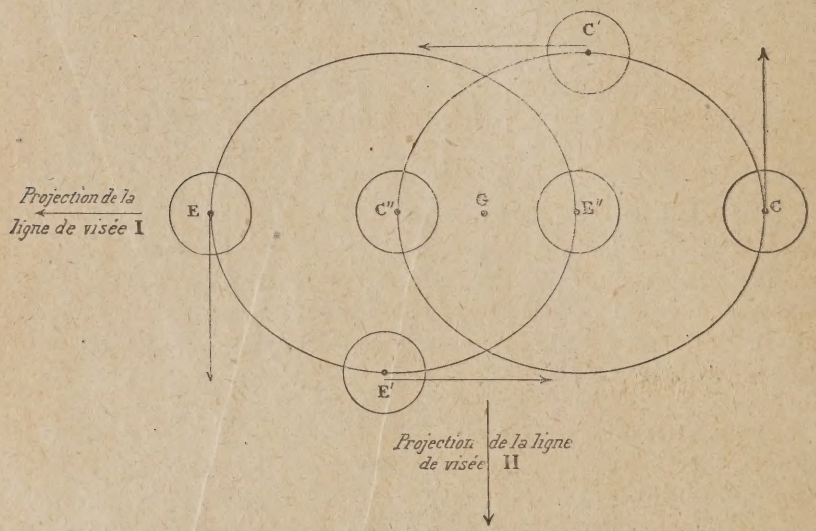


Fig. 69.

point G, foyer commun des ellipses, les maximums de dédoublement, qui correspondent aux positions C′ et E′ pour la ligne de visée projetée en I, sont séparés par des intervalles de temps inégaux. De même pour la ligne de visée en II. La symétrie du phénomène ne subsiste pas pour d'autres directions de la ligne de visée.

On conçoit la variété des phénomènes quand les étoiles constituantes du système sont inégales en éclats et en masses, quand la ligne de visée est quelconque, ainsi que l'inclinaison du plan des orbites sur le plan de projection (normal à la ligne de visée); je me fais scrupule de ne pas insister. L'idée est intéressante; laissons l'algèbre aux spécialistes.

CHAPITRE VI

LATITUDES ET LONGITUDES GÉOGRAPHIQUES

Dans ce chapitre je n'étudie que les méthodes utilisant le cercle méridien, les méthodes d'observatoires, celles qui présentent la plus grande précision. Je renvoie à mon Cours de *Géographie Mathématique* pour la description des méthodes utilisées par les marins, les explorateurs et les géographes. Elles sont plus simples, plus rapides, mais d'une moindre précision.

75. Précision des mesures.

Pour comprendre ce que signifient les résultats, rappelons quelques valeurs numériques.

1° — Très sensiblement le quart du méridien vaut 10 000 kilomètres. Assimilons la Terre à une sphère; nous aurons pour :

le degré	111,111 kilomètres
la minute (mille marin)	1 851,85 mètres
la seconde	30,864 mètres

Ainsi le dixième de seconde en latitude correspond à 3 mètres environ à la surface de la Terre. Je laisse à penser ce qu'il faut croire de la précision du centième de seconde d'arc, de la confiance qu'il faut attribuer aux chiffres des centièmes et des millièmes que les astronomes ne manquent pas de conserver : ce qui est ridicule. Le lecteur n'oubliera pas que ces 3 mètres ou ces 30 centimètres à la surface de la Terre sont reportés sur le cercle divisé dont se sert l'astronome. Si le cercle a 1 mètre de rayon, ce rayon est au rayon terrestre dans le rapport $1 : 6 \cdot 378\,000$. Sur un cercle d'un mètre de rayon, la seconde vaut $4\mu,85$, le dixième de seconde $0\mu,485$. Or au Pavillon de Breteuil, en prenant toutes les précautions imaginables pour définir la température, on ne garantit que le dixième de micron. Quand les astronomes, sur des

cercles exposés aux intempéries, dont la température n'est pas uniforme, prétendent mesurer le demi-micron (dans le cas d'un cercle d'un mètre de rayon), ils sont fous ou se paient notre tête. Ce n'est pas la Théorie des probabilités qui changera quoi que ce soit à ces vérités élémentaires.

J'ai sous les yeux un historique de la détermination de la latitude de Paris : elle est de $48^\circ\,50' + x''$.

En 1853 Laugier donne $x = 11'',27$. En même temps, mais avec un autre instrument, Mauvais trouve $x = 11'',88$.

Différence $0'',61$, soit 19 mètres.

En 1857, on trouve en moyenne $x = 11'',79$.

En 1858, $x = 12'',00$.

En 1887, $x = 11'',00$. C'est le nombre aujourd'hui adopté.

Concluons : toutes ces expériences sont admirables; l'homme est un être prodigieux; *mais les observations astronomiques les plus précises ne sont pas sûres au dixième de seconde d'arc.* Autrement dit, en admettant une foule de choses qui ne sont certainement pas exactes (en particulier que la verticale est la normale à l'ellipsoïde terrestre), les positions à la surface de la Terre ne sont pas connues à 3 mètres près. Mettons pour faire plaisir aux astronomes que l'indétermination est de $0'',2$ soit 6 mètres, et ne soyons pas dupes. Je montre d'ailleurs plus loin par un exemple ce qu'il en est des mesures non fondamentales.

2° — Passons aux longitudes. Nous avons vu qu'elles se déterminent par la différence des temps de passage d'une même étoile, au méridien du point considéré et au méridien origine.

En 24 heures sidérales l'étoile parcourt . . .	360°,
en une heure	$15^\circ = 900'$,
en une minute	$15' = 900''$,
en une seconde.	$15''$.

En sens inverse, on a :

1° exige un temps de		4 minutes,
$1'$	—	4 secondes,
$1''$	—	0,066 seconde.

On voit quelle précision il faut atteindre dans la mesure du temps pour obtenir la seconde d'arc.

Quant à la longueur d'arc à laquelle correspond une certaine précision dans la mesure du temps, elle dépend évidemment de la latitude (§ 115).

3° — Considérons le problème sous une autre face.

Pour fixer les idées observons sur un cercle d'un mètre de rayon, ce qui du reste est exagéré de près du double pour les cercles qui existent actuellement.

1° vaut. . . . . 17,45 millimètres sur le pourtour,
1′ — . . . . . 0,291 millimètres,
1″ — . . . . . 4,85 microns.

Pour obtenir la précision angulaire de 0″,2, il faut ne pas se tromper d'un micron (d'un demi-micron pour les cercles d'un mètre de diamètre).

Dans le plan focal principal d'une lunette de 3 mètres de distance focale (ce sont les dimensions habituelles des lunettes méridiennes), la minute d'angle vaut 0,9 millimètre environ, la seconde vaut 15 microns. Cela paraît énorme, mais il ne faut pas oublier qu'une image d'étoile ne se pointe pas comme un trait de graduation (voir le § 45 sur la précision des mesures en ascension droite).

76. **Mesure de la latitude au cercle méridien.**

Deux cas à considérer.

1° — On se sert des étoiles fondamentales dont par hypothèse on connaît les déclinaisons D (fig. 70).

L'expérience consiste à mesurer la distance zénithale lors du

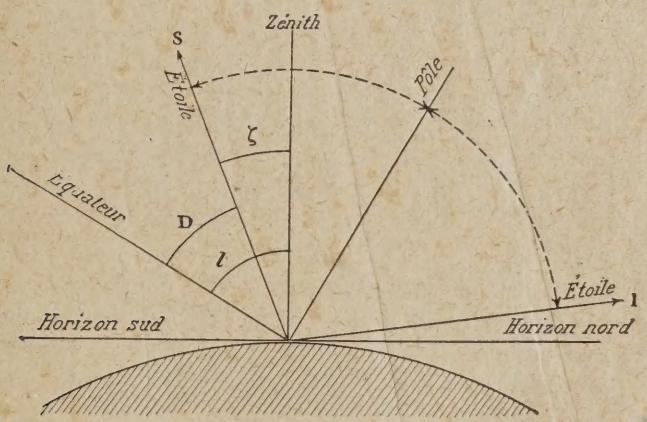


Fig. 70.

passage du méridien supérieur S ou inférieur I. On a suivant le cas :

$$l = D + z, \qquad l = \pi - (D + z).$$

z est maximum ou minimum lors du passage au méridien; une petite erreur de réglage de la lunette en azimut n'a pas grande importance. Mais il faut déterminer le nadir avec le plus grand soin (au moyen de bain de mercure) plusieurs fois par soirée. Comme la réfraction est d'une correction toujours incertaine, on n'utilise que des étoiles qui passent à moins de 35° du zénith. Pour éliminer les erreurs de flexion, on retourne la lunette sur ses coussinets d'un soir à l'autre, ou encore

on observe deux étoiles qui passent au méridien l'une au sud, l'autre au nord, à peu près à la même distance du zénith.

Malgré tout, les mesures ne sont concordantes qu'à quelques secondes près. J'ai sous les yeux un mémoire de Perrotin sur la latitude de l'Observatoire de Nice par la méthode que nous étudions.

La latitude est $43^\circ\ 43'\ x''$.

Suivant les étoiles utilisées, x varie de 18″,95 pour τ Hercule, à 14″,38 pour 1 H Petite ourse. Soit plus de 4″ de différence.

Quand après cela on nous assure que la latitude est $43^\circ\ 43'\ 16''{,}9$, nous avons des doutes sur l'exactitude du 9, pour ne pas dire sur celle du 6.

2° — On ne suppose rien de connu.

Nous rencontrons alors toutes les difficultés inhérentes à la détermination précise de la position du pôle, ou si l'on veut, à la détermination des coordonnées des étoiles fondamentales.

Comme je les étudie précédemment en détail, je n'insiste pas.

77. **Invariabilité de la latitude.**

Je reviens longuement sur la question dans ma *Géographie Mathématique*.

Pour l'instant précisons un point fondamental.

Nous appelons *latitude* le complément de l'angle que fait la verticale d'un lieu avec l'axe instantané de rotation : c'est la seule définition précise. Si l'axe instantané ne coupe pas la Terre en deux points toujours les mêmes, la latitude varie. D'après la manière de déterminer la latitude, si les variations de l'axe instantané sont rapides, la définition *expérimentale* de la latitude perd *théoriquement* tout sens précis.

Or *en vertu de la précession*, il est incontestable que l'axe instantané décrit en 24 heures sidérales un petit cône autour de l'axe principal d'inertie de la Terre. On peut en effet considérer le mouvement de la Terre autour de son centre d'inertie comme déterminé par le roulement d'un petit cône lié à la Terre, sur un cône fixe, tous deux de révolution et dont les sommets sont au centre d'inertie : la génératrice de contact est l'axe instantané. Fort heureusement l'angle au sommet de ce petit cône est négligeable à la précision des mesures de latitude. On trouve aisément qu'en un jour sidéral le pôle vrai décrit un cercle de 26 cm. de rayon autour du pôle moyen (trace de l'axe principal d'inertie).

Pour tenir compte de la nutation, il faut prendre un cône fixe ondulé et un cône mobile un peu différent du cône de révolution : le résultat reste du même ordre.

Mais la précession et la nutation ne sont pas les seules causes possibles de variation pour la latitude. En fait elle semble varier d'une très petite quantité (de l'ordre de 0″,5) avec une période de 427 jours.

78. Difficulté de la mesure des longitudes.

Les cartes anciennes, toujours à peu près correctes en latitude, sont extraordinairement erronées en longitude. C'est que la mesure d'une longitude implique la mesure d'un temps.

Comme conséquence de la rotation de la Terre, les mêmes étoiles ne se lèvent pas et ne se couchent pas au même instant pour tous les points de notre globe. Assimilons le Soleil à une étoile (ce qui n'est que grossièrement exact en raison de son déplacement relativement rapide par rapport à ces astres); nous savons que le Soleil se lève à Paris plus tard qu'à Nancy, plus tôt qu'à Brest. Or la longitude est liée à ces avances et à ces retards, sa mesure implique que nous sachions non seulement ce qui se passe où nous sommes, mais ce qui se passe *au même instant* dans un autre lieu.

A la vérité Hipparque remarqua (dès le IIe avant J.-C.) que les éclipses de Lune fournissent un signal qui, visible à la fois d'un grand nombre de lieux, permet de comparer les *heures sidérales locales*, c'est-à-dire les heures pour lesquelles l'horloge du lieu marque $0^h\ 0^m\ 0^s$ au passage d'une certaine étoile au méridien de ce lieu (déterminé par la méthode des hauteurs égales). Or, de la différence des heures locales on déduit immédiatement la longitude.

Le procédé qui a servi le plus communément jusqu'à ces dernières années, consistait à emporter du lieu A au lieu B un chronomètre chargé de conserver l'*heure locale* du lieu A. Je rappelle que les *montres* ou horloges portatives firent leur apparition vers 1500; mais elles étaient réglées par un simple moulinet à ailettes : leur marche était très irrégulière. Huyghens leur appliqua le ressort spiral vers 1674; mais ce n'est qu'au milieu du XVIIIe siècle que l'Anglais Harrison parvint à construire un garde-temps ne variant pas sensiblement : son chronomètre conservait l'heure à une minute près en six mois.

On a fait depuis infiniment mieux, il va sans dire.

Aujourd'hui le problème est transformé par suite de l'invention de la télégraphie avec et sans fil. Si les marins reçoivent les signaux de la Tour Eiffel à des heures connues de temps moyen, il est clair que leurs chronomètres n'ont plus besoin de garder le temps que d'un jour à l'autre. C'est ainsi qu'une découverte nouvelle rend inutile ce qui avait coûté des siècles d'efforts.

Ce n'est pas à dire que les longitudes étaient inconnues avant le milieu du XVIIIe siècle; mais elles étaient déterminées par une méthode analogue à celle d'Hipparque : occultations des satellites de Jupiter (Galilée), passages de Mercure, occultations des étoiles, distances lunaires..., phénomènes visibles simultanément d'un grand nombre de points de la surface terrestre et que nous étudierons plus loin.

79. **Mesure de la longitude au cercle méridien. Méthode des parleurs.**

1° — En principe rien de plus simple. Pour faciliter le langage, supposons qu'il s'agisse des observatoires de Paris et de Nice. Les astronomes de ces observatoires règlent leurs horloges en temps sidéral local, de manière qu'elles marquent la même heure lorsqu'une certaine étoile E passe dans leurs méridiens respectifs. Ceci fait, ils déterminent l'*avance* de l'horloge de Nice par rapport à l'horloge de Paris.

Ils trouvent par exemple que l'horloge de Nice avance de $19^m\ 51^s,51$ sur celle de Paris; d'où ils concluent que la longitude de Nice est *orientale* et vaut $4°\ 57'\ 53''$.

Ce schéma donne une idée très simple de l'opération réelle; étudions-en la technique.

On a donc à effectuer deux groupes d'opérations si distinctes (bien que simultanées) qu'elles sont parfois confiées à des groupes d'observateurs indépendants : *le réglage des horloges en temps sidéral local*, *la comparaison des horloges*.

La première opération implique la détermination du méridien local, puis la détermination de l'heure du passage d'une ou plusieurs étoiles dans ce méridien, par rapport à l'heure de la pendule. Cette heure est définie, soit par le bruit des battements, soit par les instants où la pendule émet des courants, définition toujours plus ou moins incertaine. La première opération est en définitive (mais avec des appareils parfois très différents) l'observation des passages telle qu'on la fait journellement dans les Observatoires à la lunette méridienne.

La seconde opération consiste à créer des signaux qui soient entendus ou enregistrés (avec des retards plus ou moins grands mais calculables) par les deux Observatoires. Ils servent de repères pour la comparaison des horloges.

Dans les méthodes anciennes les deux groupes d'opérations sont quasi confondues, comme on va le voir par la description suivante.

2° — Un procédé très simple consiste à relier électriquement à la même horloge deux ou plusieurs *parleurs* (*Description...*, § 267); ils sont intercalés avec l'horloge sur le même circuit formé par des lignes télégraphiques mises en série. Ils sont placés dans les observatoires dont on veut les longitudes relatives. Les astronomes s'en servent comme d'horloges pour déterminer les différences des temps de passage des mêmes étoiles. C'est en définitive comme si la même horloge se trouvait simultanément à portée des oreilles des observateurs dont la distance peut être, par exemple, 600 kilomètres (Paris-Brest). On imagine aisément des procédés simples évitant de confondre les secondes entre elles; par exemple, les parleurs commencent à fonctionner au début d'une *certaine* minute; on les arrête à des intervalles connus pour que les astronomes puissent *reprendre* la seconde. Pendant

les observations on étudie avec soin la marche de l'horloge mère (*horloge directrice*), celle qui produit les contacts émetteurs des courants, contacts qui ferment la ligne télégraphique.

Deux causes d'erreur se présentent.

3° — ÉQUATION PERSONNELLE DES OBSERVATEURS.

La première est l'*équation personnelle* des observateurs. Nous savons (*Description...*, § 259), qu'il existe un certain décalage e entre le passage de l'astre sous les fils et l'instant déterminé par l'œil et l'oreille; ce décalage, à peu près constant pour chaque observateur, varie d'un observateur à l'autre. La différence des *équations personnelles* e intervient comme erreur dans la différence des temps de passage.

Deux procédés éliminent théoriquement cette erreur.

a) Dans le premier, les observatoires échangent leurs astronomes.

Soit $H_1 + e$, $H'_1 + e'$, les heures déterminées dans la première affectation; d'où la longitude :

$$L_1 = (H'_1 - H_1) + (e' - e).$$

Dans la seconde affectation, les heures sont : $H_2 + e'$, $H' + e$.

D'où la longitude :

$$L_2 = (H'_2 - H_2) + (e - e').$$

La somme :

$$L_1 + L_2 = (H'_1 - H_1) + (H'_2 - H_2),$$

représente le double de la longitude vraie.

b) Dans le second procédé, les observateurs déterminent la différence de leurs équations personnelles. Ils opèrent à la même lunette dont le réticule a, par exemple, 9 fils d'ascension droite (§ 46), de distances connues. L'un des observateurs détermine les temps de passage d'une étoile aux quatre premiers fils, l'autre aux quatre derniers. L'intervalle de temps entre les passages aux divers fils, de l'ordre de 15 à 20^s (ordinairement), permet aisément l'échange des observateurs.

On admet que la variation des équations personnelles est la cause des irrégularités qui se présentent habituellement dans la mesure des longitudes.

Pour prendre un exemple célèbre, la longitude relative de Greenwich, par rapport à Paris, est de $9^m\,21^s$, plus une fraction qui, dans la détermination la plus récente (1910) a varié de 0,082 à 0,375.

L'incertitude est de $0^s,3$; et encore il s'agit de moyennes!

c) Il ne faut pas que le lecteur se fasse illusion sur la valeur de ces procédés théoriques d'élimination des équations personnelles.

Un savant est habitué à son laboratoire; s'il en change, il est dépaysé; la finesse de ses organes s'émousse, il travaille mal.

Les appareils des deux observatoires ne sont généralement pas iden-

tiques; or, l'observateur finit par faire corps avec son instrument habituel, de même qu'un mécanicien de chemin de fer finit par épouser sa machine.

Les raisonnements théoriques sur l'élimination des erreurs sont vrais sur le papier : ils oublient la plupart des conditions réelles. Aussi les astronomes qui ne sont pas idiots (il en existe), se méfient de ces échanges et autres balivernes qui font la joie des imbéciles et des expérimentateurs de carton pâte. Quand on vantera devant vous ces fichaises, méfiez-vous de votre interlocuteur : il ne connaît pas son métier.

Le second procédé est lui-même illusoire, non pas si l'on veut pour éliminer des équations personnelles d'une seconde (cela se rencontre, voir mon Cours sur la *Description...*,), mais pour le dixième de seconde. Encore une fois l'instrument et l'état physiologique actuel interviennent.

4° — ÉQUATION PERSONNELLE DES PARLEURS.

La seconde cause d'erreur particulière à la méthode étudiée est l'existence d'une *équation personnelle* des parleurs. Ils sont en retard *de quantités très différentes* sur l'instant théorique du début de l'émission du courant; peu importe la grandeur du retard qui s'éliminerait dans la différence : c'est l'*inégalité* des retards qui intervient seule.

L'équation personnelle des parleurs est de deux espèces.

a) La question est d'abord de savoir si des électros, placés dans le même circuit, à grande distance l'un de l'autre, parlent en même temps, à supposer qu'ils soient identiques et réglés aussi identiquement que possible. Il semble qu'oui, à la précision du dixième de seconde, qu'il est difficile de dépasser dans la présente méthode. Cela revient à dire que le courant a *pratiquement* la même intensité, au même instant, en tous les points du circuit; ce qu'admet la théorie élémentaire.

b) En second lieu les parleurs doivent être identiques de construction et de réglage. Pour s'assurer de leur identité, il suffit de les placer côte à côte et de vérifier qu'ils sont synchrones, ce que l'oreille estime aisément à un centième de seconde près. Aussi bien rien n'empêche de les échanger, comme nous avons dit ci-dessus pour les astronomes eux-mêmes, à la différence près que les parleurs sont moins impressionnables.

80. Emploi d'un chronographe à bande.

1° — Les temps sont enregistrés sur un chronographe à bande analogue au récepteur Morse (voir *Magnétisme et Électricité*, II, § 300). Une bande se déroule d'une manière sensiblement uniforme; les armatures des électros tracent dessus des coches à l'instant où un courant commence à les traverser. Chaque appareil contient deux électros; l'un est actionné par l'horloge et divise la bande en secondes; l'autre est actionné par un manipulateur à main. La détermination du temps d'un

phénomène consiste à repérer le trait qui lui correspond, par rapport aux traits des secondes tracés par l'horloge.

2° — La méthode a été utilisée entre Paris et Bourges de la façon très simple que voici. On n'employait qu'un seul enregistreur à deux plumes. Il se trouvait à Paris, on enregistrait dessus les secondes, les temps de passage à Paris et les temps de passage des mêmes étoiles à Bourges. Les causes d'erreur sont exactement les mêmes qu'avec la méthode du paragraphe précédent, à la différence que l'équation personnelle est maintenant celle de la méthode *de l'œil et de la main*, et non plus celle de la méthode *de l'œil et de l'oreille* (voir *Description...*).

Cette équation dépend de la manière d'observer. Certains astronomes frappent la touche du manipulateur quand l'étoile a bissecté le fil; d'autres s'efforcent de faire coïncider le toc avec l'instant de la bissection. On détermine la correction par la méthode indiquée plus haut, *dans les limites où elle est déterminable.*

3° — L'armature d'un électro obéit évidemment avec un certain retard. Dans les expériences précédentes, on admet implicitement que les retards sont les mêmes pour les passages pointés à Bourges et à Paris : ils se détruisent dans la différence des temps. Mais quand les lignes télégraphiques sont très longues, quand surtout il est nécessaire d'user de relais et de translateurs (voir *Magnétisme et Électricité*, II, § 299), on ne peut plus admettre que les signaux envoyés de Paris, par exemple, s'enregistrent en même temps à Paris et à Vienne (Autriche). Pour corriger les résultats du retard *provenant de la transmission*, il devient nécessaire de doubler les appareils et d'enregistrer les observations simultanément aux deux bouts de la ligne.

Un signal envoyé de Paris au temps H_1 (heure sidérale de Paris), s'enregistre à Paris au temps $H_1 + \eta$, à Vienne au temps $H_1 + L + \eta + \varphi$ (heure sidérale de Vienne); L est la longitude ouest de Paris par rapport à Vienne.

Un signal envoyé de Vienne au temps H_2, s'enregistre à Vienne au temps $H_2 + \eta$, à Paris au temps $H_2 - L + \eta + \varphi$.

La différence des premiers temps est $L + \varphi$, la différence des seconds est $L - \varphi$; la somme des deux résultats est le double de la longitude vraie.

Tout cela en théorie. La meilleure preuve que les opérations n'ont pas cette régularité schématique est l'écart de plus de $0^s,3$ dans les déterminations isolées de la longitude relative de Greenwich et de Paris.

4° — En définitive le problème de la détermination des longitudes est ramené à un simple problème mécanique et électrique : transporter le battement d'une horloge à une distance quelconque. Dans les plus récentes déterminations des longitudes, le téléphone apparaît. Tant que les inscriptions de passage ne se feront pas automatiquement, il semble que le téléphone soit le procédé le plus simple pour comparer les

battements de deux horloges éloignées. Or si les horloges sont réglées l'une sur l'autre, la longitude s'ensuit immédiatement.

81. Emploi de la télégraphie sans fil.

La différence de longitude entre Paris et Washington vient d'être effectuée par la télégraphie sans fil. Décrivons la méthode en la schématisant.

Rien à ajouter sur le réglage des horloges en temps sidéral local. Pour simplifier, supposons les parfaitement réglées et marquant toutes deux $0^h\ 0^m\ 0^s$ quand une certaine étoile passe dans leurs méridiens respectifs.

Reste à comparer les horloges. Comme le procédé est décrit tout au long dans mon *Cours de Chronométrie*, j'en indique seulement le principe. Pour mettre les choses au mieux, supposons qu'un poste de T. S. F., situé à peu près à égale distance des points P et W (il serait dans les Açores), émette une série de signaux espacés de 0,99 seconde sidérale. Les signaux sont entendus des points P et W à peu près avec la même intensité; on les compare aux battements des horloges sidérales *par la méthode des coïncidences*. Il y a coïncidence tous les 100 signaux et les 99 secondes.

Le lecteur comprend sans peine que de la détermination du numéro d'ordre des signaux qui coïncident périodiquement avec les battements de l'horloge P, on puisse déduire (au centième de seconde près) l'heure à l'horloge P d'un signal de numéro d'ordre donné, du signal 1 pour préciser. On peut de même déterminer l'heure du même signal 1 à l'horloge W. D'où la comparaison des horloges P et W, puisque l'on connaît à ces horloges les heures d'un même signal.

En fait l'opération fut compliquée comme à plaisir d'un tas de comparaisons accessoires qui sont loin d'en faire un modèle. Il me suffira de dire que les déterminations isolées diffèrent de plus de $0^s,3$ pour que le lecteur sache ce que valent les millièmes de seconde du nombre *définitif* (!?) :

$$5^h\,17^m\,36^s,651 = 79^o\,24'\,9'',76$$

Il n'existe pas de poste de T. S. F. aux Açores dont on puisse commodément se servir; on utilisait donc les signaux émis à Paris et à Washington; on les recevait dans des téléphones. Inutile de dire que les comparaisons étaient difficiles, les signaux émis à Paris s'entendant fort bien à l'Observatoire de Paris, mais assez mal à Washington, et inversement. Les émissions duraient une demi-seconde et se faisaient par séries de 420, en supprimant les signaux de numéros d'ordre 60, 120, 180, 240, 300, 360, ce qui permet le numérotage.

Pour ce qui est de l'enregistrement des signaux radiotélégraphiques, on se reportera à mon *Cours de Chronométrie*.

82. **Positions des observatoires astronomiques et météorologiques français.**

NOM	LATITUDE	LONGITUDE	ALTITUDE
Alger (Observatoire)	36° 47′ 50″ B	0° 41′ 54″ E	342m,5
Alger (Hôtel de Ville)	36 47 B	0 44 E	38 ,5
Besançon	47 14 59 B	3 39 2 E	312
Bordeaux	44 50 7 B	2 51 37 O	73
Brest (Ob. de la Mar.)	48 23 32 B	6 49 50 O	41
Juvisy	48 41 37 B	0 2 1 E	84 ,6
Lyon	45 41 41 B	2 26 54 E	299
Marseille (Nouv. Ob.)	43 18 17 B	3 3 24 E	75
Meudon	48 48 18 B	0 6 21 O	162
Mont Mounier (sig.)	44 9 18 B	4 38 8 E	2 740
Mont Ventoux	44 17 B	2 56 E	1 900
Nantes	47 15 B	3 54 O	41 ,4
Nice	43 43 17 B	4 57 48 E	378
Parc-Saint-Maur	48 48 34 B	0 9 23 E	49 ,3
Paris (Observatoire)	48 50 11 B	0 0 0	67
Paris (Montsouris)	48 49 18 B	0 0 5 O	77
Perpignan	42 42 B	0 33 E	31 ,7
Pic-du-Midi	42 56 17 B	2 11 43 O	2 859
Puy-de-Dôme (plaine)	45 46 B	0 45 E	388
Puy-de-Dôme (sommet)	45 46 28 B	0 37 47 E	1 467
Toulon (Ob. de la Mar.)	43 7 37 B	3 35 12 E	37
Toulouse	43 36 45 B	0 52 45 O	194

LE SOLEIL

CHAPITRE I

MOUVEMENTS CONIQUES SUIVANT LA LOI DES AIRES

Dans ce chapitre je déduis les conséquences des postulats suivants (lois de Képler) :

Les planètes décrivent des ellipses dont le Soleil occupe l'un des foyers. Leur vitesse est telle que le rayon vecteur les joignant au Soleil balaie des aires proportionnelles au temps (*loi des aires*).

Nous généraliserons les résultats pour des coniques quelconques; nous montrerons par quelles formules (de première approximation) on peut calculer la position des mobiles.

83. Équations polaires et différentielles des coniques.

1°. — Ellipse.

Soit l'ellipse :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1; \quad \text{nous posons :} \quad \overline{OD}=a, \quad \overline{OG}=b.$$

La distance $\overline{OF}$ du centre aux foyers est :

$$c=\sqrt{a^2-b^2}.$$

L'*excentricité* est par définition :

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}; \quad \text{d'où :} \quad b=a\sqrt{1-e^2}.$$

Transportons l'origine au foyer F ; l'équation de l'ellipse devient :

$$\frac{(x+c)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Transformons en coordonnées polaires : $r=\overline{FB}$, $\theta=PFB$.

On trouve aisément :

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}, \qquad (1)$$

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right) = -\frac{r^4}{a^2(1-e^2)} + \frac{2r^3}{a(1-e^2)} - r^2. \qquad (2)$$

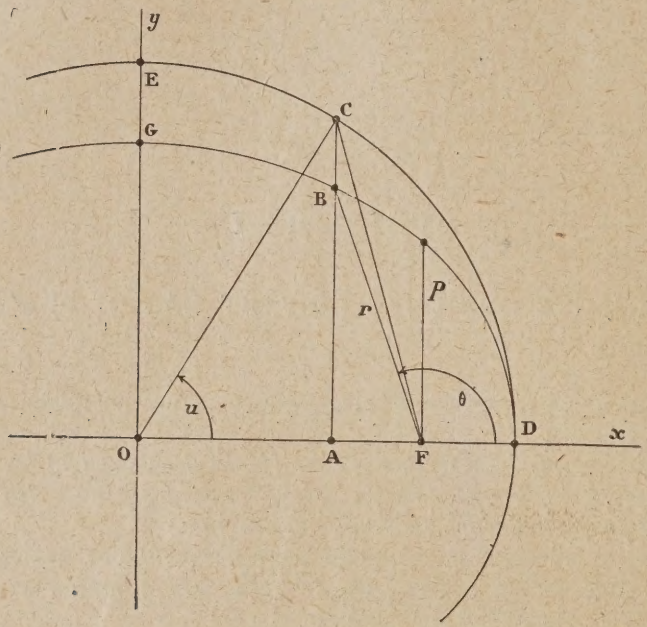


Fig. 71.

On appelle *paramètre* p de l'ellipse l'ordonnée au foyer; c'est la valeur de r pour $\theta = 90°$:

$$p = a(1-e^2) = b^2 : a.$$

D'où :

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos\theta.$$

2°. — HYPERBOLE.

L'hyperbole rapportée à son foyer F (fig. 72) a pour équation :

$$\frac{(x-c)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; \qquad c = \sqrt{a^2+b^2}, \qquad e = \frac{c}{a}.$$

L'excentricité est > 1. Introduisons les coordonnées polaires r, θ :

$$r = \frac{a(e^2-1)}{1+e\cos\theta}. \qquad (1')$$

Pour $\theta = 0$, $r = \overline{FD} = c - a$.

Pour $\theta = \theta_0$ défini par la condition $1 + e\cos\theta_0 = 0$, on a $r = \infty$.

La valeur de θ_0 est réelle en vertu de l'hypothèse $e > 1$.

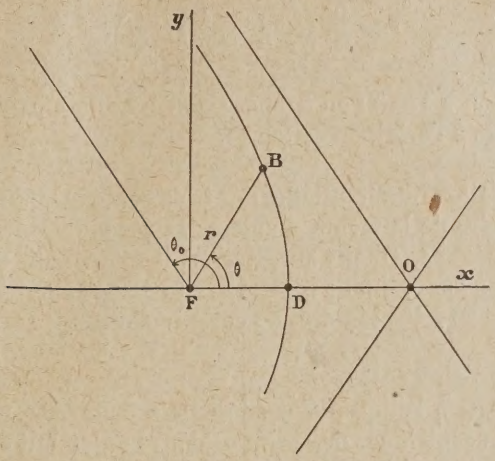


Fig. 72.

L'équation différentielle équivalente à (1') est :

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{r^4}{a^2(e^2-1)} + \frac{2r^3}{a(e^2-1)} - r^2. \qquad (2')$$

3° — Parabole.

Rapportée à son foyer, la parabole a pour équation (fig. 73) :

$$y^2 = p^2 - 2px,$$

qu'on peut identifier avec :

$$r = \frac{p}{1+\cos\theta}. \qquad (1'')$$

Quand θ varie de 0 à π, r passe de $\overline{FD} = q = p:2$ à ∞ ;

q est la *distance périhélie*.

L'équation différentielle devient :

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{2r^3}{p} - r^2. \qquad (2'')$$

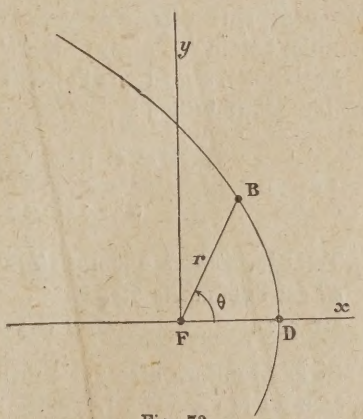


Fig. 73.

Parcourons la courbe de manière que les aires balayées par le rayon vecteur soient proportionnelles au temps. Relions r et θ au temps t. On a :

$$r^2 d\theta = C dt, \qquad dt = B\frac{d\theta}{(1+\cos\theta)^2},$$

où B est une constante. L'intégrale est :

$$t = \frac{B}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{\theta}{2}\right).$$

Pour $t = 0$, on a $\theta = 0$: on suppose que le mobile passe au sommet D de la parabole à l'origine des temps.

Remarque.

Dans les équations différentielles des trois coniques rapportées à leurs foyers et tournées de la même manière, le second terme est positif, le troisième est négatif. Quant au premier, il est négatif pour l'ellipse; il disparaît pour la parabole; il est positif pour l'hyperbole.

Nous verrons au § 163 l'intérêt de cette remarque.

84. **Problème de Képler.**

1° — Revenons à l'ellipse. Considérons-la comme la projection d'un cercle DCE concentrique, de rayon a, dont le plan fait avec le plan de l'ellipse l'angle de cosinus $b : a$.

A tout point de l'ellipse B correspond un point C du cercle et un angle u :

θ est l'*anomalie vraie*,

u est l'*anomalie excentrique* (comptée à partir du centre),

ωt que nous définirons ci-dessous, est l'*anomalie moyenne*.

Le mot *anomalie* signifie *inégalité*; mais il désigne en Astronomie l'angle qui sert à calculer l'inégalité : admirable utilité des étymologies!

Il s'agit d'exprimer θ en fonction du temps de manière que la loi des aires soit satisfaite, c'est-à-dire que le vecteur FB qui relie le foyer au mobile, balaie des aires proportionnelles au temps.

Écrivons d'abord que l'aire FCD *prise dans le cercle* varie proportionnellement au temps :

$$\overline{\text{FCD}} = \overline{\text{OCD}} - \overline{\text{OCF}} = \frac{a^2}{2}(u - e\sin u) = Ct,$$

$$u - e\sin u = \omega t, \qquad \omega = 2\pi : T; \tag{3}$$

T est la *période anomalistique* du mouvement;

ωt est l'*anomalie moyenne*.

On a : $\overline{\text{FBD}} = \overline{\text{FCD}}.(b : a)$.

Si la première aire varie proportionnellement au temps, il en est de même de la seconde. L'équation (3) résout donc le problème, à la condition de relier les coordonnées r et θ à l'angle u, *anomalie excentrique*.

D'après (1) et dans les triangles OCA et FBA, on a :

$$\overline{\text{FA}} = r\cos\theta = \overline{\text{OA}} - \overline{\text{OF}} = a\cos u - ea,$$

$$r(1 + e\cos\theta) = r + ea\cos u - e^2 a = a(1 - e^2),$$

$$r = a(1 - e\cos u). \tag{4}$$

Substituons à r sa valeur dans (1); il vient :

$$\cos u = \frac{e + \cos\theta}{1 + e\cos\theta}, \qquad \operatorname{tg}^2\frac{u}{2} = \frac{1-e}{1+e}\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}. \tag{5}$$

La deuxième formule s'obtient en formant les expressions :

$$1 - \cos u, \qquad 1 + \cos u,$$

et en divisant membre à membre.

On vérifiera la relation :

$$r\sin\theta = b\sin u = a\sqrt{1-e^2}\sin u.$$

2° — Problème de Képler.

Étant donné l'anomalie moyenne ωt (produit du temps par une constante, secteur balayé par le rayon vecteur de l'astre), trouver l'anomalie vraie θ (angle du vecteur avec le grand axe de l'ellipse).

Commençons par développer l'anomalie excentrique u en fonction du temps. Profitons de ce que l'excentricité e est petite, pour obtenir une série suivant les puissances croissantes de e. On a :

$$u = \omega t + e\sin u.$$

Comme première approximation, posons $u = \omega t$:

$$u = \omega t + e\sin\omega t.$$

Continuons; on a :

$$u = \omega t + e\sin[\omega t + e\sin\omega t].$$

En se bornant aux termes en e, on a :

$$\sin[\omega t + e\sin\omega t] = \sin\omega t + e\sin\omega t.\cos\omega t.$$

D'où :

$$u = \omega t + e\sin\omega t + \frac{e^2}{2}\sin 2\omega t.$$

Pour $e = 0{,}0168$, on a $e^2 : 2 = 0{,}000141$; le troisième terme du développement est donc déjà très petit.

Le problème de développer θ en fonction du temps s'appelle *problème de Képler*, non parce que Képler l'a résolu, mais parce qu'il en a donné une solution approchée.

Lagrange a trouvé une série générale qui fournit le développement cherché.

85. Hypothèse elliptique simple.

Tycho admettait que la Terre décrit une trajectoire circulaire mais dont le Soleil S n'est pas le centre. Pour calculer la position de la Terre sur ce cercle, il utilisait un angle *variant proportionnellement au temps*, mais dont le sommet S′ ne coïncide ni avec le Soleil ni avec le centre C du cercle. Le point S′ s'appelait *point d'égalité*.

Tycho arrivait ainsi à représenter le mouvement de la Terre avec une très grande approximation.

Il est évident que nous devons retrouver quelque chose d'analogue dans les hypothèses exactes. C'est aussi bien la marche que suivit Képler : il corrigea l'hypothèse de Tycho.

L'interprétation de la formule approchée :

$$\theta = \omega t + 2e \sin \omega t,$$

(pour e petit) est connue sous le nom d'*hypothèse elliptique simple.*

Raisonnons pour les mouvements apparents.

Voici le résultat, dont la démonstration est immédiate.

Quand le point S *se déplace sur l'ellipse suivant la loi des aires pour le vecteur* TS *issu du centre de la Terre* (*foyer* T *de l'ellipse*), *le vecteur* FS *issu de l'autre foyer* F *tourne avec une vitesse constante* ω.

La proposition est exacte aux termes de e^2 près. Elle est commode pour se rendre immédiatement compte de la nature de certains phénomènes et de leur ordre de grandeur (par exemple, voir les §§ 219 et 313).

On trouve dans Lalande à propos de Képler la phrase suivante dont le lecteur comprendra immédiatement le sens : « C'était une découverte importante que d'avoir démontré la bissection de l'excentrique pour la Terre. » Képler en effet montra que pour représenter au mieux les observations, il fallait mettre la Terre T, le centre C de l'orbite (circulaire ou elliptique, peu importe pour l'instant) et le point d'égalité F *en ligne droite, et de manière qu'on ait* : $\overline{TC} = \overline{CF}$.

Pour mon but qui est de faire l'éducation scientifique de mon lecteur par l'étude de l'Astronomie et non pas de bluffer avec une précision pédagogiquement stupide (les arbres empêchent de voir la forêt) et du reste inatteignable dans un cours, la formule :

$$\theta = \omega t + 2e \sin \omega t,$$

est largement suffisante. Je le prouverai dans un instant par la comparaison de ses résultats et des positions apparentes du Soleil sur son orbite. Toutefois je dirai quelques mots des procédés de résolution de l'équation complète, en raison de leur intérêt propre et non pas que j'aie l'intention de m'en servir.

86. Procédé graphique pour résoudre l'équation de Képler.

1° — Soit à résoudre l'équation :

$$u = m + e \sin u.$$

Dans le problème réel u est l'inconnue, m est la variable, e est un paramètre constant.

Considérons le problème auxiliaire dans lequel $m = y$ est la fonction (ordonnées), $e = x$ est la variable (abscisses); u est un paramètre constant. Nous avons la droite :

$$x \sin u + y - u = 0.$$

Construisons cette droite pour les valeurs successives $u = 0°$, 5°, 10°,... 180°.

Nous avons ainsi 37 droites D qui correspondent respectivement

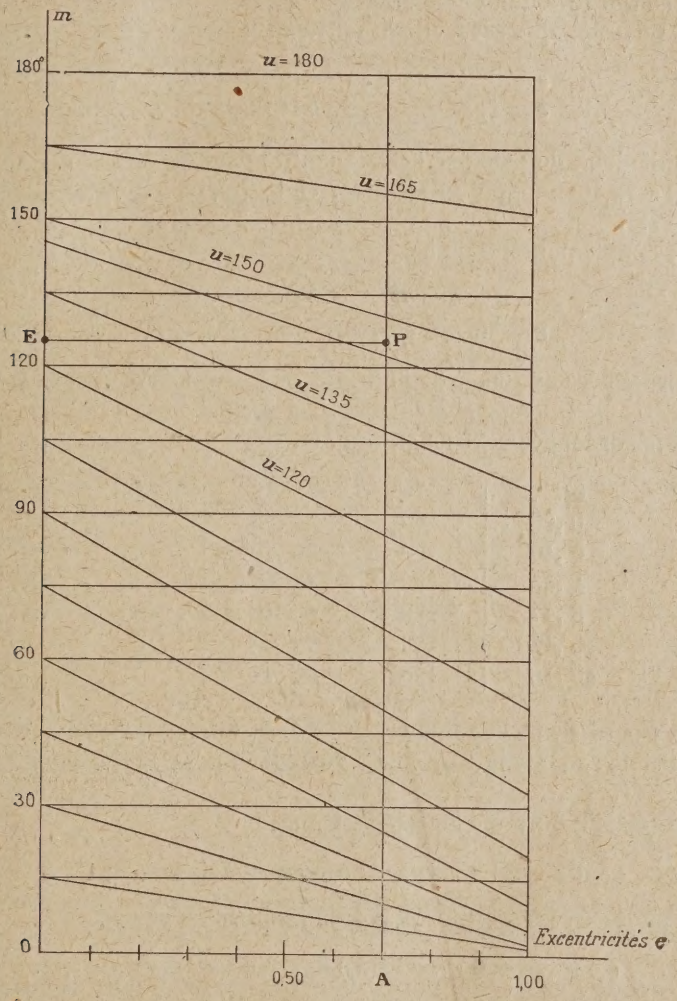


Fig. 74.

à une valeur particulière de l'anomalie excentrique u (la figure 74 n'en porte que 13).

Ceci posé, donner l'excentricité revient sur le graphique à se promener sur une verticale AB. Donner l'anomalie moyenne m détermine un point P de cette verticale. On résout l'équation en lisant la cote de la droite D qui passe par ce point. Comme généralement aucune des droites tracées n'y passe exactement, on interpole à vue.

Un graphique de deux fois le format de ce livre, permet de résoudre l'équation au degré près (même au demi-degré) pour toutes les excentricités (de 0 à 1), et toutes les valeurs de l'anomalie moyenne ou du temps, ce qui revient au même.

2° — Le graphique est facile à construire.

Pour $e=0$, on a : $m=u$,
$e=1$, $m=u-\sin u$.

Il suffit donc de calculer cette quantité pour les angles variant de 5 en 5°. Il sera commode de l'exprimer en degré, ce qui revient à diviser par 0,01745.

Par exemple pour 45° on a

$$u=0{,}7854 \qquad \sin u=0{,}7071$$
$$u-\sin u=0{,}0783 \qquad \text{ou} \qquad 4°{,}486.$$

Les ordonnées extrêmes de la droite qui correspond à $u=45°$ sont donc 45°,00 et 4°,49.

Voici les ordonnées extrêmes de 10 en 10°.

0°	0°	70°	16°,16	140°	103°,17
10	0 ,05	80	23 ,58	150	121 ,35
20	0 ,40	90	32 ,70	160	140 ,40
30	1 ,35	100	43 ,57	170	160 ,05
40	3 ,17	110	56 ,16	180	180 ,00
50	6 ,11	120	70 ,38		
60	10 ,38	130	86 ,11		

3° — Connaissant la valeur approchée u_0 qui correspond à la valeur m donnée de l'anomalie moyenne, le calcul de la valeur exacte u devient rapide.

Établissons la formule de Gauss. On a :

$$u=m+e\sin u, \qquad u_0=m+e\sin u_0-\varepsilon;$$

ε est la petite erreur trouvée quand on remplace u par u_0.

D'où : $u-u_0=e(\sin u-\sin u_0)+\varepsilon=e(u-u_0)\cos u_0+\varepsilon.$

$$u-u_0=\frac{\varepsilon}{1-e\cos u_0}.$$

87. Autre procédé graphique.

L'équation : $u=m+e\sin u,$

peut être résolue par l'intersection des courbes :

$$y=\sin u, \qquad ey=(u-m). \qquad (2)$$

Dans la seconde équation m joue le rôle de donnée ; e est un paramètre fixe. Pour résoudre graphiquement ce système, construisons une

demi-période de sinusoïde. Afin d'utiliser commodément le papier quadrillé qu'on trouve dans le commerce, représentons π ou 180° par n divisions portées en abscisses; l'ordonnée maxima de la sinusoïde vaut p divisions. Cela revient à dilater les abcisses dans le rapport $n : \pi$, à dilater les ordonnées dans le rapport p.

Les équations deviennent :

$$\frac{y}{p} = \sin\frac{\pi u}{n}, \qquad \frac{ye}{p} = \frac{\pi}{n}(u - m).$$

Construisons une équerre matérielle de côtés $ne : \pi$ et p ou, ce qui

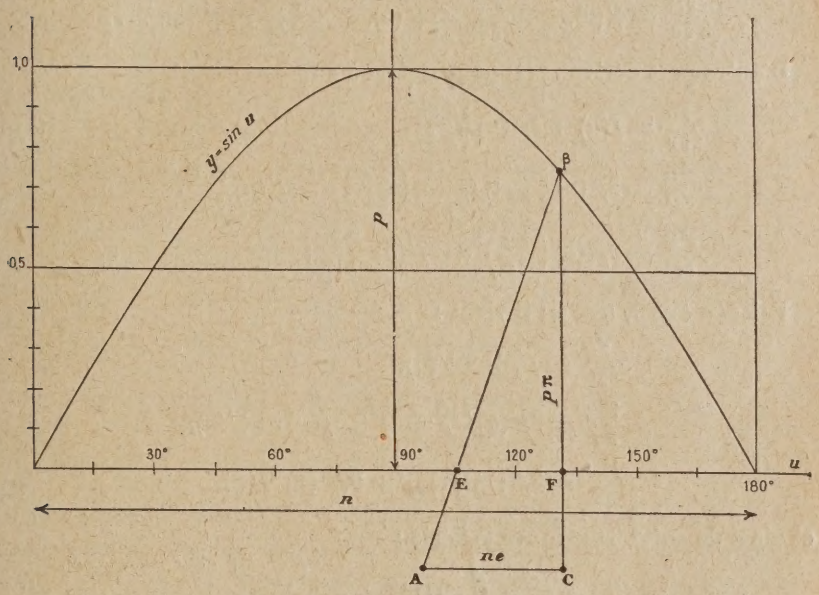


Fig. 75.

revient au même, ne et $p\pi$. Disposons CB verticalement ; arrangeons nous de manière que B soit sur la sinusoïde et que AB passe au point E d'abscisse égale à l'anomalie moyenne m.

Le point F indique l'anomalie excentrique u correspondante.

Pour la parabole $e = 1$; le côté AB de l'équerre est parallèle à la tangente de la sinusoïde à l'origine.

Pour le cercle $e = 0$; le côté AB est vertical ; l'anomalie excentrique est égale à l'anomalie moyenne.

88. **Série de Lagrange.**

1° — L'expression : $u = \omega t + e \sin u$,

rentre dans une expression plus générale dont le développement en série a des applications nombreuses.

Soit une fonction u reliée à la variable x par la formule :

$$u = x + ef(u); \qquad (1)$$

e est une quantité assez petite pour que la série ordonnée par rapport aux puissances croissantes de e, soit rapidement convergente.

Considérons u comme une fonction de e; nous pouvons écrire :

$$u = \psi(e) = \psi(0) + \frac{e}{1}\psi'(0) + \frac{e^2}{1.2}\psi''(0) + \frac{e^3}{1.2.3}\psi'''(0) + \ldots. \qquad (2)$$

D'où pour $e = 0$, c'est-à-dire pour $u = x$:

$$\frac{\partial u}{\partial e} = \psi'(0), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial e^2} = \psi''(0), \qquad \frac{\partial^3 u}{\partial e^3} = \psi'''(0), \ldots.$$

D'autre part dérivons (1) par rapport à e :

$$\frac{\partial u}{\partial e} = f(u) + ef'(u)\frac{\partial u}{\partial e}, \qquad (3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial e^2} = 2f'(u)\frac{\partial u}{\partial e} + ef''(u)\left(\frac{\partial u}{\partial e}\right)^2 + ef'(u)\frac{\partial^2 u}{\partial e^2},$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial e^3} = 3f''(u)\left(\frac{\partial u}{\partial e}\right)^2 + 3f'(u)\frac{\partial^2 u}{\partial e^2} + \text{des termes en } e.$$

Faisons $e = 0$, $u = x$; il vient :

$$\frac{\partial u}{\partial e} = f(x) = \psi'(0),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial e^2} = 2f'(u)\frac{\partial u}{\partial e} = 2f'(x)f(x) = \psi''(0),$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial e^3} = 3f''(x)[f(x)]^2 + b[f'(x)]^2 f(x),$$

et ainsi de suite. On trouve la série :

$$u = x + ef(x) + \frac{e^2}{1.2}\frac{d}{dx}[f(x)]^2 + \frac{e^3}{1.2.3}\frac{d^2}{dx^2}[f(x)]^3 + \ldots. \qquad (4)$$

En particulier, posons :

$$x = \omega t, \qquad f(u) = \sin u;$$

il vient comme plus haut :

$$u = \omega t + e\sin\omega t + \frac{e^2}{1.2}\sin 2\omega t + \ldots.$$

2° — Généralisation de la série de Lagrange.

Soit une fonction $r = F(u)$, de la quantité u définie par l'équation :

$$u = x + ef(u). \qquad (1)$$

On demande son développement en une série ordonnée suivant les puissances croissantes de e. Posons comme plus haut :

$$r = \Psi(e) = \Psi(0) + \frac{e}{1}\Psi'(0) + \frac{e^2}{1.2}\Psi''(0) + \ldots.$$

D'où pour $e=0$, c'est-à-dire pour $u=x$:

$$\frac{\partial r}{\partial e}=\Psi'(0), \qquad \frac{\partial^2 r}{\partial e^2}=\Psi''(0), \qquad \frac{\partial^3 r}{\partial e^3}=\Psi'''(0), \ldots. \tag{5}$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned}
&\frac{r}{\partial e}=\frac{\partial F}{\partial e}=F'(u)\frac{\partial u}{\partial e}, \\
&\frac{\partial^2 r}{\partial e^2}=F''(u)\left(\frac{\partial u}{\partial e}\right)^2+F'(u)\frac{\partial^2 u}{\partial e^2}, \\
&\frac{\partial^3 r}{\partial e^3}=F'''(u)\left(\frac{\partial u}{\partial e}\right)^2+3F''(u)\frac{\partial u}{\partial e}\frac{\partial^2 u}{\partial e^2}+F'(u)\frac{\partial^3 u}{\partial e^3}, \ldots.
\end{aligned} \tag{6}$$

Les formules (3) fournissent les dérivées successives de u par rapport à e. Cherchons les valeurs des dérivées de r par rapport à e pour $u=x$, $e=0$; identifions avec les formules (5).

On a :

$$\frac{\partial F}{\partial e}=F'(x)f(x)=\Psi'(0).$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial e^2}=F''(x)[f(x)]^2+2f'(x)f(x)F'(x)=\frac{d}{dx}\left\{F'(x)[f(x)]^2\right\}.$$

Et ainsi de suite. D'où la formule générale :

$$r=F(u)=F(x)+\frac{e}{1}F'(x)f(x)+\frac{e^2}{1.2}\frac{d}{dx}\left\{F'(x)[f(x)]^2\right\}+\frac{e^3}{1.2.3}\frac{d^2}{dx^2}\left\{F'(x)[f(x)]^3\right\}+\ldots.$$

3° — APPLICATIONS.

DISTANCE.

$$r:a=1-e\cos u=F(u);$$
$$F'(u)=e\sin u, \qquad f(u)=\sin u.$$

Il vient :

$$r:a=1-e\cos x+e^2\sin^2 x+\frac{e^3}{2}\frac{d\sin^3 x}{dx}+\ldots$$

$$r:a=1-e\cos\omega t+\frac{e^2}{2}(1-\cos 2\omega t)+\ldots. \tag{7}$$

ANOMALIE VRAIE.

On trouve :

$$\theta=\omega t+2e\sin\omega t+\frac{5e^2}{4}\sin 2\omega t+\ldots \tag{8}$$

$$v=\frac{d\theta}{dt}=\omega+2e\omega\cos\omega t+\frac{5e^2\omega}{2}\cos 2\omega t+\ldots.$$

L'origine des temps est prise au moment du passage au périgée, alors que d'après la loi des aires la vitesse est maxima et le rayon vecteur minimum : c'est bien conforme aux formules (7) et (8).

Pour trouver la formule (8) il n'est pas nécessaire d'appliquer la série de Lagrange; on part de la formule (7) et de la loi des aires. On écrit que $r^2 v$ est une constante; en d'autres termes, on écrit que les termes en e et en e^2 disparaissent dans le développement du produit.

89. Équation au centre.

1° — Nous verrons plus loin que les planètes ont des trajectoires sensiblement elliptiques dont le Soleil occupe un des foyers. Elles par-

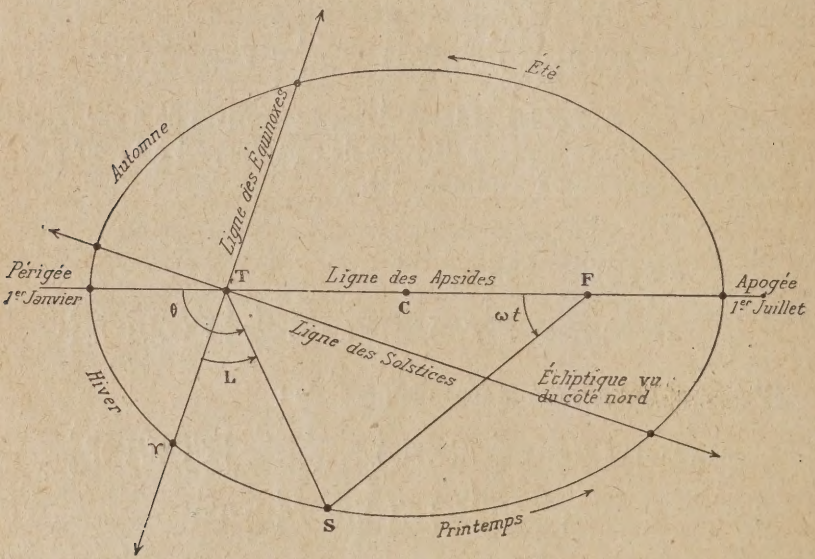


Fig. 76.

courent leurs trajectoires suivant la loi des aires par rapport à ce foyer.

Le sommet de l'ellipse le plus proche du Soleil s'appelle *périhélie*; le sommet le plus éloigné est *l'aphélie*; le grand axe de l'ellipse est la ligne des *apsides* (sommets).

Quand on étudie le mouvement *apparent* du Soleil autour de la Terre, le *périhélie* terrestre devient le *périgée* solaire; l'*aphélie* terrestre devient l'*apogée* solaire.

L'angle θ ou *anomalie vraie* est compté à partir du périhélie, ou du périgée quand il s'agit du mouvement solaire apparent. La *longitude* L ne diffère de l'anomalie que par l'origine; la longitude est comptée à partir de la ligne des équinoxes (fig. 76).

L'anomalie vraie est liée au temps par la formule :

$$\theta = \omega t + 2e \sin \omega t + \frac{5e^2}{4} \sin 2\omega t + \dots$$

Nous poserons : $\theta = \theta_m + E$;

$\theta_m = \omega t$, est *l'anomalie ou la longitude moyennes*;

$E = 2e \sin \omega t + \ldots$, est l'*équation au centre*.

D'une manière générale on appelle *équation*, la quantité qu'on ajoute à la valeur moyenne pour avoir la valeur vraie :

$$\theta_v = \theta_m + E.$$

θ_m définit la position d'une planète fictive qui décrit la trajectoire d'un mouvement angulaire uniforme et passe au périhélie ($\theta = 0$) et à l'aphélie ($\theta = 180°$) en même temps que la planète réelle.

2° — Par exemple, si le Soleil se mouvait d'un mouvement angulaire uniforme sur l'écliptique, il se déplacerait par jour de 59′ 8″,33 soit 3548″,33. A partir de son passage au périgée ou sur la ligne des équinoxes, calculons pour tous les instants l'angle dont il se déplace *avec cette vitesse angulaire uniforme*. Nous obtenons ainsi *l'anomalie moyenne* ou la *longitude moyenne* suivant l'origine choisie.

D'autre part connaissant la latitude du lieu d'observation et la hauteur du Soleil à son passage au méridien, on a immédiatement sa déclinaison D au midi vrai. Connaissant l'obliquité ω de l'écliptique, on calcule la longitude par la formule (§ 18) :

$$\sin D = \sin \omega . \sin L.$$

On s'est aperçu depuis des temps reculés, que la longitude ne croît pas proportionnellement au temps : *la longitude vraie n'est pas égale à la longitude moyenne*. Nous sommes donc forcés d'ajouter à la longitude moyenne une quantité variable qui constitue *l'équation* :

$$L_v = L_m + E.$$

2° — Toutes ces questions deviennent d'une simplicité extrême quand on ne méprise pas les calculs numériques.

Calculons de 10 jours en 10 jours les longitudes solaires moyennes en admettant que la variation est uniforme et égale à 3548″,33 par jour de temps moyen. Peu importe la définition du temps moyen; il nous suffit de savoir qu'il est dans un rapport constant avec le jour sidéral que nous savons déterminer expérimentalement.

Plaçons en regard les longitudes vraies, faisons la différence; enfin traçons la courbe représentative.

Je me sers de la *Connaissance des Temps* pour 1915.

Une table numérote les jours et évite toutes les erreurs.

La courbe est remarquable de simplicité. Elle est quasi symétrique par rapport à l'axe des temps parce que je prends nulle la différence des longitudes au 1er janvier et que précisément le Soleil passe au *périgée* (ou ce qui revient au même, la Terre passe au *périhélie*) au voisinage du 1er janvier.

L'*équation* nulle au 1er janvier redevient nulle vers le 1er juillet.

La différence *longitude observée — longitude calculée* est maxima vers le 1er avril, minima vers le 1er octobre.

Le maximum est de 118′ 10″, le minimum de — 112′ 45″; soit au total 231′ environ. C'est le double de la variation sinusoïdale.

Reprenons la formule approchée :

$$L_v = L_m + 2e \sin \omega t.$$

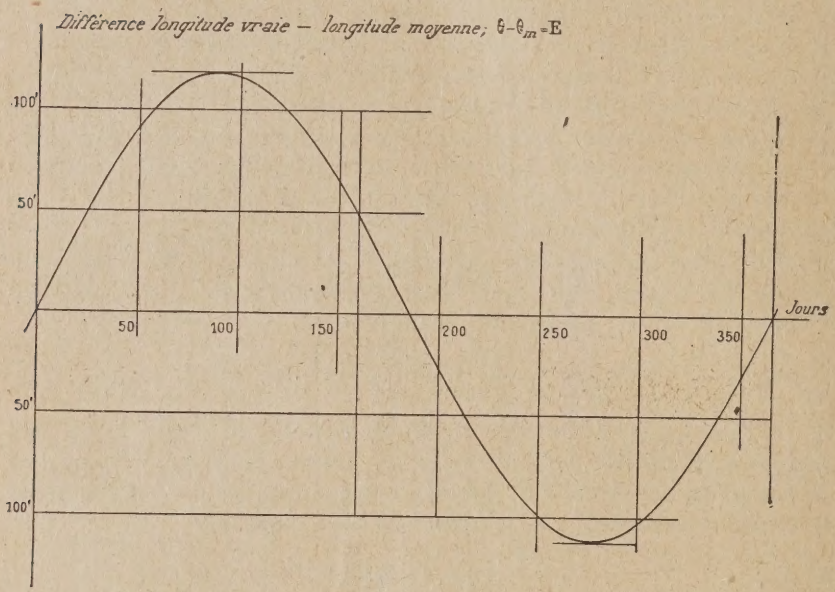


Fig. 77.

On admet pour excentricité de l'orbite terrestre (rapport entre la distance du centre de l'ellipse au foyer et le demi-grand axe) le nombre 0,01675 (1 : 60 environ).

$$2e = 0{,}0335 = 115 \text{ minutes environ.}$$

Le double 230 est précisément ce que nous venons d'obtenir.

Nous avons en définitive :

$$L_v = L_m + E = L_m + 115'. \sin \omega t.$$

L'origine des temps est le passage au périgée (au voisinage du 1er janvier 1915).

DATES		LONG. OBSERVÉES	LONG. CALCULÉES	DIFFÉRENCES (à une constante près).
1er janvier.	0.	280° 0′ 1″	0° 0′ 0″	0′ 1″
11 —	10.	290 11 28	9 51 23	20 5
21 —	20.	300 22 40	19 42 46	39 54
31 —	30.	310 32 24	29 34 9	58 15
10 février.	40.	320 40 29	39 25 32	74 57
20 —	50.	330 46 35	49 16 56	89 39
2 mars.	60.	340 49 43	59 8 19	101 24
12 —	70.	350 49 55	68 59 42	110 13
22 —	80.	0 47 7	78 51 5	116 2
1er avril.	90.	10 40 38	88 42 28	118 10
11 —	100.	20 30 50	98 33 52	116 58
21 —	110.	30 17 54	108 25 15	112 39
1er mai.	120.	40 1 28	118 16 38	104 50
11 —	130.	49 42 15	128 8 1	94 14
21 —	140.	59 20 36	137 59 24	81 12
31 —	150.	68 56 25	147 50 48	65 37
10 juin.	160.	78 30 39	157 42 11	48 28
20 —	170.	88 3 46	167 33 34	30 12
30 —	180.	97 35 47	177 24 57	10 50
10 juillet.	190.	107 7 47	187 16 20	— 8 33
20 —	200.	116 40 12	197 7 44	— 27 42
30 —	210.	126 13 9	206 59 7	— 45 58
9 août.	220.	135 47 42	216 50 30	— 62 48
19 —	230.	145 24 10	226 41 53	— 77 43
29 —	240.	155 2 35	236 33 16	— 90 41
8 septembre.	250.	164 43 55	246 24 40	— 100 45
18 —	260.	174 28 16	256 16 3	— 107 47
28 —	270.	184 15 31	266 7 46	— 112 15
8 octobre.	280.	194 6 24	275 59 9	— 112 45
18 —	290.	204 0 41	285 50 32	— 109 51
28 —	300.	213 58 3	295 41 36	— 103 33
7 novembre.	310.	223 58 54	305 32 59	— 94 5
17 —	320.	234 2 40	315 24 22	— 81 22
27 —	330.	244 8 46	325 15 45	— 66 59
7 décembre.	340.	254 17 19	335 7 8	— 49 49
17 —	350.	264 27 26	344 58 32	— 31 6
27 —	360.	274 38 22	354 49 55	— 11 33

90. **Point de vitesse moyenne ou d'équation maxima ou minima.**

1° — Nous avons d'une manière générale :

$$\theta = \theta_m + \mathrm{E} = \omega t + \mathrm{E}.$$

Par exemple, en prenant pour origine des temps le passage au périgée, nous avons approximativement :

$$\theta = \omega t + 2e \sin \omega t.$$

Dans le cas général la vitesse à chaque inst nt est :

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega + \frac{dE}{dt}.$$

Écrire que la vitesse vraie est égale à la vitesse moyenne, revient donc à écrire que l'équation est maxima ou minima :

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega, \qquad \frac{dE}{dt} = 0.$$

Les deux problèmes posés n'en font qu'un.

Il est immédiatement résolu par une construction géométrique simple.

Soit a, b, les demi-axes de l'ellipse; soit $e = c : a$ l'excentricité. $2c$ est la distance des foyers. On a : $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Du foyer F comme centre avec le rayon $R = \sqrt{ab}$, traçons un cercle :

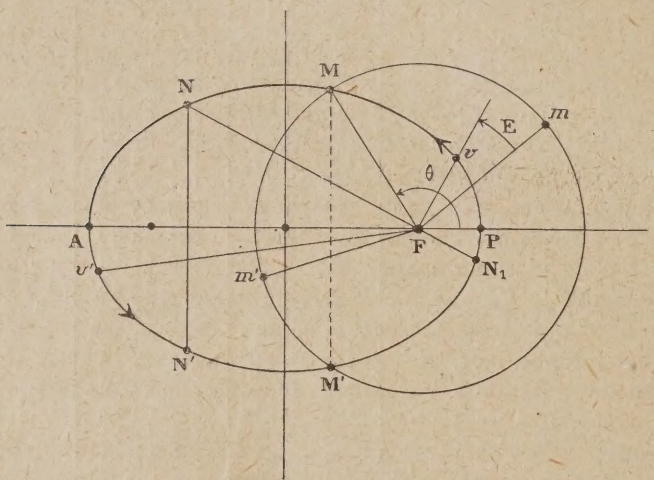


Fig. 78.

il coupe l'ellipse en un point M. Je dis que pour ce point la vitesse vraie du mobile est égale à sa moyenne.

En effet l'aire du cercle égale l'aire de l'ellipse :

$$\pi R^2 = \pi ab.$$

D'une manière générale, en coordonnées polaires ρ, θ, l'élément d'aire a pour expression, $\rho^2\, d\theta : 2$. La vitesse aréolaire est :

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\rho^2}{2}\frac{d\theta}{dt}.$$

Considérons deux mobiles v et m qui se meuvent l'un sur l'ellipse (planète vraie), l'autre sur le cercle (planète moyenne), suivant la loi

des aires; ils font le tour dans le même temps. Ils doivent parcourir simultanément la même aire. Pour que leurs vitesses angulaires soient les mêmes, les rayons vecteurs doivent être les mêmes, ce qui arrive précisément quand la planète vraie se trouve aux points M ou M′.

La vitesse angulaire du mobile v est donc alors égale à la vitesse moyenne. Corrélativement l'angle E des deux planètes est maximum ou minimum.

Pour trouver les points M et M′, on calcule les coordonnées des points d'intersection de l'ellipse et du cercle :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (x-c)^2+y^2=ab.$$

2° — A partir du moment où la planète vraie v quitte le périhélie (point P), elle est en avance angulaire sur la planète moyenne m dont l'angle avec la ligne des apsides varie uniformément. L'équation E est additive : pour passer du lieu moyen m au lieu vrai v, il faut ajouter quelque chose.

L'équation E croît jusqu'au point M où elle devient maxima.

Au delà du point M, la vitesse angulaire de la planète v est plus petite que la vitesse moyenne : l'équation diminue jusqu'à l'aphélie A où elle s'annule; corrélativement la vitesse angulaire de la planète v devient minima à l'aphélie.

L'*équation* E change de signe et devient négative; il faut retrancher quelque chose à l'angle fixant le lieu moyen m' pour avoir le lieu vrai v'; le mobile moyen est en avance sur la planète. La valeur absolue de l'équation croît jusqu'à ce que la planète vraie passe au point M′ où de nouveau la planète vraie possède la même vitesse que la moyenne. Puis l'équation diminue jusqu'à s'annuler en P. Alors la vitesse angulaire de la planète vraie devient maxima : elle diffère le plus possible de la vitesse moyenne.

L'équation a des valeurs égales et de signes contraires pour deux points N, N′, symétriquement placés par rapport à la ligne des apsides.

3° — Si l'on connaît l'excentricité de l'orbite $e=c:a$, on peut donc aisément calculer l'anomalie vraie du lieu de plus grande équation.

On passe à l'*anomalie excentrique* u par la formule :

$$\operatorname{tg}^2\frac{u}{2}=\frac{1-e}{1+e}\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2},$$

et enfin à l'*anomalie moyenne* ωt par la formule de Képler.

$$\omega t=u-e\sin u.$$

91. Méthode de La Caille pour déterminer la ligne des apsides.

1° — Le temps mis par le mobile vrai pour aller d'un point N au point N_1 dont les longitudes diffèrent de 180°, n'est pas égal à la durée

de la demi-révolution *anomalistique* (temps nécessaire pour faire un tour de l'ellipse).

En effet d'après la loi des aires, le temps mis à parcourir l'arc NA est plus long que le temps mis à parcourir l'arc N_1P.

D'où résulte que les apsides N et P sont les seuls points de la trajectoire en ligne droite avec le foyer F, tels que le passage de l'un à l'autre exige une demi-période anomalistique.

Partant de là, voici la méthode de La Caille pour déterminer la ligne des apsides.

Nous supposons connue la période anomalistique T et le temps τ que le mobile met à passer du point N au point N_1 qui sont en ligne droite avec le foyer.

Nous choisissons ces points peu éloignés de la ligne des apsides.

Posons $\alpha = NFA = N_1FP$. C'est l'angle à déterminer.

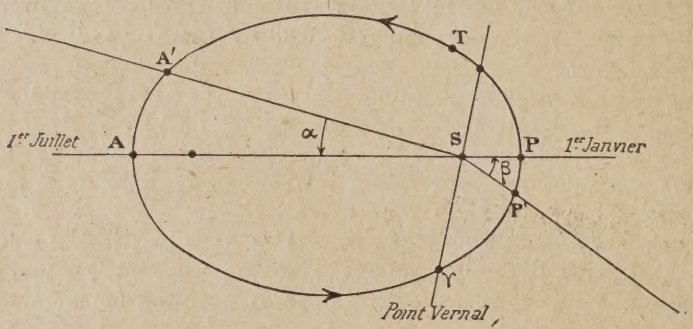


Fig. 79.

Nous mesurons les vitesses angulaires p et a au voisinage des apsides P et A.

Soit t_a et t_p les temps (inconnus) que le mobile met à passer de N en A, ou de N_1 en P.

Nous avons : $\alpha = at_a = pt_p$.

Le temps nécessaire pour aller de A en P (demi-période) est évidemment égal à :

$$T : 2 = \tau - t_a + t_p.$$

D'où :

$$t_a - t_p = \tau - \frac{T}{2} = \alpha\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{p}\right) = \alpha\,\frac{p-a}{ap}.$$

$$\alpha = \left(\tau - \frac{T}{2}\right)\frac{ap}{p-a}.$$

Dans le second nombre tout est connu ou déterminable.

2° — Raisonnons d'une manière plus générale.

Les observations ont lieu quand l'astre est en A' à la distance α de l'aphélie, et en P' à la distance β du périhélie.

L'observation donne le temps $\mathfrak{C}$ nécessaire pour aller de A' à P'; il fournit aussi l'angle $\varepsilon = \beta - \alpha$, dont il s'en faut que ces points soient en ligne droite avec le foyer.

On a comme plus haut : $\alpha = at_a$, $\beta = pt_p$;

$$\mathfrak{C} - t_a + t_p = T : 2, \qquad \frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{b} = \mathfrak{C} - \frac{T}{2}, \qquad \varepsilon = \beta - \alpha,$$

soit deux équations à deux inconnues pour déterminer α et β.

REMARQUE.

La figure 79 est construite dans l'hypothèse du mouvement réel de la Terre par rapport au Soleil. Quand la Terre T passe par l'équinoxe du printemps, elle voit le Soleil se projeter dans le signe du Bélier; le point γ est donc placé comme il faut.

92. **Déterminer l'orbite d'une planète par trois observations.**

1° — Voici l'intéressante méthode d'approximation par échelons qui détermine, plus exactement qui corrige, l'orbite d'une planète, au moyen de trois observations.

Les formules à satisfaire sont :

$$u - e \sin u = \omega t, \qquad \cos u = \frac{e + \cos \theta}{1 + e \cos \theta}. \tag{1}$$

Nous déterminons trois positions de la planète, c'est-à-dire les angles θ_1, θ_2, θ_3, à partir d'une origine provisoirement choisie, *qui devrait être le périhélie* mais en est seulement voisine; simultanément nous déterminons les temps t_1, t_2, t_3, correspondants. Par hypothèse on connaît exactement la période anomalistique $T = 2\pi : \omega$.

Supposons d'abord l'excentricité e et l'azimut de la ligne des apsides exactement connus. Transportons θ_1, θ_2, θ_3, dans la seconde équation (1); nous trouvons trois valeurs de u. Transportons-les dans la première équation (1); nous trouvons trois valeurs τ_1, τ_2, τ_3, de t qui satisfont à la relation :

$$t_1 - \tau_1 = t_2 - \tau_2 = t_3 - \tau_3.$$

Mais par hypothèse ni l'excentricité ni l'azimut de la ligne des apsides ne sont exactement connus. Prenons donc comme droite de référence cette ligne (inconnue); elle fait avec notre droite de référence provisoire l'angle φ. Remplaçons e par la valeur vraie (inconnue) $e + \varepsilon$.

La seconde équation (1) devient :

$$\cos u = \frac{(e + \varepsilon) + \cos(\theta - \varphi)}{1 + (e + \varepsilon)\cos(\theta - \varphi)}. \tag{2}$$

Transportons θ_1, θ_2, θ_3, dans (1'); nous obtenons trois valeurs u_1, u_2, u_3, qui contiennent ε et φ dans leur expression.

2° — Il s'agit de trouver ε et φ de manière à satisfaire aux observations.

Voici la méthode de Lalande dont je simplifie considérablement l'exposé.

Utilisons d'abord les observations I et II.

Entre elles s'est écoulé un temps connu $t_2 - t_1$ qui doit satisfaire à l'équation :

$$(u_2 - u_1) - (e + \varepsilon)(\sin u_2 - \sin u_1) = \omega (t_2 - t_1) \qquad (3)$$

Cherchons quelle relation doit exister entre ε et φ pour que les deux équations (2) en θ_1, θ_2, et l'équation (3) soient simultanément satisfaites.

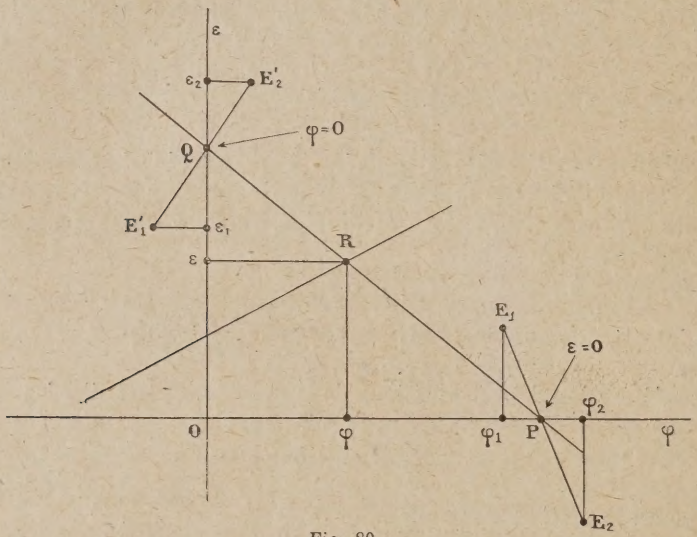


Fig. 80.

Pour cela utilisons la méthode de fausse position en échelonnant nos hypothèses.

a) Faisons d'abord $\varepsilon = 0$.

Nous avons à satisfaire les équations suivantes :

$$\cos u_1 = \frac{e + \cos(\theta_1 - \varphi)}{1 + e\cos(\theta_1 - \varphi)}, \qquad \cos u_2 = \frac{e + \cos(\theta_2 - \varphi)}{1 + e\cos(\theta_2 - \varphi)},$$

ainsi que l'équation (3).

Pour cela donnons successivement à φ les valeurs arbitraires mais petites φ_1 et φ_2 (fig. 80, auxiliaire à droite).

Calculons u_1 et u_2; transportons-les dans (3). Calculons les quantités :

$$[(u_2 - u_1) - e(\sin u_2 - \sin u_1)] - \omega (t_2 - t_1) = E_1 \text{ et } E_2.$$

Une interpolation linéaire donne le point P et la valeur φ' de φ qui correspond à $E = 0$.

Nous sommes donc en possession d'un système de valeurs $\varepsilon = 0$, $\varphi = \varphi'$, qui satisfait aux équations données.

b) En second lieu faisons $\varphi = 0$.

Nous avons à satisfaire les équations :

$$\cos u_1 = \frac{(e+\varepsilon)+\cos\theta_1}{1+(e+\varepsilon)\cos\theta_1}, \qquad \cos u_2 = \frac{(e+\varepsilon)+\cos\theta_2}{1+(e+\varepsilon)\cos\theta_2}.$$

ainsi que l'équation (3).

Donnons successivement à ε les valeurs quelconques mais petites ε_1 et ε_2 (fig. 80, auxiliaire en haut).

Calculons u_1 et u_2; transportons-les dans (3). Calculons les quantités :

$$[(u_2 - u_1) - (e+\varepsilon)(\sin u_2 - \sin u_1)] - \omega(t_2 - t_1) = E_1' \text{ et } E_2'.$$

Une interpolation linéaire donne le point Q et la valeur ε' de ε qui correspond à $E' = o$. Nous sommes donc en possession d'un second système de valeurs $\varphi = 0$, $\varepsilon = \varepsilon'$, qui satisfait aux équations données.

Nous raccourcissons les calculs en faisant $\varepsilon_1 = 0$, $\varphi_1 = 0$; d'où $E_1 = E_1'$. Les constructions sont du reste les mêmes.

c) En raison de la petitesse des quantités ε et φ, nous pouvons admettre que tous les couples de valeurs ε et φ *qui sont sur la droite* PQ, sont au même titre des solutions de la question posée.

En effet d'une manière générale l'erreur E est une fonction de ε et de φ, que nous pouvons limiter aux termes du premier degré :

$$E = E_0 + a\varepsilon + b\varphi.$$

La condition $E = 0$, donne la droite :

$$E_0 + a\varepsilon + b\varphi = 0.$$

d) Recommençons les opérations sur les observations II et III : nous déterminons une seconde droite. Le point R intersection des deux droites donne les corrections ε et φ qui satisfont aux trois observations.

Indépendamment de toute question astronomique, ce qui précède donne la manière de tâtonner systématiquement pour résoudre un système de deux équations transcendantes à deux inconnues.

93. Calcul des orbites paraboliques. Comète de 109 jours.

1° — Reprenons les formules du § 83. Remplaçons p par la distance q du périhélie (sommet de la parabole) au foyer.

Pour des raisons que nous verrons plus loin, posons :

$$p = \frac{C^2}{GM}, \qquad q = \frac{p}{2} = \frac{C^2}{2GM}.$$

D'où :

$$\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{2q^3}{GM}}.$$

La formule résolvant le problème de Képler devient :

$$t = \sqrt{\frac{2q^3}{GM}}\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{\theta}{2}\right).$$

Prenons pour unité de distance la moyenne distance de la Terre au Soleil.

La quantité 2 : GM (que nous verrons être une constante absolue pour tous les corps attirés par le Soleil, § 165), prend alors une certaine valeur numérique. Posons :

$$75\sqrt{\mathrm{GM} : 2} = k.$$

k a donc lui-même une certaine valeur numérique.

Barker a calculé des tables de la quantité :

$$75\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2} + 25\,\mathrm{tg}^3\frac{\theta}{2} = kt : \sqrt{q^3} = mt.$$

2° — Le temps T nécessaire pour que le mobile fasse 90° à partir de son périhélie, est donnée par la formule :

$$\theta = 90°, \qquad \mathrm{tg}(\theta : 2) = 1, \qquad 100 = m\mathrm{T}.$$

$$\mathrm{T} = \frac{100}{m} = \frac{100}{k}\sqrt{q^3}.$$

Dans cette formule posons $q = 1$; remplaçons k par sa valeur numérique (§ 165).

On trouve : T = 109,62 jours.

L'astre qui décrit une parabole et dont la plus petite distance au Soleil est égale à la moyenne distance de la Terre au Soleil, décrit 90° à partir du périhélie en 109 jours environ.

On lui donne le nom de *comète de 109 jours.*

Si la distance périhélie est seulement 0,5, c'est-à-dire si la comète se rapproche du Soleil jusqu'à la moitié de la distance du Soleil à la Terre, elle mettra $\sqrt{0{,}5^3}$ fois plus de temps pour faire 90°; on trouve : T = 38,76 jours.

Pour la comète de 109 jours, on a $m = 0{,}912$. On peut écrire :

$$t = 82{,}22\left(\mathrm{tg}\frac{\theta}{2} + \frac{1}{3}\mathrm{tg}^3\frac{\theta}{2}\right),$$

qui donne en jours, le temps nécessaire pour qu'elle atteigne l'anomalie θ.

94. Déterminer une orbite parabolique connaissant deux rayons vecteurs et l'angle compris.

On énonce parfois le problème en donnant deux rayons vecteurs et la corde; il est clair que cela revient au même.

Soit r', r'', les vecteurs; soit $4d$ l'angle compris. Soit θ' et θ'' les anomalies correspondantes inconnues. On a généralement :

$$r = \frac{2q}{1+\cos\theta}, \qquad r\cos^2\frac{\theta}{2} = q.$$

Posons : $s = (\theta'' + \theta') : 4, \qquad d = (\theta'' - \theta') : 4$

d'où : $\theta'' = 2(s+d), \qquad \theta' = 2(s-d).$

$$\cos(s+d) = \sqrt{\frac{q}{r''}}, \qquad \cos(s-d) = \sqrt{\frac{q}{r'}}.$$

Éliminons q entre ces équations :

$$\frac{\cos(s+d)}{\cos(s-d)} = \sqrt{\frac{r'}{r''}}, \qquad \operatorname{tg} s \,.\, \operatorname{tg} d = \frac{r''-r'}{r''+r'+2\sqrt{r'r''}}.$$

Par hypothèse on connaît r', r'', d.
La dernière équation donne s; l'une des précédentes donne q.

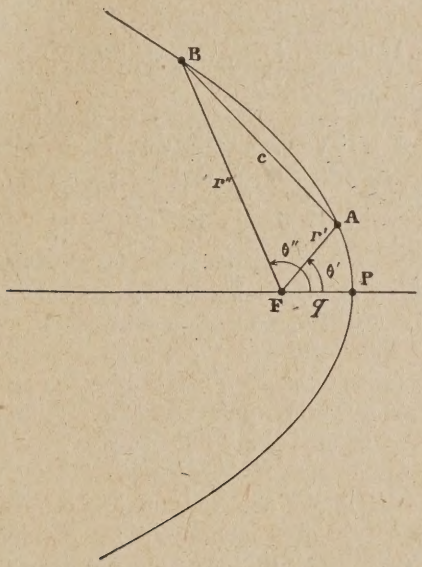


Fig. 81.

La parabole est donc complètement déterminée.
Quand on donne la corde c, on tire l'angle des vecteurs de la formule :

$$c^2 = r'^2 + r''^2 - 2r'r'' \cos 4d.$$

95. **Théorème de Lambert.**
Partons de la formule :

$$t\sqrt{\frac{GM}{2q^3}} = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{\theta}{2}. \qquad (1)$$

Par des transformations faciles, on en tire :

$$(t''-t')\sqrt{\frac{GM}{2q^3}} = \sin 2d \,.\, \cos 2d \,.\, \frac{r'r''}{q^2} + \frac{1}{3}\sin^3 2d \,.\, \sqrt{\frac{r'r''}{q^3}}.$$

Introduisons maintenant la corde définie par la relation :

$$c^2 = r'^2 + r''^2 - 2r'r'' \cos 4d.$$

Après des transformations sur lesquelles je crois inutile d'insister, il vient :

$$6\sqrt{GM}\,(t''-t') = \sqrt{(r'+r''+c)^3} \mp \sqrt{(r'+r''-c)^3}$$

qui est le célèbre théorème de Lambert.

Le signe — répond au cas où l'angle des vecteurs est inférieur à 180°.

Vérifions le théorème sur un cas particulier.

Prenons les anomalies égales à $\pm 90°$;

On a : $r' = r'' = 2q$; $c = 4q$;

$$12\sqrt{GM}\,.\,T = \sqrt{(8q)^3} = 8\sqrt{8q^3}.$$

Or la formule (1) donne

$$3\sqrt{GM}\,.\,T = 2\sqrt{8q^3}.$$

CHAPITRE II

LE SOLEIL CONSIDÉRÉ COMME UNE ÉTOILE DE DÉCLINAISON VARIABLE

96. **Mouvement du Soleil (première approximation).**

Un très grand nombre de phénomènes, parmi les plus importants, sont contenus dans l'énoncé *approximatif* suivant :

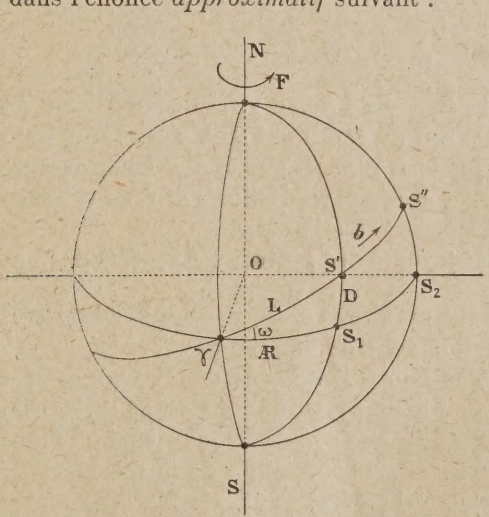


Fig. 82.

Le centre du Soleil vu du centre de la Terre décrit un grand cercle de la sphère céleste (écliptique).

Ce grand cercle est quasi fixe en position.

Le Soleil se déplace dessus d'un mouvement quasiment uniforme.

En définitive la Terre dont le centre est en O (fig. 82), tourne autour de la ligne des pôles NS avec une vitesse angulaire constante: ce qui constitue le mouvement diurne. Son équateur trace sur la sphère céleste un grand cercle quasiment immobile $\gamma S_1 S_2$.

Le Soleil décrit d'un mouvement quasi uniforme le grand cercle $\gamma S'S''$ qui est l'écliptique : il fait un tour en un an. Le mouvement de rotation réel de la Terre autour de son axe NS et le mouvement apparent de translation du Soleil sur sa trajectoire s'effectuent dans le même sens *direct* (sens des flèches).

Soit $L = \widehat{\gamma S'}$ la longitude céleste solaire, comptée positivement dans le sens direct (sens de l'ouest à l'est, sens inverse du mouvement diurne *apparent*).

Dans le triangle rectangle $\gamma S_1 S'$ on a :

$$\sin D = \sin \omega . \sin L, \qquad \operatorname{tg} Æ = \cos \omega . \operatorname{tg} L, \qquad (1)$$

Ces formules donnent la déclinaison D et l'ascension droite Æ en fonction de l'obliquité de l'écliptique $\omega = 23° 27'$, et de la longitude L.

Si la longitude est connue en fonction de temps, il en est de même des coordonnées équatoriales célestes. Posons d'abord *comme première approximation* que L croît proportionnellement au temps, par suite sensiblement d'un degré par jour (plus exactement de $59' 8'',3 = 3548'',3$).

Du fait que le Soleil décrit un plan, entre les coordonnées D et Æ existe la relation :

$$\operatorname{tg} D = \operatorname{tg} \omega . \sin Æ. \qquad (2)$$

En définitive le centre du Soleil vu du centre de la Terre se conduit comme une étoile qui ne serait pas *fixe*, c'est-à-dire qui se déplacerait d'environ 1° par jour par rapport aux étoiles comprises dans un certain plan; son ascension droite et sa déclinaison varient d'un jour à l'autre, tout en restant liées par l'équation(2).

Tirons les conséquences des postulats ci-dessus posés.

97. Déplacement du Soleil dans le champ des étoiles.

1° — L'observation vulgaire montre que l'aspect du ciel à minuit (par exemple) varie d'un jour à l'autre. Appelons *jour solaire vrai* l'espace de temps qui sépare deux passages consécutifs du Soleil dans le méridien du lieu d'observation; appelons *jour sidéral* l'espace de temps qui sépare deux passages consécutifs de la même étoile (quelconque mais équatoriale) dans le méridien : il résulte immédiatement de notre observation que *le jour sidéral n'est pas égal au jour solaire vrai.*

D'après ce que nous avons dit, si un certain jour le Soleil passe au méridien en même temps (est sur le même cercle horaire) que l'étoile E, le lendemain il est quelque part en S'.

Le mouvement de rotation de la Terre (dont je suppose fixe le centre de gravité, mais qui tourne autour de NS) s'effectue dans le sens de la flèche F.

Donc le méridien d'un lieu rencontrera d'abord l'étoile E, ensuite le Soleil S' : *le jour solaire vrai est plus long que le jour sidéral.*

Le Soleil fait un tour en une année, soit en 365 jours environ; son

ascension droite croît donc en moyenne d'un degré par jour; en moyenne seulement, d'abord parce que son déplacement s'effectue sur l'écliptique et que les ascensions droites sont comptées sur l'équateur, ensuite parce que la variation de la longitude n'est pas exactement proportionnelle au temps.

Mais 24 heures ou 1 440 minutes correspondent conventionnellement à 360°; un degré correspond à 4 minutes.

L'ascension droite du Soleil croît donc d'environ 4 minutes de temps par jour (exactement en moyenne $3^m\ 56^s,558 = 236^s,558$).

En raison du mouvement diurne, en un jour solaire, le méridien du

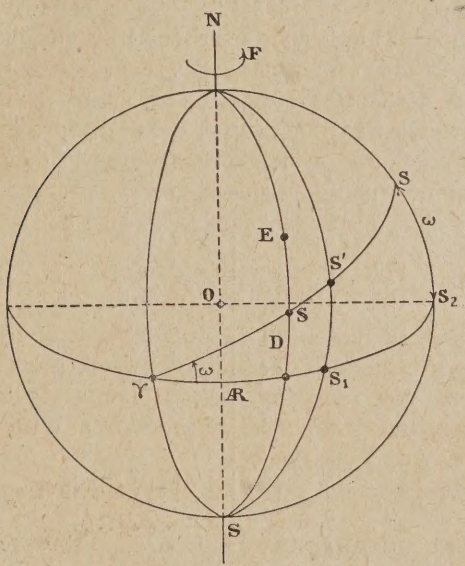


Fig. 83.

lieu d'observation qui doit rattraper le Soleil, tourne donc d'environ 361°; *le jour solaire est donc en moyenne plus long que le jour sidéral d'environ 4 minutes.*

Je reviendrai plus loin sur une estimation plus exacte, mais il faut dès l'abord fixer nos idées par des nombres faciles à retenir.

2° — Durée de visibilité des étoiles. Lever et coucher héliaques. De ce qui précède résulte que les mêmes aspects dans le ciel étoilé se reproduiront de jour en jour à des heures de moins en moins tardives; en effet le jour et la nuit dépendent de la position du Soleil, par suite sont liés au jour solaire vrai et non pas au jour sidéral.

Après le coucher du Soleil, fixons notre attention sur quelque étoile du côté de l'occident. De jour en jour nous la verrons se rapprocher du Soleil; de sorte qu'elle finira par se coucher en même temps que lui; plus exactement par disparaître, noyée dans la lumière crépusculaire;

nous sommes obligés d'attribuer ce mouvement relatif non pas à l'étoile, mais au Soleil. Tous ces faits s'expriment en disant que de jour en jour le Soleil se rapproche des étoiles qui sont plus orientales que lui; le mouvement propre du Soleil dans le champ des étoiles se fait de l'ouest à l'est, en sens inverse du mouvement diurne *apparent*, dans le sens du mouvement diurne *réel* (sens direct).

Comme il s'agit de questions fondamentales qui ont excité la curiosité des hommes dès la plus haute antiquité, précisons par un exemple. Pour simplifier, supposons nulle la latitude du lieu d'observation; posons que l'ascension droite du Soleil varie d'un degré par jour et que l'étoile observée (quand elle est au-dessus de l'horizon) cesse d'être visible une heure avant le lever du Soleil et ne devient visible qu'une heure après son coucher.

Comptons les heures de 0 à 24 (en partant de midi). Enfin posons que les ascensions droites de l'étoile et du Soleil sont égales le 1er janvier. Le tableau suivant donne les temps de visibilité de l'étoile pour les premiers et les 15 de chaque mois.

1er Janvier	"	à	"	1er Juillet	7h	à	17h
15 (L. H.)	17h	à	17h	15 —	7	à	17
1er Février	16h	à	17h	1er Août	7	à	16
15 —	15	à	17	15 —	7	à	15
1er Mars	14	à	17	1er Septembre	7	à	14
15 —	13	à	17	15 —	7	à	13
1er Avril	12	à	17	1er Octobre	7	à	12
15 —	11	à	17	15 —	7	à	11
1er Mai	10	à	17	1er Novembre	7	à	10
15 —	9	à	17	15 —	7	à	9
1er Juin	8	à	17	1er Décembre	7	à	8
15 —	7	à	17	15 (C. H.)	7	à	7

Du 15 décembre au 15 janvier la distance de l'étoile au Soleil (mesurée par la différence des ascensions droites) est inférieure à 15° (une heure). L'étoile n'est pas visible.

Le 15 janvier a lieu le *lever héliaque*. L'étoile se lève à 17h (5 heures du matin); elle est visible un instant, puis disparaît, le Soleil venant aussitôt à moins de 15° de l'horizon. Le lendemain l'étoile se lève un peu plus tôt; sa durée de visibilité augmente.

Du 15 juin au 15 juillet elle est visible pendant 10 heures, maximum du temps de visibilité dans nos hypothèses. Le 15 juin elle se lève à 7 heures du soir; elle est immédiatement visible; mais elle se couche à 7 heures du matin : depuis 5 heures du matin, elle est par hypothèse noyée dans la lumière solaire. Le 15 juillet, elle se lève à 5 heures du soir; elle ne devient visible qu'à 7, elle reste visible jusqu'à son coucher (17h ou 5h du matin).

Après le 15 juillet elle reste visible depuis 7 heures du soir jusqu'à son coucher dont l'heure avance de jour en jour.

Enfin le 15 décembre a lieu le *coucher héliaque*. L'étoile se couche à 7 heures du soir, c'est-à-dire juste une heure après le Soleil. Elle n'est visible qu'un instant. Elle disparaît pendant un mois.

Du 15 janvier au 15 juin, on assiste à son lever.

Du 15 juillet au 15 décembre, on assiste à son coucher.

Du 15 décembre au 15 janvier on ne la voit pas.

Du 15 juin au 15 juillet, on ne voit ni son lever ni son coucher.

Pour toute autre latitude les phénomènes ont même allure, mais sont plus compliqués (voir le § 126).

3° — Nous reviendrons dans un chapitre ultérieur sur l'étude précise du mouvement solaire. Rappelons pour fixer les idées que la comparaison de jour en jour des coordonnées du centre du Soleil avec celles d'une étoile de comparaison est singulièrement facilitée par le fait que les étoiles sont visibles en plein jour dans une lunette d'ouverture assez grande, pourvu qu'elles ne soient pas trop voisines du Soleil.

Comme étoile de comparaison on choisit par exemple α de la Lyre :

$$\text{Æ} = 18^h\ 34^m, \qquad D = 38°\ 42'.$$

Elle reste toujours très éloignée du Soleil, même quand elle passe au méridien en même temps que lui. Nous verrons, en effet, que pour cette ascension droite, le Soleil est dans l'hémisphère austral et que sa déclinaison est supérieure à 23°.

98. Trajectoire quotidienne du Soleil dans le ciel. Gnomon.

1° — En définitive la déclinaison solaire varie très lentement; *posons d'abord qu'elle est invariable.* Pour un jour donné le Soleil semble approximativement se mouvoir sur un petit cercle de la sphère céleste défini par la déclinaison D.

L'angle D est assurément variable d'un instant à l'autre; mais si nous opérons dans un intervalle assez petit, nous pouvons le supposer constant.

A chaque instant la position du Soleil est définie pour un lieu donné par l'angle horaire Æ qui varie proportionnellement au temps; en fait, il mesure l'angle de rotation de la Terre.

Nous sommes par hypothèse au centre O de la Terre; OZ est le zénith de lieu d'observation, HS_2H est son horizon; PZE est le méridien correspondant;

$\overline{EZ} = \lambda$ est la latitude; $\overline{ZS} = z$ est la distance zénithale du Soleil.

Le triangle sphérique PZS donne :

$$\cos z = \sin\lambda \,.\, \sin D + \cos\lambda \,.\, \cos D \,.\, \cos \text{Æ},$$
$$\sin z \cos A = -\cos\lambda \,.\, \sin D + \sin\lambda \cos D \,.\, \cos \text{Æ},$$
$$\sin z \sin A = \cos D \,.\, \sin \text{Æ},$$

formules fondamentales dont nous allons tirer les conséquences.

2° — Elles nous fournissent d'abord le moyen de mesurer la déclinaison.

Observons le Soleil lors de son passage par le méridien :

$$H = 0, \qquad z = \lambda + D, \qquad D = \lambda - z.$$

Inversement si l'on connaît la déclinaison solaire, la détermination de la hauteur du Soleil à midi donne la latitude. C'est la méthode utilisée par les marins depuis le milieu du xv^e^ siècle, celle qui permit à

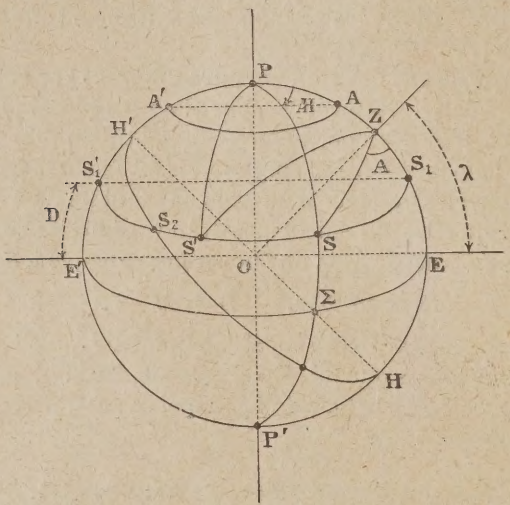


Fig. 84.

Christophe Colomb d'aller des Canaries aux îles de Bahama, sans presque quitter le même parallèle.

Nous avons raisonné dans le cas où le lieu d'observation est dans l'hémisphère boréal et où la déclinaison est boréale;

Si elle était australe, on aurait :

$$z = \lambda + D.$$

Restons dans la première hypothèse.

Pour fixer les idées, soit $\lambda > 23° 27'$: pendant toute l'année le Soleil est au sud de l'observateur, lors de son passage au méridien.

98 *bis*. **Gnomons.**

La variation de la longueur des ombres à dû frapper les hommes dès la plus haute antiquité. Les ombres, très longues le matin et le soir, ont un minimum à midi; ce minimum varie au cours de l'année.

Les ombres sont le plus courtes possible à midi le 22 juin (*solstice d'été*); elles ont à midi leur plus grande longueur le 22 décembre (*solstice d'hiver*).

On a systématisé la mesure des ombres en utilisant le *gnomon*.

C'est une colonne verticale, un obélisque, par exemple, qui projette son ombre sur le sol horizontal (fig. 85).

Entre sa hauteur H et la longueur O de l'ombre, existe la relation :

$$O = H \operatorname{tg} z.$$

On utilise souvent comme gnomon, une plaque percée d'un trou par où passent les rayons solaires.

Parmi les gnomons célèbres, citons celui que Cassini I^er^ construisit

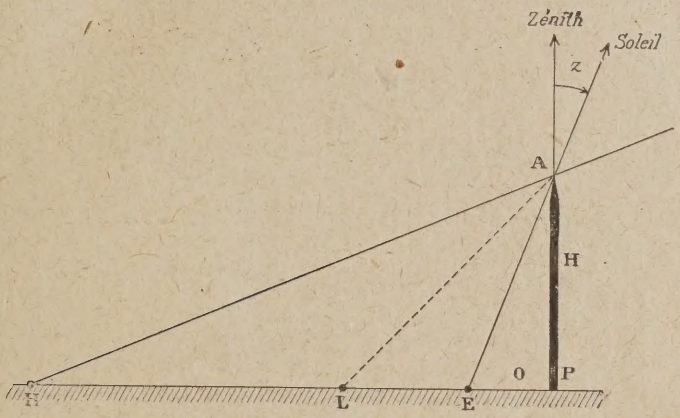


Fig. 85.

dans l'église Saint-Pétrone de Bologne. Les rayons solaires pénétraient par un trou circulaire de 3 cm. de diamètre percé dans une plaque de bronze horizontale scellée dans la voûte à 27 mètres environ du sol.

Voici la description du gnomon de San Petronio que donne le président de Brosses dans ses *Lettres familières*, écrites d'Italie en 1739 : « ... Mais ce qu'il y a de principal est la fameuse ligne méridienne tracée sur le pavé par Cassini, laquelle, tant qu'elle existera, servira de règle aux astronomes à venir pour mesurer l'obliquité de l'écliptique. Elle est ménagée fort adroitement dans la plus grande longueur de l'église, passant avec obliquité entre deux piliers. La longueur de cette ligne fait la six cent millième partie de la circonférence de la terre (67 m. environ). Elle est de marbre, divisée dans sa longueur en deux parties égales, par un filet de cuivre qui marque précisément le méridien, et sur le marbre sont gravées toutes les choses qui peuvent avoir rapport à l'ouvrage pour le rendre parfait. L'endroit de la voûte où est le petit trou par où l'image du soleil va se porter à midi précisément sur la ligne de cuivre, s'étant un peu affaissé, on fut obligé, sur la fin du siècle dernier, de restaurer l'ouvrage. Il passe maintenant pour le plus parfait de tous ceux qui sont en ce genre, et ses bonnes qualités sont inscrites sur une

pierre incrustée dans le mur. J'ai été choqué de voir qu'on la foulait aux pieds sans respect, ce qui efface beaucoup les caractères. »

Le lecteur voit l'inconvénient de ces sortes d'ouvrages. Outre que l'image du Soleil n'est pas nette, la stabilité est médiocre en raison des tassements inévitables que subissent les monuments au cours des siècles.

Je complète ces renseignements au moyen du *Voyage en Italie* de Lalande (2e éd., 1786). Cassini fit sa méridienne en 1655; il la rétablit en 1695; on refit les marbres en 1776. Le trou est à 27,39 mètres au-

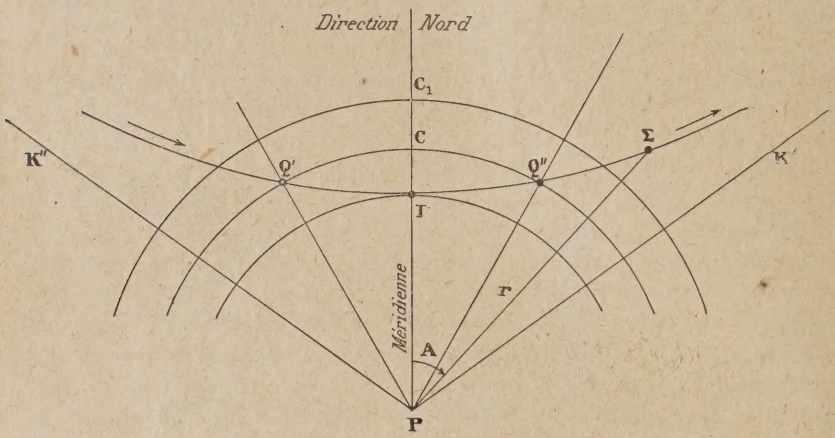


Fig. 86.

dessus du pavé. Les signes marqués sur le marbre sont (en particulier) les degrés de hauteur solaire.

Citons encore celui de Saint-Sulpice.

La plaque percée (je ne sais si elle existe encore) était scellée dans le mur fermant une fenêtre du portail sud. La méridienne (indiquée par un trait noir sur le dallage) est prolongée sur un obélisque élevé de l'autre côté de l'église, à 60 mètres environ de la plaque. A midi l'image du Soleil se voit sur cet obélisque à une hauteur variable suivant la saison, et cela pendant près de trois mois. Elle s'élève à 8 mètres environ du sol au solstice d'hiver. Son diamètre est de 50 à 60 cm. suivant sa position. Pour la rendre plus nette, Le Monnier eut l'idée de couvrir le trou avec une lentille de long foyer.

Soit P le pied de la perpendiculaire abaissée sur le sol à partir du centre du trou T de la plaque (je raisonne sur le gnomon de Saint-Pétrone); il est immédiatement donné par un fil à plomb. Avec le point P comme centre, traçons sur le sol des circonférences concentriques C; traçons par le point P des droites repérant les azimuts A : nous déterminons ainsi un système de coordonnées polaires (fig. 86).

Étudions la trajectoire diurne de la tache lumineuse Σ.

99. **Emploi du gnomon.**

1° — Pour un lieu et au jour donnés, la formule :

$$\cos z = \sin\lambda . \sin D + \cos\lambda . \cos D . \cos H,$$

prend la forme : $\cos z = a + b \cos H$.

a et b sont (approximativement) des constantes.

De là résulte d'abord que la distance $r = \overline{P\Sigma}$, a la même valeur pour des valeurs égales et de signes contraires de l'angle horaire H, par suite pour des valeurs égales et de signes contraires de l'azimut A. C'est le fondement de la détermination de la méridienne par la méthode des *ombres égales* (méthode des hauteurs correspondantes, § 10).

Nous déterminerons donc en quels points Q′ et Q″ le centre de la tache lumineuse Σ coupe une quelconque des circonférences C, avant et après son passage au méridien : la méridienne PΓ est la bissectrice des droites PQ′ et PQ″.

Ce n'est pas absolument exact en raison de la variation de la déclinaison solaire; mais il suffit d'opérer au voisinage des *solstices* (22 juin et 22 décembre) pour que la méthode devienne rigoureuse.

En effet, la déclinaison, qui est alors maxima ou minima, reste plusieurs jours à peu près invariable.

2° — La distance $\overline{P\Sigma}$ est infinie au moment où le Soleil se lève ou se couche; $z = 90°$, $O = \infty$. A ces valeurs de la distance zénithale correspondent deux azimuts, et sur le sol horizontal deux droites PK′, PK″. Quand le Soleil monte sur l'horizon, la distance PΣ diminue; elle devient minima au passage du Soleil par le méridien. Enfin la trajectoire présenterait une seconde branche exactement symétrique de la première, si la déclinaison n'était pas variable : la trajectoire n'est pratiquement symétrique par rapport à la méridienne qu'au voisinage des solstices.

A propos du cadran solaire horizontal, je reviens sur la courbe décrite par la tache lumineuse : nous verrons que c'est une hyperbole (§ 140).

Connaissant la distance verticale H du trou T au-dessus du sol de l'église (voir plus haut), mesurant la distance $O = \overline{P\Gamma}$, à midi vrai (passage du Soleil par le méridien), nous pouvons déterminer de jour en jour la distance zénithale solaire z à midi vrai :

$$O = H \operatorname{tg} z.$$

La déclinaison est donnée par la formule :

$$D = \lambda - z;$$

λ est la latitude.

3° — Poursuivons cette étude toute l'année.

Nous trouvons que la distance PΣ à midi vrai oscille entre un maximum au voisinage du 22 décembre (*solstice d'hiver*) et un minimum au voisinage du 22 juin (*solstice d'été*); le mot *solstice* indique, non pas

qu'alors le Soleil *s'arrête*, mais que sa déclinaison devient momentanément invariable. Sensiblement à égale distance de ces époques, la déclinaison s'annule; le Soleil passe dans l'équateur terrestre : nous verrons pourquoi l'on dit alors qu'il y a *équinoxe* (§ 100).

Aux solstices la déclinaison solaire D est précisément égale à l'angle ω que font entre eux les plans équateur et écliptique. On trouve ainsi :

$$\omega = 23^\circ\ 27'\ \text{environ.}$$

4° — C'est par une telle méthode que les anciens déterminaient effectivement l'obliquité de l'écliptique. Ainsi 250 ans avant J.-C., Pythéas trouva qu'à Marseille, au solstice d'été, la longueur de l'ombre était à la hauteur du gnomon dans le rapport :

$$O : H = \text{tg}\, z = 0{,}348, \qquad \text{d'où :} \qquad z = 19^\circ\ 12'.$$

Mais en raison du diamètre apparent du Soleil, l'ombre est plus courte que si le Soleil était réduit à son centre; il faut donc ajouter le demi-diamètre apparent solaire, soit 16′, pour avoir la hauteur zénithale du centre du Soleil. D'où : $z = 19^\circ\ 28'$.

Prenons pour latitude de Marseille 43° 18′; nous trouvons pour l'obliquité de l'écliptique 250 ans avant J.-C. :

$$\omega = 43^\circ\ 18' - 19^\circ\ 28' = 23^\circ\ 50'$$

Nous ne tenons pas compte de la réfraction : d'une discussion plus précise on conclut : $\omega = 23^\circ\ 49'$.

Or aujourd'hui l'obliquité est 23° 27′; en 22 siècles elle aurait donc diminué de 22′. Les astronomes admettent effectivement une diminution de 48″ par siècle (§ 112). A ce taux l'inclinaison au temps de Pythéas aurait été de 23° 44′. La différence avec le nombre expérimental que nous transmettent Hipparque et Ptolémée, est de l'ordre des erreurs d'expérience. Supposons le gnomon de 10 mètres; à midi au solstice d'été, l'ombre avait 348 centimètres de longueur. Au voisinage de 19°, la tangente varie de 0,020 par degré; dans notre hypothèse cela correspond à 1 centimètre de variation de l'ombre pour 3′ de variation sur la hauteur zénithale. Au surplus la latitude ci-dessus indiquée est celle de l'Observatoire; nous ne savons si Pythéas observait à Longchamps, au Prado ou sur la Cannebière.

Le lecteur se rappellera qu'à la surface de la Terre une minute d'angle vaut un mille marin ou 1 852 mètres.

99 *bis*. **Méthode des hauteurs égales avec le Soleil. Correction du midi.**

Pour déterminer avec précision le méridien au moyen du Soleil, il faut tenir compte de la variation de déclinaison.

Reprenons la formule :

$$\cos z = \sin\lambda . \sin D + \cos\lambda . \cos D . \cos H.$$

Différentions-la dans l'hypothèse que la hauteur z et la latitude λ demeurent constantes. On trouve immédiatement :

$$d\text{Æ} = d\text{D}\left[\frac{\text{tg}\,\lambda}{\sin \text{Æ}} - \frac{\text{tg D}}{\text{tg Æ}}\right].$$

On connaît par hypothèse la latitude λ du lieu d'observation. On connaît la date de l'observation, par conséquent la déclinaison solaire et la variation moyenne diurne. On connaît enfin les heures approximatives des observations, par conséquent les angles horaires correspondants. On peut donc calculer le dD de la formule, et l'erreur dÆ sur l'angle horaire de retour à la hauteur z choisie.

Supposons l'angle dÆ réduit en temps; la correction en temps du passage au méridien est moitié de la quantité précédente. D'où la formule classique :

$$d\text{Æ} = \frac{d\text{D}}{30}\left[\frac{\text{tg}\,\lambda}{\sin \text{Æ}} - \frac{\text{tg D}}{\text{tg Æ}}\right].$$

dD est évalué en minutes et secondes d'arc.

dÆ est exprimé en minutes et secondes de temps; c'est la correction qu'il faut faire à l'heure trouvée en prenant la moyenne des heures qui correspondent aux hauteurs égales.

Dans notre hémisphère, la correction est soustractive du 21 décembre au 21 juin ($d\text{D} > 0$) : le passage du soir à la hauteur choisie est retardé par l'accroissement de la déclinaison. La correction est additive du 21 juin au 21 décembre. Elle est nulle aux solstices ($d\text{D} = 0$).

Pour les habitants de la zone torride, deux jours par an la correction est nulle pour un certain angle horaire Æ; la condition :

$$\text{tg}\,\lambda = \text{tg D}\,.\cos \text{Æ},$$

peut être satisfaite.

Pour fixer les idées sur les ordres de grandeurs, opérons à Paris aux équinoxes, à 9 heures et à 15 heures. On a :

$$\sin \text{Æ} = 0{,}707, \qquad \text{tg}\,\lambda = 1{,}1436$$
$$\text{D} = 0, \qquad d\text{D} = 356'' \text{ pour 6 heures.}$$
$$d\text{Æ} = \frac{356}{30} \times 1{,}617 = 19{,}2 \text{ secondes.}$$

100. Inégalité des jours et des nuits.

1° — Par définition, *il fait jour* quand le Soleil est *au-dessus* de l'horizon (la distance zénithale du centre de l'astre z est inférieure à 90°); *il fait nuit* quand le Soleil est *au-dessous* de l'horizon (la distance zénithale est supérieure à 90°).

Nous verrons quelles restrictions il faut apporter à cette définition.

Le commencement et la fin du jour sont analytiquement définis par la condition (fig. 87) :

$$z = 90°, \qquad \cos \text{Æ} = -\,\text{tg}\,\lambda\,.\,\text{tg D} \qquad (1)$$

Les angles horaires solaires varient proportionnellement au temps (si nous négligeons l'inégalité de variation de l'ascension droite); le jour a donc pour durée approchée :

$$2\,H = 2 \arccos(-\operatorname{tg}\lambda \cdot \operatorname{tg} D).$$

La déclinaison varie entre les limites $\pm\omega$, où ω est l'angle de l'écliptique avec l'équateur. En un lieu défini par sa latitude λ, la durée du jour varie donc entre les limites :

$$2 \arccos(-\operatorname{tg}\lambda \cdot \operatorname{tg}\omega), \qquad 2 \arccos(\operatorname{tg}\lambda \cdot \operatorname{tg}\omega).$$

Ces formules approchées sont largement suffisantes pour le calcul

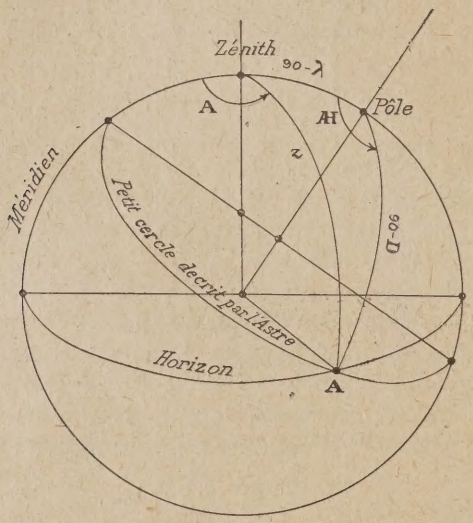


Fig. 87.

d'un phénomène compliqué par la réfraction atmosphérique et diverses autres causes.

2° — Pour fixer les idées, calculons les durées limites du jour à Paris :

$$\lambda = 48^\circ\,50', \qquad D = \omega = 23^\circ\,27';$$
$$\operatorname{tg}\lambda = 1{,}144, \qquad \operatorname{tg}\omega = 0{,}413; \qquad \operatorname{tg}\lambda \cdot \operatorname{tg}\omega = 0{,}472;$$
$$\arccos(0{,}472) = 60^\circ\,50', \qquad \arccos(-0{,}472) = 119^\circ\,10'.$$

Doublons et convertissons en temps; nous trouvons :

$$121^\circ\,40' = 8^h\,6^m, \qquad 238^\circ\,20' = 15^h\,53^m.$$

Ainsi à Paris et au solstice d'été, quand le Soleil à midi passe le plus haut possible au-dessus de l'horizon, la durée du jour est d'environ 16 heures; au solstice d'hiver, quand le Soleil à midi est le plus bas possible, la durée du jour est environ moitié moindre.

3° — La durée du jour est uniformément de 12 heures pour tous les points situés sur l'équateur. On a alors $\lambda = 0$; la formule (1) devient :

$$\cos A = 0, \qquad 2A = 180° = 12 \text{ heures.}$$

La durée du jour est de 12 heures simultanément pour tous les lieux quand la déclinaison solaire s'annule; $D = 0$, $\operatorname{tg} D = 0$.

Cela arrive deux fois par an, au voisinage du 21 mars et du 21 septembre, *lors des équinoxes* : d'où l'étymologie de ce mot.

Il est intéressant de chercher de combien l'angle A varie du matin au soir, en raison de la variation de la déclinaison.

La formule (1) différentiée donne :

$$dA = \frac{\operatorname{tg}\lambda}{\sin A} \frac{dD}{\cos^2 D}.$$

Calculons dA pour les équinoxes; c'est alors que dD est le plus grand. On a :

$$A = 90°, \qquad D = 0, \qquad dA = \operatorname{tg}\lambda . dD$$

Aux équinoxes la variation horaire de déclinaison est 59″,3, soit 712″ pour 12 heures.

Calculons pour Paris :

$$\lambda = 48° 50', \qquad \operatorname{tg}\lambda = 1{,}144;$$
$$dA = 712 \times 1{,}144 = 814''$$

Transformons en temps : $dA = 814 : 15 = 54$ secondes, près d'une minute.

4° — Le tableau suivant donne les durées extrêmes du jour pour diverses latitudes.

Latitudes.	Durées extrêmes.	Latitudes.	Durées extrêmes.
0	$12^h \pm 0$	40	$12^h \pm 2^h\,51^m$
5	$\pm 17^m$	45	$\pm 3\ 26$
10	± 35	50	$\pm 4\ 9$
15	± 53	55	$\pm 5\ 7$
20	$\pm 1^h\,13^m$	60	$\pm 6\ 30$
25	$\pm 1\ 34$	65	$\pm 9\ 9$
30	$\pm 1\ 56$	66° 33′	± 12
35	$\pm 2\ 22$		

C'est par les durées du jour le plus long et du jour le plus court que les géographes de l'antiquité déterminaient les latitudes : Ptolémée préférait cette méthode à toutes les autres. Plusieurs causes cependant faussaient leurs mesures : ils ignoraient l'existence de la réfraction; ils ne connaissaient pas exactement la valeur maxima de la déclinaison solaire (obliquité de l'écliptique); enfin leurs procédés de mesure du temps étaient rudimentaires.

C'est avec grand'raison qu'ils choisissaient le jour le plus long et le jour le plus court : d'abord ils n'avaient pas de tables correctes des déclinaisons solaires; ensuite, au voisinage des solstices, la déclinaison est quasiment invariable. En dehors des solstices, sa variation diurne altère la durée du jour déduite de la formule simple : en particulier, le passage au méridien ne coupe pas le jour en deux parties égales.

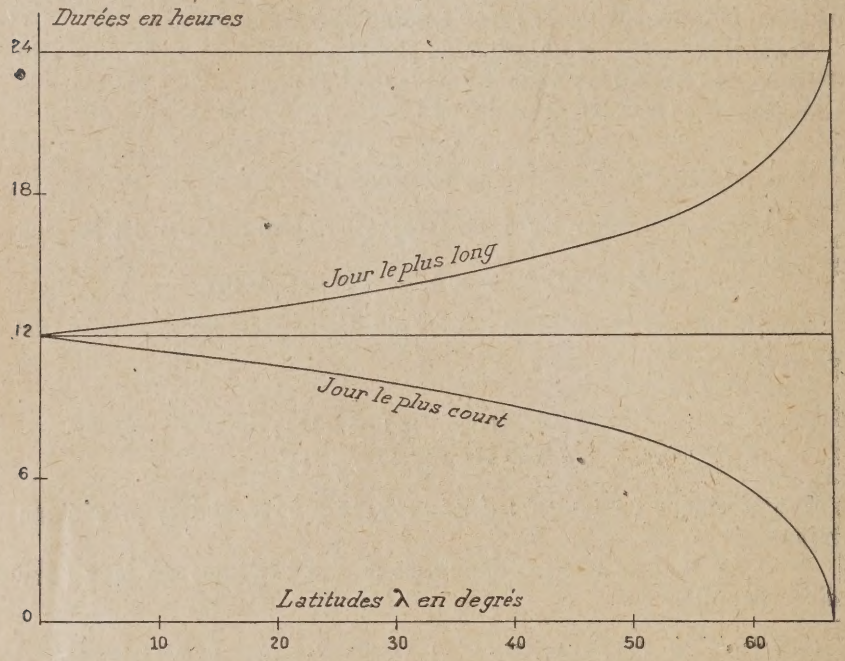


Fig. 88.

Maupertuis considère cette méthode comme acceptable pour les marins, *faute de mieux*. La déclinaison est suffisamment connue par la date de l'observation; il n'est pas difficile de corriger la durée du jour de la variation diurne de la déclinaison. Mais il faut tenir compte de la marche du navire qui allonge le jour ou le raccourcit, suivant que sa route est à l'ouest ou à l'est.

5° — Lever du Soleil en mer.

On utilise parfois l'heure du lever du Soleil pour déterminer la latitude en mer. On cherche dans la *Connaissance des Temps* la déclinaison solaire D pour le jour de l'observation et l'heure approximative du lever; connaissant l'heure de Paris, la longitude approchée du lieu, déterminant l'heure du lever, on connaît H. La formule donne λ.

Plusieurs corrections sont nécessaires.

Quand on voit émerger le bord du Soleil, la distance zénithale du

centre n'est pas 90°. Elle est 90° + le demi-diamètre apparent + la dépression — la parallaxe horizontale.

Les marins utilisent à l'horizon une réfraction *dite moyenne* correspondant à la température + 10° et à la pression 760 mm.; elle est de 33′ 48″. Corrigée de la parallaxe horizontale, la correction est de 33′ 39″.

Le demi-diamètre apparent est fourni par les tables à la date de l'observation; la dépression (Voir ma *Géographie Mathématique*) dépend de la hauteur de l'observateur au-dessus du niveau de la mer.

Nous parlons de la parallaxe horizontale au § 233.

Dans ces conditions, pour calculer H, il faut utiliser la formule complète :

$$\cos z = \sin \lambda . \sin D + \cos \lambda . \cos D . \cos H.$$

Je reviens sur les observations de hauteur solaire dans la *Géo. Math.*

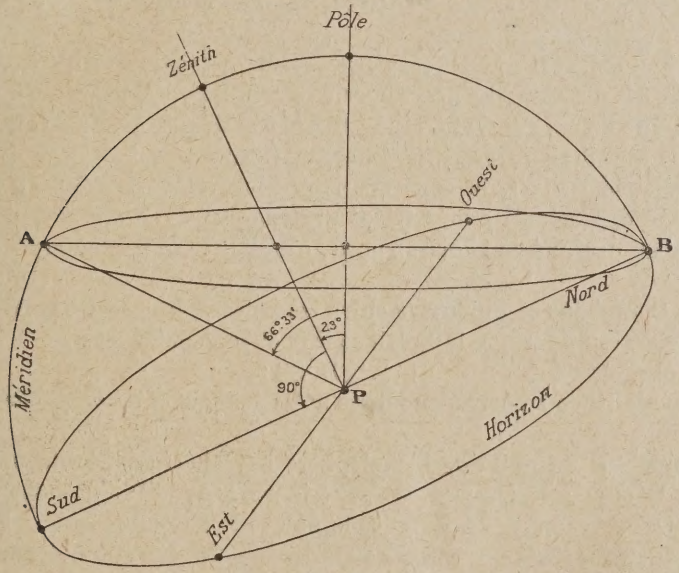


Fig. 89.

101. — Cercles polaires.

1° — Pour calculer les limites *extrêmes* du jour et de la nuit, nous avons trouvé la formule :

$$2H = 2 \text{ arc cos } (- \text{tg } \lambda . \text{tg } \omega).$$

Le cosinus devant rester < 1, la formule conduit à un résultat imaginaire pour : $\text{tg } \lambda . \text{tg } \omega > 1$, $\lambda > 90 - \omega$;

$$\lambda_0 > 66° 33'.$$

Le Soleil cesse de se lever *tous les jours* de l'année lorsque la latitude est supérieure à λ_0. Les parallèles terrestres qui correspondent à cette

latitude, sont les *cercles polaires*. Pour les points situés sur ces cercles, le jour le plus long est de 24 heures (au solstice d'été pour le cercle polaire boréal); le jour le plus court est de 0 heure (au solstice d'hiver pour le cercle boréal). C'est l'inverse pour le cercle austral. Pour fixer les idées rappelons que le cercle polaire boréal passe au-dessus de l'Islande, à l'extrême nord de la Norvège, de la Suède et de la Russie. La latitude de Pétrograd est de 59° 56′ seulement; celle du Cap Nord, à l'extrême pointe de la Norvège, est de 71° environ. Le cercle polaire passe près de Tornéa au sommet du golfe de Bothnie (nord de la mer Baltique). Le lecteur comprend pourquoi les touristes affluent au Cap Nord vers le solstice d'été : ils ont le plaisir (?!) de voir le Soleil 24 heures par jour.

La figure 89 représente le cône AB de demi-angle au sommet 66° 33′ que décrit le Soleil au solstice d'été; l'axe de ce cône est la ligne des pôles.

Si le lieu d'observation P est sur le cercle polaire boréal, son zénith est à 23° 27′ du pôle; le cône décrit par le Soleil tangente l'horizon suivant une de ses génératrices. Le Soleil à midi est à 46° 54′ de l'horizon sud, à minuit il vient tangenter l'horizon nord.

Au solstice d'hiver, le cône décrit par les vecteurs allant au Soleil est formé des mêmes génératrices prolongées; à minuit le Soleil est à 46° 54′ au-dessous de l'horizon nord, à midi il vient tangenter l'horizon sud.

2° — Cherchons ce qui arrive entre les pôles et les cercles polaires.

La condition pour que le Soleil se lève et se couche est :

valeur absolue de $\operatorname{tg}\lambda . \operatorname{tg} D < 1$;

à chaque latitude λ correspond donc une déclinaison Δ complémentaire de λ.

Considérons un point de l'hémisphère boréal. Quand la déclinaison solaire D supposée boréale est supérieure à Δ, le Soleil cesse de se coucher; par exemple, à la latitude 80°, le Soleil cesse de se coucher quand sa déclinaison boréale est supérieure à 10°. Quand la déclinaison solaire D supposée australe est supérieure à Δ, le Soleil cesse de se lever; à la latitude 80°, le Soleil cesse de se lever quand sa déclinaison australe est supérieure à 10°.

Ainsi pour tous les points de latitude λ situés au delà du cercle polaire (boréal pour préciser), l'année se divise en trois parties.

La déclinaison D boréale est supérieure à $90 - \lambda$: il n'y a pas de nuit.

D est compris entre $\pm (90 - \lambda)$: le Soleil se lève et se couche.

D est austral et supérieur à $90 - \lambda$: il n'y a pas de jour.

Jusqu'au cercle polaire, le Soleil se lève et se couche tous les jours; au pôle il y a *environ* 6 mois de nuit et 6 mois de jour.

3° — Rien de plus facile que de savoir le nombre de jours pendant lesquels le Soleil ne se couche pas ou ne se lève pas, si nous possédons une table des déclinaisons pour tous les jours de l'année. Supposons-

nous par exemple à 80° de latitude boréale : nous comptons le nombre des jours pour lesquels la déclinaison boréale du Soleil est supérieure à 10° (complément de 80°), et le nombre des jours pour lesquels la déclinaison australe du Soleil est supérieure à 10°.

Nous ne trouvons pas des nombres égaux. Ainsi à la latitude boréale de 80°, le Soleil ne se couche pas pendant environ 134 jours; il ne se lève pas pendant environ 127 jours. Corrélativement pour la latitude

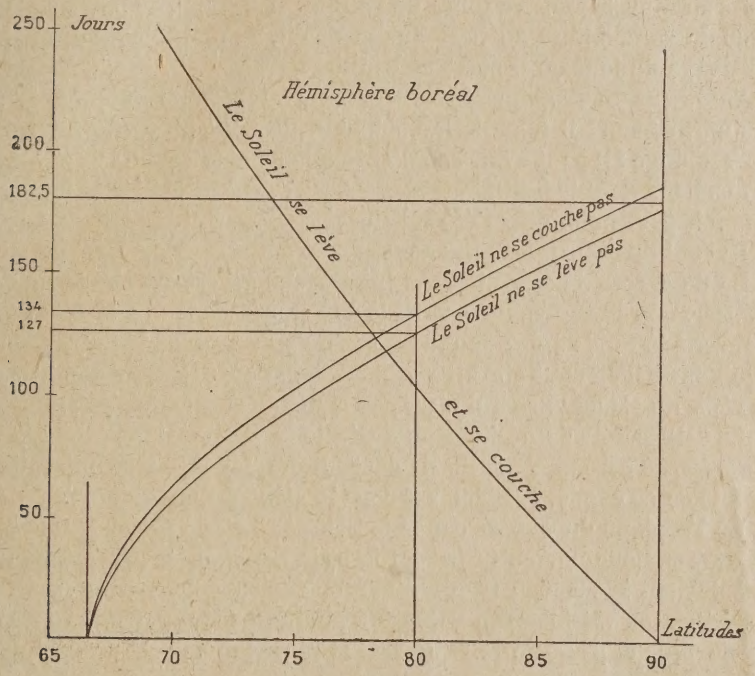


Fig. 90.

australe de 80°, il ne se lève pas pendant environ 134 jours et ne se couche pas pendant environ 127 jours. Cette curieuse dissymétrie tient à ce que le Soleil ne se meut pas uniformément sur l'écliptique : les mêmes variations de déclinaison ne correspondent pas aux mêmes intervalles de temps.

La figure 90 représente le résultat des calculs.

102. Cercles tropiques.

D'une manière générale la distance zénithale du Soleil *à midi* est égale à la différence de la latitude du lieu et de la déclinaison solaire :

$$z = \lambda - D.$$

Quand la déclinaison du Soleil est 10°, il passe à midi vrai par le zénith des lieux dont la latitude est de 10°. Puisque la déclinaison solaire

oscille annuellement entre $\pm 23° 27'$, tous les lieux dont les latitudes sont comprises entre ces limites, voient *deux* fois par an, à midi vrai, le Soleil à leur zénith : l'ombre d'un style vertical se réduit alors à un point, le Soleil éclaire le fond des puits, pour profonds qu'ils soient.

Dans les lieux dont les latitudes sont inférieures à $23° 27'$, le Soleil *à midi* est au nord tant que sa déclinaison est supérieure à la latitude; il est au midi les autres jours de l'année. Il devient quasiment impossible de se conduire au jugé sur le Soleil, au moins quand on est au voisinage du jour où il passe au zénith.

Au-dessus du Tropique boréal l'homme a toujours son ombre à droite (au nord) quand il regarde le couchant. Ce n'est plus vrai au-dessous du Tropique : il peut avoir son ombre à gauche (au midi).

Les lieux dont la latitude est de $\pm 23° 27'$, voient le Soleil à leur zénith une fois par an, lors d'un des solstices.

Ils sont dits sur les *cercles tropiques*.

Le petit cercle de déclinaison boréale $23° 27'$ est appelé *tropique du Cancer*, non pas qu'*actuellement* le Soleil soit dans la constellation du Cancer à la fin de juin; nous verrons qu'en raison de la précession des équinoxes, il en était ainsi il y a deux mille ans. Il est seulement dans le *signe* du Cancer : ce qui n'est pas la même chose (voir § 26).

Le petit cercle de déclinaison australe $23° 27'$ est appelé *tropique du Capricorne* parce qu'à la fin de décembre, quand il passe au zénith des points de ce cercle, le Soleil est dans le *signe* du Capricorne.

Le Tropique du Cancer coupe le Sahara, à égale distance d'El-Goléa et de Tombouctou, entre le Maroc et le Sénégal. Il passe à peu près exactement à Assouan (Haute-Égypte, anciennement Syène), à Chandernagor (au voisinage de Calcutta), puis au nord du Tonkin. Il traverse le Mexique et passe entre la Floride et la Havane.

103. Saisons astronomiques et climatologiques.

1° — La Terre est ainsi divisée en 5 régions par les tropiques et les cercles polaires. L'espace compris entre les tropiques s'appelle *zone torride*; il est coupé en deux par l'équateur; les *zones tempérées* vont des tropiques aux cercles polaires au delà desquels sont les *zones glaciales*.

On appelle *antipodes* deux pays placés sur le même diamètre terrestre; il y a plus de 2 000 ans qu'on connaît la rondeur de la Terre, par suite qu'on sait l'existence de peuples antipodes.

Les antipodes ont le même horizon dont l'un voit la face boréale, l'autre la face australe. Un astre se lève pour l'un quand il se couche pour l'autre; le jour le plus long pour l'un est le plus court pour l'autre. En un mot tous les phénomènes *purement géométriques* sont inversés. Si tous les deux se tournent vers l'équateur, l'un voit les astres se lever à sa droite, l'autre les voit se lever à sa gauche.

Ceci dit pour nous conformer au langage vulgaire, voici une remarque fondamentale.

Sur les mappemondes le lecteur voit marqués les cercles polaires et tropiques; ce qui peut lui faire croire que nos cinq régions sont effectivement limitées sur la Terre par des cercles, ou si l'on veut par des parallèles d'un ellipsoïde de révolution aplati suivant la ligne des pôles : *ce qui ne résulte en aucune manière de nos définitions et est généralement faux.*

Les cercles polaires et tropiques sont des cercles (parallèles) *de la sphère céleste*; sur la Terre leur correspondent les lieux des points dont les latitudes ont des valeurs déterminées $\pm\lambda_0$, $\pm\omega$, lieux dont *a priori* nous ne connaissons pas la forme, et qui *certainement*, pour parler en toute rigueur, ne sont pas des parallèles d'un ellipsoïde de révolution. Qu'il en soit ainsi comme première approximation, c'est admissible; mais encore une fois, pour bien comprendre les raisonnements, il ne faut pas lâcher les définitions. La forme de la Terre et la relation de la verticale avec la surface terrestre n'entrent en aucune manière dans les définitions de la latitude et de la longitude *astronomiques*, les seules que nous ayons à considérer dans ce volume. C'est en Géodésie que nous aurons à déterminer la forme des lignes de même latitude ou de même longitude astronomiques.

Par suite, pour être correct, il faut définir les *antipodes*, les lieux dont les longitudes diffèrent de 180° et dont les latitudes sont égales et de signes contraires. Ils ne sont généralement pas sur la même droite passant par le centre de l'ellipsoïde auquel on assimile la Terre comme première approximation.

Les antipodes ont donc, non pas la même verticale, mais la même direction pour la verticale. Prolongeons la verticale de l'un : généralement elle ne se confondra pas avec la verticale de l'autre; elle se contentera de lui être parallèle. Les plans perpendiculaires à ces verticales coupent la sphère céleste suivant le même grand cercle : il est rigoureux de dire que les antipodes ont même horizon *astronomique*. Il est clair qu'ils n'ont pas le même plan horizon matériel.

Le mot *tropique* signifie *conversion*. C'est le petit cercle de la sphère céleste que le Soleil vient tangenter avant de *revenir*, de *retourner* vers l'équateur.

2° — Ici je crois bon de mettre en garde le lecteur contre les erreurs que les mots été, automne, hiver, printemps évoquent naturellement. On dit souvent que les saisons sont inversées pour les antipodes : *c'est absurde, tant au point de vue géométrique qu'au point climatologique.*

Au point de vue climatologique un exemple montre la sottise de ces assimilations. Il y a quelques années je partais en juillet pour le Sénégal (hémisphère nord); les gens me regardaient avec pitié pour l'extrême température que j'allais subir. J'avais toutes les peines du monde à leur expliquer que si la saison, imposée à mon voyage par mes fonctions

de professeur, était déplorable pour l'hygiène, elle correspondait à l'hiver du Sénégal (saison des pluies). Je serais descendu jusqu'au Congo français (hémisphère sud) que j'aurais trouvé à la même époque la même saison des pluies (c'est-à-dire l'hiver de ces régions). Dans toute la zone torride, il y a deux saisons principales, la saison sèche, la saison humide; en Afrique et dans l'Inde la saison humide commence à peu près en juillet. Ne parlons donc pas ici d'hiver et d'été; surtout ne croyons pas que l'équateur crée une ligne de démarcation.

A la vérité si l'on compare le Cap et la France au point de vue climatologique, l'inversion des saisons se soutient mieux.

Mais au point de vue géométrique l'inversion n'est pas vraie; je l'ai déjà montré par un exemple (§ 101). Les saisons ne sont pas égales, en raison de la non-uniformité de la variation de la déclinaison solaire. Si donc pour l'hémisphère nord on appelle printemps le temps que met le Soleil à passer l'équateur au tropique du Cancer, il est clair que le printemps pour l'hémisphère sud (temps que met le Soleil à passer de l'équateur au tropique du Capricorne) ne sera pas égal à notre printemps.

Ceci dit je ne songe pas à empêcher les poètes argentins de chanter le printemps quand nous sommes en automne : les poètes et l'astronomie n'ont rien de commun. Dans un sonnet célèbre, de Heredia parle de ces marins naviguant à l'ouest, penchés sur l'avant du navire, qui voyaient « se lever des étoiles nouvelles ». Ils voyaient se coucher les étoiles coutumières, ni plus ni moins. Mais si je n'en trouve pas le sonnet moins beau, je considère comme de piteux imbéciles ceux qui se refusent à admettre que ce sonnet constitue une ânerie astronomique.

Ne confondons pas les genres!

3° — Autre remarque. Je connais des gens que j'agace tous les ans en leur disant, passé le 21 juin, que les jours diminuent; ils sont furieux de penser que déjà la mauvaise saison approche *puisque les jours diminuent*. Il est vrai qu'ils sont ravis d'apprendre, dès que commence l'hiver, que les jours allongent. C'est que les saisons climatologiques ne se coupent pas *pour nous* comme le veut l'Astronomie inventée par les peuples d'Assur. Mars est dans notre printemps *climatologique*, décembre est dans notre hiver; septembre est en automne, juin est en été. En décalant les saisons d'un mois et demi, on les mettrait d'accord avec *notre* climat. Au reste je ne réclame pas cette réforme, la coupe théorique des saisons étant chose indifférente pour les ronds de cuir que devient l'humanité.

Mais nos poètes font bien de parler de septembre comme d'un mois d'automne et de chanter le printemps fin février.

104. Points de l'horizon où le Soleil se couche (amplitudes ortive et occase(.

1° — Dans le triangle sphérique PZA (fig. 87) on a (comparer § 13) :

$$\sin D = \sin\lambda \,.\, \cos z - \cos\lambda \,.\, \sin z \,.\, \cos A.$$

Cette formule relie l'azimut A à la distance zénithale z d'un astre de déclinaison D observé en un lieu de latitude λ. En particulier écrivons que la distance zénithale est 90°, ou que l'astre se lève ou se couche :

$$\sin D = -\cos\lambda . \cos A, \qquad \cos A = -\sin D : \cos\lambda. \qquad (1)$$

On appelle *amplitude ortive* l'azimut où l'astre se lève; l'*amplitude occase* est l'azimut où l'astre se couche.

La formule ne fournit pour A de valeur réelle que si l'on a :

$$\sin D < \cos\lambda, \qquad \lambda < 90° - D.$$

Nous retrouvons la condition précédemment obtenue (§ 101).

L'expérience consiste à se placer au milieu d'une plaine découverte

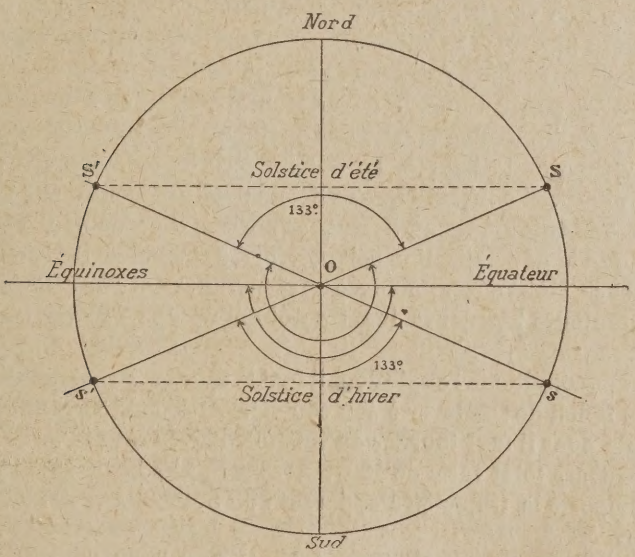


Fig. 91.

et à déterminer les points de l'horizon où le Soleil se lève et se couche. On mesure les azimuts de ces points par rapport au méridien.

C'est probablement la première constatation scientifique faite par l'homme.

Enfants, tous nous avons remarqué que le Soleil ne se lève pas et ne se couche pas tous les jours aux mêmes endroits.

Discutons la formule (1).

2° — POINT SUR L'ÉQUATEUR.

Pour un point de l'équateur, on a :

$$\lambda = 0; \qquad \cos A = -\sin D$$

Quand le Soleil est dans l'hémisphère boréal, $D > 0$, on doit écrire :

$$A = 90 + D, \qquad 2A = 180 + 2D.$$

Quand le Soleil est dans l'hémisphère austral, $D > 0$, on a :

$$A = 90 - D, \qquad 2A = 180 - 2D.$$

Il est clair que, pour la même déclinaison, les phénomènes sont identiques, que le Soleil soit dans l'un ou dans l'autre hémisphère; la dissymétrie apparente tient à ce que nous comptons les angles A à partir d'une droite menée vers le sud.

Abstraction faite des signes, pour un point O de l'équateur, l'amplitude azimutale 2A de la trajectoire solaire est maxima et égale à 180° aux équinoxes. Elle est minima et égale à 133° environ aux solstices, vers le nord ou vers le sud suivant que le Soleil est dans l'un ou l'autre hémisphère (fig. 91); le Soleil décrit alors au-dessus de l'horizon un demi-cercle qui se projette suivant SS′ ou suivant *ss′*

Il est à remarquer que cette variation d'amplitude n'empêche pas la constance du jour et de la nuit tels que nous les avons définis : ils sont uniformément de 12 heures. Le Soleil décrit un cône d'angle solide de plus en plus petit à mesure que sa déclinaison augmente; mais la moitié de ce cône reste toujours au-dessus de l'horizon d'un point de l'équateur.

Pour que la généralisation soit possible, fixons bien les conditions de l'expérience. Nous observons avec un théodolite dont *par convention* nous faisons toujours tourner la lunette autour de son axe vertical *dans le sens est-sud-ouest.*

Dans ces conditions l'angle dont il faut le tourner au solstice d'été pour suivre le Soleil de son lever à son coucher est $360 - 133 = 227°$ environ.

L'angle dont il faut tourner au solstice d'hiver est 133°.

Le parcours total varie de $180 + 2\,(23° 27')$ à $180 - 2\,(23° 27')$.

Peu importe la trajectoire apparente du Soleil entre son lever et son coucher.

Nous nous supposons toujours tournés vers l'équateur. Un habitant de l'hémisphère sud, se tournant aussi vers l'équateur, aurait des résultats inverses.

3° — Points de l'hémisphère nord.

La généralisation est maintenant facile.

Pour tous les points compris entre l'équateur et les cercles polaires, les amplitudes azimutales ont pour limites : $180 \pm 2A_0$:

$$A_0 = \text{arc sin}\,(\sin\omega : \cos\lambda);$$

ω est l'obliquité de l'écliptique ou le maximum de la déclinaison.

A_0 devient égal à 90° pour $\sin\omega = \cos\lambda$, c'est-à-dire sur les cercles polaires : un jour par an, au solstice d'été, l'amplitude azimutale (*toujours comptée est-sud-ouest*) devient 360°; un jour par an, au solstice

d'hiver, elle s'annule. Dans le premier cas, pour un point du cercle polaire boréal, le Soleil se lève juste au nord et se couche après avoir fait un tour complet nord-est-sud-ouest-nord.

Dans le second cas, il se lève juste au sud et se couche aussitôt après : il ne fait que frôler l'horizon (voir la fig. 93).

4° — Dissymétrie due a la variation diurne de déclinaison.

L'amplitude ortive n'égale l'amplitude occase que si la déclinaison ne varie pas sensiblement en un jour. C'est ce qui arrive au voisinage des solstices : la variation est quasi nulle.

Au voisinage des équinoxes la variation est maxima; elle vaut 59″,3 par heure de temps moyen, près de 24′ par jour.

Différentions la formule (1) :

$$\cos D.\, dD = \cos\lambda . \sin A.\, dA.$$

A l'équinoxe on trouve (au signe près) :

$$D = 0, \quad A = 90^\circ; \quad dD = \cos\lambda . dA.$$

Ainsi pour un lieu de l'hémisphère boréal, l'amplitude occase est sensiblement plus grande que l'amplitude ortive à l'équinoxe de printemps; la déclinaison croît sensiblement dans l'espace d'un jour. C'est l'inverse à l'équinoxe d'automne; la déclinaison décroît sensiblement dans l'espace d'un jour.

105. Angle de la trajectoire solaire avec l'horizon au lever et au coucher. Durée du lever ou du coucher.

1° — Reprenons la formule :

$$\sin D = \sin\lambda . \cos z - \cos\lambda . \sin z . \cos A.$$

D et λ étant supposés invariables, on a :

$$(-\sin\lambda . \sin z - \cos . \lambda \cos z . \cos A)\ dz + \cos\lambda . \sin z . \sin A . dA = 0.$$

D'où pour $z = 90^\circ$:

$$\sin\lambda . dz = \cos\lambda . \sin A . dA,$$

avec la condition :

$$\sin D = -\cos\lambda . \cos A.$$

D'où la formule :

$$-\frac{dz}{dA} = \frac{dh}{dA} = \frac{\pm\sqrt{\cos^2\lambda - \sin^2 D}}{\sin\lambda} = \operatorname{tg}\alpha, \qquad (1)$$

qui résout le problème posé. En effet ce que nous observons est la variation de la distance zénithale, ou de son complément la hauteur h au-dessus de l'horizon, en fonction de la variation d'azimut.

2° — Conséquence générale de la formule (1) : la trajectoire solaire

coupe l'horizon suivant une direction inclinée, excepté pour les lieux sur l'équateur. Sur l'équateur on a, quel que soit D :

$$\lambda = 0, \qquad dh : dA = \infty ;$$

la trajectoire solaire coupe l'horizon normalement.

Autre conséquence générale : l'inclinaison de la trajectoire est la même pour la même déclinaison solaire, *qu'elle soit australe ou boréale.*

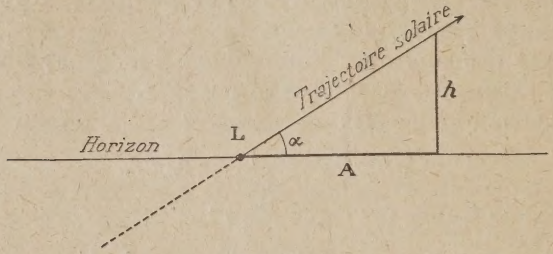


Fig. 92.

La trajectoire est le plus normale possible sur l'horizon pour $D = 0$ (*équinoxes*). On a alors

$$dh : dA = \operatorname{cotg} \lambda.$$

L'angle α est le complément de la latitude, ce qui est du reste évident sur une figure.

3° — Pour que le Soleil levant ou couchant se meuve tangentiellement à l'horizon, il faut qu'on ait :

$$\cos \lambda = \sin D, \qquad \lambda + D = 90°.$$

Ce n'est possible que pour les lieux des zones glaciales.

En particulier pour les cercles polaires, le phénomène se produit aux solstices. Dans l'hémisphère boréal, au solstice d'été le Soleil se lève et se couche au nord; sa trajectoire, qui est tout entière au-dessus de l'horizon, le tangente au nord. Au solstice d'hiver, sa trajectoire, tout entière au-dessous de l'horizon, le tangente au sud.

Au pôle ($\lambda = 90°$, $\cos \lambda = 0$), la formule est inapplicable sauf pour $D = 0$. Au pôle nord, le Soleil, qui apparaît au-dessus de l'horizon à l'équinoxe de printemps, rase cet horizon. De même à l'équinoxe d'automne, quand il est sur le point de disparaître. Les explorateurs ont maintes fois décrit cette grosse boule blanche qui se promène tout autour de l'horizon, ne s'élevant au-dessus que lentement de jour en jour, suivant une hélice sphérique, et ne déversant sur la Terre qu'une lumière blafarde (voir Appendice II).

4° — DURÉE DU LEVER OU DU COUCHER DU SOLEIL.

Appliquons la formule :

$$\cos z = \sin \lambda \,.\, \sin D + \cos \lambda \,.\, \cos D \,.\, \cos H \,.$$

à une latitude et à une déclinaison données.

Différentions; on a pour $z = 90°$:

$$d\mathcal{H} = \frac{dz}{\cos\lambda \cdot \cos D \cdot \sin \mathcal{H}} = \frac{dz}{\sqrt{\cos^2\lambda - \sin^2 D}}.$$

Cette formule donne le temps que le Soleil met à se lever ou à se coucher.

dz représente le diamètre apparent actuel du Soleil, D sa déclinaison, λ la latitude du lieu d'observation. C'est une méthode grossière, mais rapide et curieuse, pour déterminer la latitude.

La réfraction, quelque grande qu'elle soit, n'intervient pas, pourvu qu'elle reste la même pendant l'observation dont la durée est petite : elle abaisse seulement un peu l'horizon. Les temps que le Soleil met à s'élever au-dessus ou à s'abaisser au-dessous du nouvel horizon, ne diffèrent pas sensiblement des temps pour l'horizon réel.

Posons $dz = 30'$; la valeur minimum de $d\mathcal{H}$ est aussi $30'$, ce qui fait 2 minutes de temps.

Pour : $\cos\lambda = \sin D$,

on trouve $d\mathcal{H} = \infty$, ce qui est évident d'après le 3°.

106. Diamètre apparent. Réfraction atmosphérique.

Les calculs précédents ne sont qu'approchés.

D'abord nous raisonnons comme si le Soleil était réduit à un point; or son diamètre apparent est d'un demi-degré en moyenne. En second lieu les réfractions atmosphériques courbent les rayons : nous voyons encore le Soleil quand il est déjà un peu au-dessous de notre horizon géométrique. Ces deux causes ne modifient la longueur des jours que de quelques minutes : on en tient cependant compte dans le calcul des heures du lever et du coucher du Soleil que donnent les almanachs ou l'*Annuaire du Bureau des Longitudes*.

Mais si dans les mesures précises nous devons tenir compte de ces corrections, elles n'ont aucun intérêt pour la question qui nous occupe : le crépuscule vient en effet modifier considérablement les conclusions précédentes en ce qui touche la longueur *pratique* des jours et des nuits.

107. Crépuscule.

1° — Pour intéressante que soit la discussion précédente au sujet de la longueur des jours et des nuits, il ne faut pas oublier que pratiquement il fait jour, non pas quand le Soleil est au-dessus de l'horizon, mais quand on y voit clair. Or l'expérience la plus vulgaire apprend qu'on ne cesse pas d'y voir clair brusquement après le coucher du Soleil et qu'on y voit clair bien avant son lever. Il existe une période de transition, le *crépuscule* (*aube*, *aurore* le matin, *brune* le soir) d'une importance pratique énorme et devant laquelle la réfraction atmosphérique, le diamètre apparent solaire et la parallaxe perdent toute importance.

L'expérience montre qu'en raison des réflexions et diffractions sur les nuages, sur les poussières de l'air, peut-être sur les molécules gazeuses elles-mêmes, le Soleil nous éclaire tant qu'il n'est pas encore à 18° au-dessous de l'horizon. Naturellement il nous éclaire de moins en moins à mesure qu'il s'éloigne de l'horizon et d'une manière qui dépend

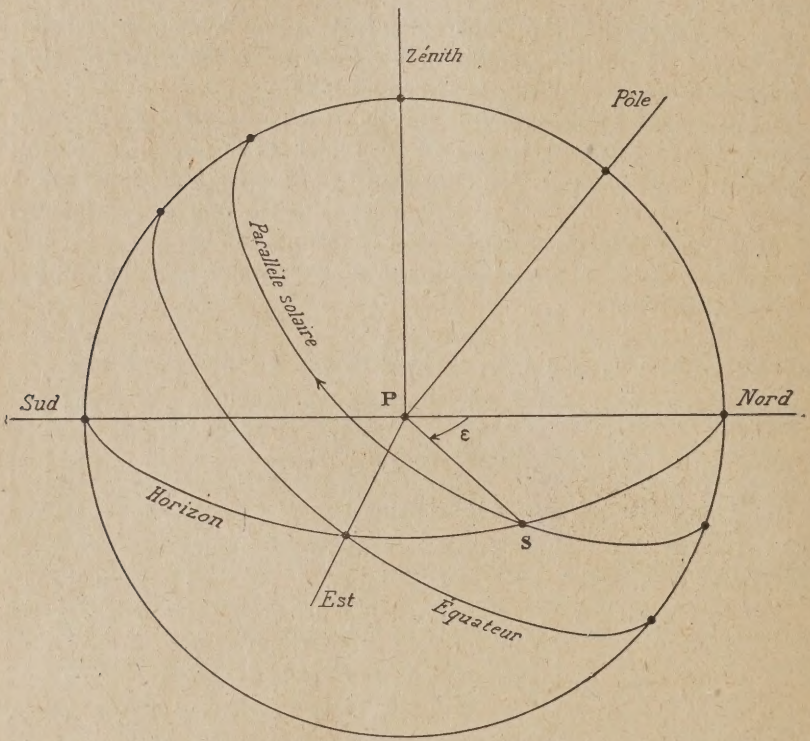


Fig. 93.

des conditions locales. L'étude du crépuscule ne peut donc fournir que des moyennes et des moyennes assez vagues, ce qui n'en diminue pas l'intérêt pratique. Ce nombre de 18° qu'on admet généralement, n'a rien de rigoureux : il n'est là que pour fixer les idées; on le pourrait aussi bien remplacer par 15 ou 20. On a choisi 18° en observant le temps qui s'écoule depuis le coucher du Soleil, jusqu'à l'instant où, à l'œil nu, on aperçoit les étoiles de grandeurs élevées.

Voici comment Fontenelle parle du crépuscule à sa marquise (*Pluralité des Mondes*). Que nos vulgarisateurs prennent modèle!

« L'air qui nous environne et qui est élevé au-dessus de nous, reçoit des rayons qui ne pourraient pas tomber sur la Terre; et parce qu'il est fort grossier, il en arrête une partie et nous les renvoie, quoiqu'ils ne nous fussent pas naturellement destinés. Ainsi l'aurore et les crépus-

cules sont une grâce que la nature nous fait; c'est une lumière que régulièrement nous ne devrions point avoir et qu'elle nous donne par-dessus ce qui nous est dû. Mais dans la Lune, où apparemment l'air est plus pur, il pourrait bien n'être pas si propre à renvoyer en bas les rayons qu'il reçoit, avant que le Soleil se lève, ou après qu'il est couché. Les pauvres habitants n'ont donc point cette lumière de faveur, qui, en se fortifiant peu à peu, les préparerait agréablement à l'arrivée du Soleil, ou qui, en affaiblissant comme de nuance en nuance, les accoutumerait à sa perte. Ils sont dans les ténèbres profondes, et tout d'un coup il semble qu'on tire un rideau; voilà leurs yeux frappés de tout l'éclat qui est dans le Soleil; ils sont dans une lumière vive et éclatante, et tout d'un coup les voilà tombés dans des ténèbres profondes. »

2° — Rappelons des faits que tout le monde est à même de vérifier.

Aucune variation brusque d'éclairement n'indique l'instant précis où le Soleil se couche ou se lève; il y a continuité parfaite, preuve de l'importance de la lumière réfléchie ou diffractée. Nous savons tous qu'avant le lever et après le coucher du Soleil, l'orient et l'occident ont une luminosité particulièrement intense, maxima en un point de l'horizon et décroissante à partir de ce point. Une observation plus attentive montre que le point le plus lumineux se déplace sur l'horizon. En effet il est situé dans le plan vertical qui passe par l'astre; nous savons d'autre part (§ 105) que la trajectoire de l'astre est inclinée sur l'horizon. Pour un point de notre hémisphère, le point le plus lumineux tourne donc vers le sud avant le lever du Soleil, vers le nord après son coucher. Ce sont là phénomènes très faciles à observer.

Je n'insiste pas sur les teintes caractéristiques qui colorent le ciel.

Passons à l'étude quantitative du phénomène.

3° — Pour trouver la longueur du jour *y compris le crépuscule* reprenons la formule fondamentale :

$$\cos z = \sin\lambda . \sin D + \cos\lambda . \cos D . \cos H .$$

Au lieu de poser $z = 90°$, posons :

$$z = 108°, \qquad \cos z = -\sin 18° = -0{,}309.$$

La durée du jour y compris le crépuscule est donc 2 fois la valeur H qui résulte de la formule :

$$\cos H = -\frac{0{,}309}{\cos\lambda . \cos D} - \operatorname{tg}\lambda . \operatorname{tg} D.$$

4° — Pour l'équateur $\lambda = 0$, la formule se simplifie :

$$\cos H = -0{,}309 \cos D.$$

Aux équinoxes $D = 0$, on a :

$$\cos H = -0{,}309, \qquad H = 108°.$$

Le crépuscule dure donc 18° d'angle horaire, ce qui correspond à un vingtième du jour, soit $1^h 12^m$.

Aux solstices, $D = 23° 27'$, $\cos D = 0{,}917$,

$$\cos H = -0{,}283 ; \quad H = 106° 26'.$$

Le crépuscule dure 16° 26′, ce qui correspond à $1^h 5^m$.

La variation est donc petite.

5° — Au pôle le crépuscule dure tant que le Soleil n'est pas à plus de 18° sous l'horizon; autrement dit, pour le pôle nord, tant que la déclinaison solaire australe est inférieure à 18°. L'*Annuaire du Bureau des Longitudes* fournit, comme dates du passage à cette déclinaison, le 13 novembre et le 29 janvier. D'où résulte que loin d'avoir six mois de nuit comme le suppose la première définition du jour (ou un peu moins en raison du diamètre apparent solaire et de la réfraction atmosphérique), le pôle jouit d'un crépuscule continu qui ne se termine que 39 jours avant le solstice d'hiver et reprend 39 jours après : d'où en tout onze semaines d'obscurité qu'interrompent encore les aurores boréales. Pendant tout le crépuscule, les divers points de l'horizon deviennent successivement lumineux, de sorte que l'on voit pour ainsi dire tourner le Soleil absent.

Nous sommes loin des six mois de nuit et d'obscurité profonde dont on a coutume de parler à propos des pôles!

6° — Calculons la durée du jour, y compris le crépuscule, pour Paris au solstice d'été : $\lambda = 48° 50'$, $D = 23° 27'$.

On trouve très sensiblement :

$$\cos H = -1, \qquad 2H = 360 = 24 \text{ heures}.$$

Cela signifie qu'à Paris, au solstice d'été, le crépuscule dure pendant toute la nuit géométrique.

Faut-il rappeler que, nouveaux adorateurs de la Lumière, les astronomes ont plusieurs années de suite, sous la direction vulgarisatrice de M. Flammarion, officié la nuit du solstice sur la terrasse de la Tour Eiffel? Le culte comportait un gueuleton, puis des discours. Pleins de paroles, d'enthousiasme et de champagne, les astronomes tenaient à vérifier qu'à peine la lueur crépusculaire éteinte du côté d'Asnières, elle reparaît au-dessus de Montmartre. Ohé! Ohé! Ils s'égayaient alors du côté de l'École militaire, flageolants sur leurs guiboles, mais confiants en la stabilité des lois de la nature et pleins de respect pour le calcul des géomètres.

L'angle ε que fait le Soleil avec la méridienne de Paris côté nord, quand il se lève ou se couche au solstice d'été, est voisin de 53°. Du haut de la Tour Eiffel on le voit donc se lever sur le Bourget et se coucher sur Maisons-Laffitte.

107 *bis*. **Crépuscules les plus longs et les plus courts.**

1° — C'est un problème très simple à poser, mais qui cependant a

beaucoup intrigué les géomètres du XVIII[e] siècle; Jean Bernoulli s'en est occupé pendant cinq ans sans en pouvoir venir à bout.

Il vaut donc la peine qu'on s'y arrête.

Voici d'abord son énoncé géométrique (fig. 94).

On donne le grand cercle HH, horizon du lieu dont le zénith est marqué; parallèlement à ce grand cercle, on donne le petit cercle CC distant du premier de l'angle $\overline{CH} = \gamma$ (18° par convention).

On donne une série de parallèles normaux à la droite PP′ (ligne des pôles).

La durée du crépuscule est conventionnellement le temps que le

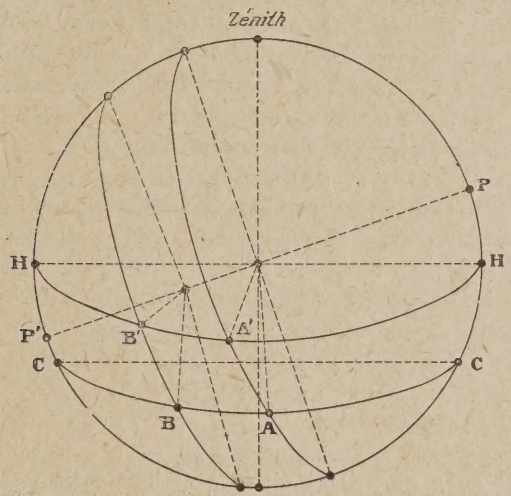


Fig. 94.

mobile (Soleil) met à décrire les arcs $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, ...; ce qui revient au même, cette durée est proportionnelle à la valeur angulaire des arcs AA′, BB′, ... On admet que la vitesse angulaire du mobile autour de PP′ est invariable.

Les arcs contiennent un nombre de degrés différents parce qu'ils sont inégalement longs et parce qu'ils correspondent à des rayons différents.

Il est clair qu'à longueur donnée, leur valeur angulaire croît quand leur rayon diminue, ce qui correspond aux grandes déclinaisons solaires boréale et australe. Nous prévoyons donc que les crépuscules les plus longs arrivent aux solstices. *Par rapport à la déclinaison, ce ne sont pas des maximums*; ce sont purement et simplement les valeurs qui correspondent aux déclinaisons extrêmes. Mais ce sont des maximums par rapport à la variable *temps*, parce qu'en fonction de cette variable la déclinaison est maxima et minima aux solstices.

Dans l'hémisphère boréal le crépuscule le plus long correspond au solstice d'été. Au solstice d'hiver, le crépuscule est un maximum par rapport au temps; mais il n'est pas le maximum maximorum.

2° — Il est à prévoir que les minimums arrivent au voisinage des

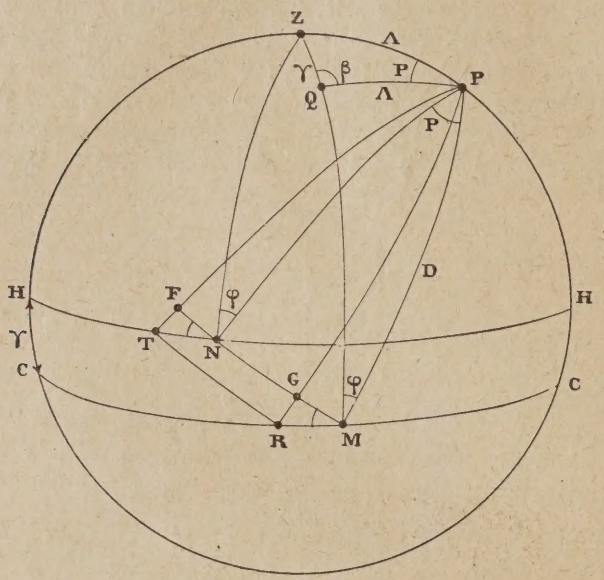


Fig. 95.

équinoxes, mais avec une dissymétrie qui tient à l'énoncé même du problème.

Voici la méthode d'Euler donnant facilement le résultat de Bernoulli (fig. 95).

MNF est le petit cercle décrit par le Soleil; $\overline{PM} = \delta$ est la distance polaire, complément de la déclinaison.

L'angle $P = \overline{MPN}$ mesure la longueur du crépuscule.

Faisons varier très peu la déclinaison; le Soleil décrit l'arc RT. Si par hypothèse le crépuscule est le plus court, la variation de la déclinaison ne modifie pas l'angle P. Donc ce qu'on enlève d'un côté, doit se retrouver de l'autre; d'où la condition $\overline{GM} = \overline{FN}$.

Comme on a $\overline{RG} = \overline{TF}$, les triangles RMG, TNF, rectangles en G et en F, sont égaux.

Les angles marqués sont égaux; d'où résulte l'égalité des angles φ.

Nous arrivons donc à cette conclusion sur laquelle repose la suite du raisonnement : *Pour les minimums l'angle du vertical avec le cercle de déclinaison est le même en* M *et en* N.

3° — Ceci posé, définissons le point Q par la condition $\overline{MQ} = 90°$. D'où $\underline{ZQ} = \gamma$.

Soit $\Lambda = \overline{ZP}$, la colatitude du lieu.

Les triangles PQM et PZN sont égaux. D'où $\overline{PQ} = \Lambda$.

Dans le triangle isocèle ZPQ, on trouve immédiatement :

$$\sin\frac{P}{2} = \sin\frac{\gamma}{2} : \sin\Lambda = \sin\frac{\gamma}{2} : \cos\lambda. \qquad (1)$$

ce qui définit la longueur du plus court crépuscule.

D'autre part :

$$\cos\beta = \operatorname{cotg}\Lambda \,.\, \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$$

Dans le triangle PQM, on a :

$$-\cos\delta = \sin\Lambda \,.\, \cos\beta.$$

D'où la déclinaison du Soleil pour le crépuscule le plus court :

$$-\cos\delta = \sin\lambda \,.\, \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}. \qquad (2)$$

4° — Appliquons à Paris.

$$\lambda = 48^\circ\,50', \quad \sin\lambda = 0{,}7528 \quad \cos\lambda = 0{,}6583$$
$$\sin 9^\circ = 0{,}1564, \quad \operatorname{tg} 9^\circ = 0{,}1584$$
$$-\cos\delta = -\sin D = 0{,}1192.$$

La déclinaison D du Soleil pour le crépuscule le plus court, est australe et de 6° 51′, ce qui arrive vers le 4 mars et le 11 octobre.

Appliquant la formule (1), on trouve :

$$P = 26^\circ\,45' \qquad P = 1^h\,47^m.$$

La durée du crépuscule le plus long (solstice d'été) est $2^h\,39^m$.

5° — HAUTEUR DE L'ATMOSPHÈRE.

Képler, La Hire, et beaucoup d'autres se sont efforcés de déterminer la hauteur de l'atmosphère à partir de la durée du crépuscule. Ils se fondaient sur l'hypothèse *absolument inadmissible*, que la réflexion est unique, ou, ce qui revient au même, qu'après deux réflexions la lumière est trop affaiblie pour être sensible. Admettant 18° pour l'angle γ, ils trouvaient 60 kilomètres pour hauteur de l'atmosphère. Je laisse au lecteur le soin de retrouver ce résultat qui n'a qu'un intérêt historique.

CHAPITRE III

ÉTUDE PRÉCISE DU MOUVEMENT SOLAIRE APPARENT

108. Mouvement réel et mouvement apparent.

Ce n'est pas le Soleil qui tourne autour de la Terre ; c'est la Terre qui tourne autour du Soleil. Montrons que l'hypothèse n'influe pas sur le résultat des mesures, de sorte qu'il est légitime de conserver le

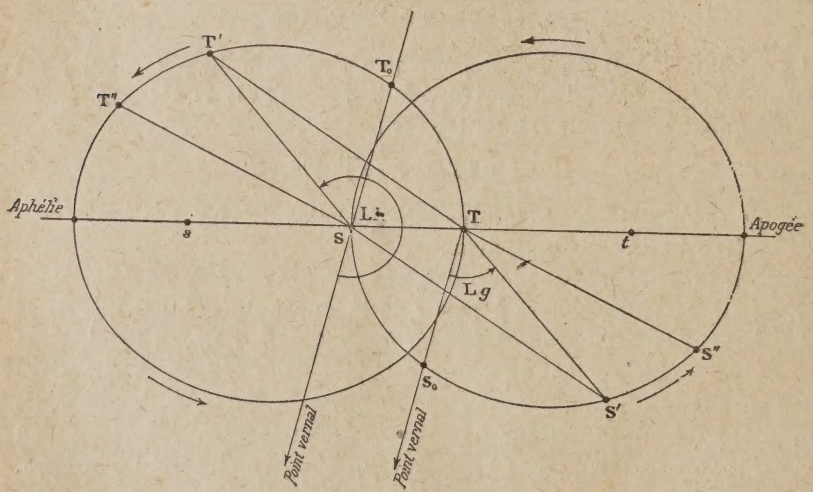


Fig. 96.

langage le plus commode, par suite de faire la Terre immobile et le Soleil mobile.

Si la Terre est fixe en T, le Soleil parcourt une certaine trajectoire SS'S'' suivant une certaine loi. Faisons maintenant le Soleil fixe et la Terre mobile : les vecteurs TS' et T'S sont égaux et parallèles : la Terre décrit la même trajectoire que précédemment le Soleil, dans le même sens et suivant la même loi.

Il y a pourtant une petite difficulté.

Quand la Terre est supposée fixe, la position du Soleil est définie par la *longitude géocentrique* Lg, comptée dans le sens direct à partir de la *demi-droite* qui coupe la sphère céleste au point γ.

Quand le Soleil est supposé fixe, la position de la Terre est définie par la *longitude héliocentrique* Lh, comptée dans le sens direct *à partir de la même demi-droite.*

Ces longitudes diffèrent de 180°. Aucune erreur n'est possible si le lecteur se met sur l'un ou l'autre astre et se tourne d'abord vers le même point de la sphère céleste (point γ).

Quand nous supposons la Terre fixe et le Soleil mobile, nous appelons *périgée* et *apogée* les points que précédemment nous appelions *périhélie* et *aphélie.*

109. **Observations méridiennes.**

1° — Pour fixer les idées, supposons matériellement construite une sphère céleste de grand rayon; marquons dessus un nombre suffisant d'étoiles dont les positions relatives nous sont données par des triangulations. D'autre part supposons possible de déterminer à tout instant sur quelle étoile se projette le centre du Soleil *vu du centre de la Terre*; joignons par un trait continu les étoiles ainsi occultées :

Nous trouvons que la trajectoire solaire est un plan (*écliptique*);

Ce plan est quasi invariable au cours des siècles.

Comme on voit, ce résultat est indépendant de tout système de coordonnées, de même que les observations qui le fournissent.

2° — Ce n'est pas ainsi qu'on opère; on utilise le cercle méridien et l'on prend comme plan de référence provisoire l'équateur.

En d'autres termes, on détermine de jour en jour l'ascension droite $\mathcal{R}$ et la déclinaison D du Soleil.

Les choses iraient toutes seules si l'équateur était un plan fixe par rapport aux étoiles : nous savons qu'il n'en est pas ainsi. Mais au cours d'une année, la variation est si petite que nous obtiendrons une excellente approximation en le considérant comme fixe. A la vérité, connaissant ses déplacements, nous pourrons par des formules très simples rapporter les observations à la position qu'occupe réellement l'équateur pour une date déterminée.

Dans ces conditions l'expérience montre que les ascensions droites $\mathcal{R}$ et les déclinaisons D sont liées par la formule (fig. 83) :

$$\operatorname{tg} D = k \sin \mathcal{R},$$

ou k est une constante. Nous la savons égale à $\operatorname{tg} \omega$.

Pour fixer les idées, voici les $\mathcal{R}$ et les D pour les 1er et les 15 de tous les mois de l'année 1915.

		AR	D			AR	D
Janvier	1. .	$18^h\,44^m$	$-23°\,5'$	Juillet	1.	$6^h\,37^m$	$+23°\,11'$
—	15. .	19 45	-21 16	—	15.	7 35	$+21$ 40
Février	1. .	20 56	-17 20	Août	1.	8 42	$+18$ 15
—	15. .	21 52	-12 57	—	15.	9 36	$+14$ 19
Mars	1. .	22 45	-7 53	Septembre	1.	10 38	$+8$ 36
—	15. .	23 37	-2 27	—	15.	11 29	$+3$ 21
Avril	1. .	0 39	$+4$ 14	Octobre	1.	12 26	-2 52
—	15. .	1 31	$+9$ 29	—	15.	13 18	-8 13
Mai	1. .	2 30	$+14$ 50	Novembre	1.	14 22	-14 11
—	15. .	3 25	$+18$ 41	—	15.	15 18	-18 17
Juin	1. .	4 33	$+21$ 57	Décembre	1.	16 26	-21 41
—	15. .	5 31	$+23$ 17	—	15.	17 27	-23 14

Voici jour par jour et pour le midi moyen, les coordonnées au voisinage des solstices et des équinoxes.

Équinoxe de printemps.

	AR	D
20 mars . . .	$23^h\,56^m$	$-0°\,29'$
21 — . . .	23 59	-0 5
22 — . . .	0 3	$+0$ 19
23 — . . .	0 7	$+0$ 42

Équinoxe d'automne.

	AR	D
22 septembre .	$11^h\,54^m$	$+0°\,39'$
23 — .	11 58	$+0$ 15
24 — .	12 1	-0 8
25 — .	12 5	-0 32

Pendant ces trois jours la déclinaison varie de 71′, soit de 24′ environ par jour. L'ascension droite varie $3^m\,36^s$ par jour.

Solstice d'été.

	AR	D
21 juin . . .	$5^h\,56^m$	$+23°\,27'$
22 — . . .	6 0	$+23$ 27
23 — . . .	6 4	$+24$ 27

Solstice d'hiver.

	AR	D
21 décembre.	$17^h\,54^m$	$-23°\,27'$
22 — .	17 58	-23 27
23 — .	18 3	-23 27

La déclinaison reste constante. En dix jours l'ascension droite varie de 42 minutes au voisinage du solstice d'été; elle varie de 44 minutes au voisinage du solstice d'hiver; soit par jour $4^m\,12^s$ dans le premier cas, $4^m\,24^s$ dans le second. L'inclinaison de l'écliptique sur l'équateur est :

$$\omega = 23°\,27'.$$

C'est le maximum de la déclinaison solaire.

110. Méthodes d'observation. Passage au méridien.

1° — Les mesures précises exigent une série de corrections.

Nous avons déjà étudié l'effet de la réfraction; nous reviendrons plus loin sur la parallaxe, changement de position apparente due à ce que l'observateur n'est pas au centre de la Terre (§ 233).

J'insiste seulement ici sur la correction que nécessite le diamètre apparent du Soleil.

Nous voulons déterminer la trajectoire du centre du Soleil; or non seulement le diamètre apparent solaire est considérable (32′ 2″), mais

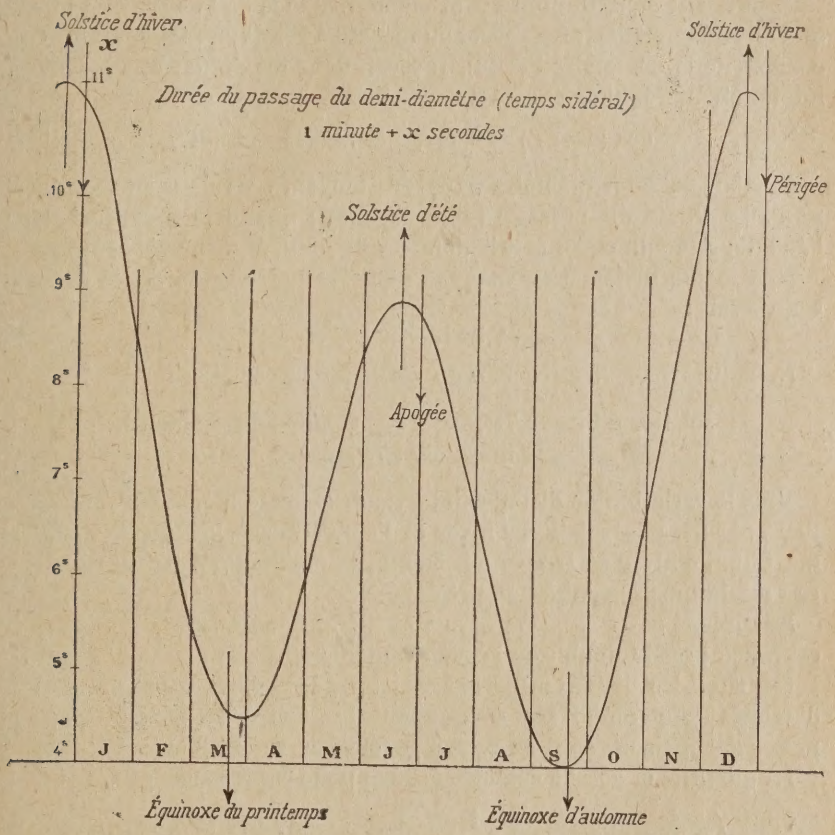


Fig. 97.

encore il est variable. D'où la nécessité de déterminer le passage des bords du disque sur les fils de la lunette et de prendre la moyenne.

On note donc l'heure de la tangence du bord oriental du Soleil avec un certain nombre de fils d'ascension droite, puis la tangence du bord occidental avec les mêmes fils. Il est à peine besoin de dire qu'une longue habitude est nécessaire pour obtenir des résultats concordants.

Pour la déclinaison, on se sert du micromètre dont on déplace le fil jusqu'à la tangence avec un bord, puis avec l'autre. Pour éviter des rotations trop grandes de la vis micrométrique, on utilise deux fils parallèles mus chacun par une vis micrométrique. On les fait affleurer simultanément aux bords du Soleil.

2° — Temps mis par le Soleil pour passer au méridien.

On trouve dans la *Connaissance des temps* une colonne des *Tables du Soleil* intitulée *Durée du passage du demi-diamètre* (*temps sidéral*).

La figure 97 représente les résultats; étudions-les.

Si le Soleil était toujours à la même distance de la Terre, le temps que mettrait son disque à passer au méridien serait en raison inverse du cosinus de la déclinaison (§ 46). Il serait donc maximum aux solstices, minimum aux équinoxes. On a :

$$\cos(23°\,27') = 0{,}917, \quad 1 : 0{,}917 = 1{,}091.$$

Prenons 32′ pour diamètre apparent moyen. La valeur en temps est $2^m\,8^s$. La durée du passage (temps sidéral) quand le Soleil est dans l'équateur (équinoxes), serait donc $1^m\,4^s$, *pour le demi-diamètre*.

A la même distance moyenne et pour les solstices, la durée du passage serait :

$$64^s \times 1{,}091 = 69^s{,}8.$$

Nous trouvons effectivement au voisinage des solstices

solstice d'hiver : $71^s{,}24'$ solstice d'été : $68^s{,}92$,
moyenne : $70^s{,}16$.

Mais la variation de distance intervient. Comme le périgée coïncide *à peu près* avec le solstice d'hiver et l'apogée avec le solstice d'été, le maximum d'hiver se trouve augmenté, le maximum d'été est diminué. Les minimums restent à peu près égaux.

Le rapport : $(71{,}24 - 68{,}92) : 70{,}16 = 0{,}03306$,
est à peu près le double de l'excentricité 0,01675.

En effet les distances périgées et apogées sont $a - c$ et $a + c$. Les diamètres apparents, par conséquent les temps de passage pour la même déclinaison, sont en raison inverse de ces distances.

La quantité ci-dessus calculée a donc pour expression (§ 83) :

$$\left(\frac{1}{a-c} - \frac{1}{a+c}\right) : \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a-c} + \frac{1}{a+c}\right) = \frac{2c}{a} = 2e.$$

Cette méthode de mesure de l'excentricité est peu précise : elle porte sur 23 dixièmes de seconde seulement et la précision du dixième de seconde est à peu près la limite atteinte. Que le lecteur n'oublie pas que je me sers de la *Connaissance des Temps* comme d'un recueil d'observations, tandis que la plupart des résultats sont calculés au mieux d'après l'ensemble des observations jusqu'à présent effectuées.

111. Détermination des équinoxes.

1° — La trajectoire solaire est quasi plane; il s'agit de fixer la position de son plan (*écliptique*) relativement au plan équatorial terrestre.

Nous connaissons l'inclinaison ω des deux plans.

Déterminons leur intersection (*ligne des équinoxes*).

La Terre entraînant avec elle son plan équatorial, la ligne des équinoxes se déplace dans le plan de l'écliptique qui par définition passe toujours par le centre de la Terre. Mais toutes ces droites parallèles coupent la sphère céleste aux deux mêmes points qu'il s'agit de déterminer.

En définitive il s'agit de trouver sur quelle étoile se projette le Soleil quand il passe dans l'équateur.

Cette opération ne présente aucune difficulté théorique. Comme nous

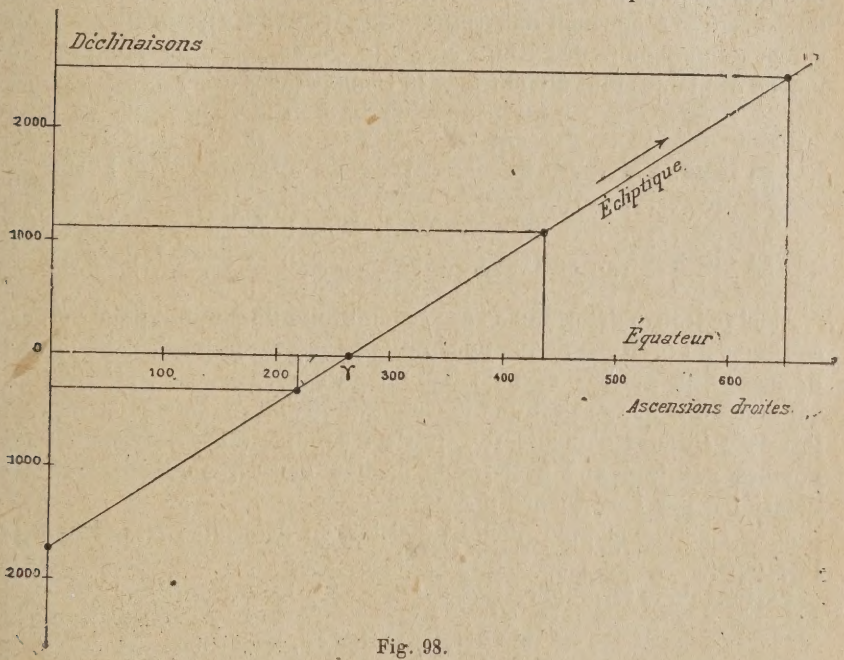


Fig. 98.

utilisons la lunette méridienne et que le Soleil n'est jamais exactement dans l'équateur lors de son passage au méridien du lieu d'observation, nous avons recours à une interpolation.

Réglons notre horloge sur le temps sidéral, en prenant comme origine des temps le passage au méridien d'une certaine étoile. Déterminons la déclinaison du Soleil deux jours de suite lors de ses passages au méridien. Choisissons ces jours de manière que les passages encadrent la traversée de l'équateur par le Soleil. Au voisinage de l'équinoxe du printemps, la déclinaison solaire est australe pour le premier passage, boréale pour le second. Dans l'intervalle des passages, l'ascension droite *rapportée à l'étoile de comparaison* varie d'une quantité voisine de $3^m 38^s$. Nous avons ce qu'il faut pour construire la courbe 98 quasi rectiligne. Nous déterminons ainsi l'ascension droite du point d'intersection γ par rapport à l'étoile de comparaison; ce qui revient à

déterminer l'ascension droite de cette étoile par rapport au point γ pris pour origine, et permet ensuite de calculer les ascensions droites de toutes les étoiles.

2° — Pour fixer les idées, prenons les nombres du § 109. Les ascensions droites solaires n'étant pour l'instant connues qu'à une constante près, remplaçons le tableau par le suivant : nous prenons, comme origine provisoire des ascensions droites, le cercle horaire sur lequel est le Soleil à son passage au méridien le 20 mars. A la vérité les passages du tableau se rapportent aux *temps moyens* (voir § 121) ; admettons qu'ils soient donnés pour des *temps sidéraux*. Je complète les nombres au moyen des tables plus étendues de la *Connaissance des Temps*.

	$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}$	D	D
20 mars.	0	0	$-0°\,28'\,32''$	$-1\,712''$
21 —	$3^m\,39^s$	219^s	$-0\ \ 4\ 49$	$-\ 289$
22 —	7 17	437	$+0\ 18\ 53$	$+1\,133$
23 —	11 55	655	$+0\ 42\ 34$	$+2\,554$

Ainsi se trouve déterminée l'ascension droite du point γ (point vernal, équinoxe du printemps) que nous prenons pour origine des ascensions droites. Mais comme rien ne fixe sa position dans le ciel, position variable du reste, en pratique nous continuons à prendre pour origine le cercle horaire d'une étoile, quitte à ajouter (ou à retrancher) un nombre constant aux ascensions droites observées; ce nombre est déterminé par l'expérience précédente.

3° — Cherchons avec quelle précision on détermine la position de l'équinoxe.

Partons de la formule :

$$\sin\mathcal{R} = \operatorname{tg} D \,.\, \operatorname{cotg}\omega,$$

$$\cos\mathcal{R} \,.\, d\mathcal{R} = -\operatorname{tg} D \frac{d\omega}{\sin^2\omega} + \operatorname{cotg}\omega \frac{dD}{\cos^2 D}.$$

On opère au voisinage de l'équinoxe, $\mathcal{R}$ est sensiblement nul.

La déclinaison D est très voisine de 0. L'erreur sur l'obliquité a une importance négligeable, puisqu'elle est multipliée par tg D.

Il reste pratiquement :

$$d\mathcal{R} = \operatorname{cotg}\omega \,.\, dD = 2{,}3 \,.\, dD, \qquad \text{pour } \omega = 23°\,27'$$

Pour que l'équinoxe soit bien déterminé, il faut que les déclinaisons soient mesurées avec un soin extrême, puisqu'en raison de la relativement faible obliquité de l'écliptique sur l'équateur, les erreurs de déclinaison se trouvent plus que doublées dans l'évaluation des ascensions droites.

4° — MÉTHODE DE FLAMSTED POUR DÉTERMINER LE COLURE DES SOLSTICES. On appelle *colure des solstices* (fig. 16) le grand cercle qui passe par

le pôle de l'équateur et par le pôle de l'écliptique. Le cercle horaire normal au colure des solstices est le *colure des équinoxes*; il passe par l'intersection de l'équateur et de l'écliptique (*ligne des équinoxes*). Déterminer l'un des colures revient donc à déterminer l'autre.

Mesurons les angles α_1 et α_2 que fait le cercle horaire H d'une étoile avec les cercles horaires H_1 et H_2 du Soleil *quand il reprend la même déclinaison* D, *avant et après son passage au solstice*.

Une figure montre immédiatement que l'angle α du plan H avec le colure des solstices est donné par la formule :

$$2\alpha = \alpha_2 - \alpha_1.$$

Cette méthode est identique à la méthode des hauteurs égales (§ 10).

112. Longitudes. Variation du diamètre apparent.

1° — Il est donc établi que le Soleil se meut dans un plan sinon absolument fixe, du moins dont les variations sont insignifiantes pour un temps comparable à la vie humaine (§ 118). Comme d'ailleurs l'équateur est quasi fixe, nous aurons comme bonne approximation, *très suffisante pour ce qui va suivre*, les formules :

$$\sin D = \sin\omega \,.\, \sin L, \qquad \operatorname{tg} \mathcal{R} = \cos\omega \,.\, \operatorname{tg} L;$$
$$\operatorname{tg} D = \operatorname{tg}\omega \,.\, \sin \mathcal{R}.$$

Par la détermination journalière des ascensions droites *ou* des déclinaisons, nous connaissons les longitudes. Pour repérer le temps des observations, utilisons une horloge réglée sur le temps sidéral; nous avons donc les longitudes en fonction du temps sidéral.

Nous prendrons comme origine des temps le passage au point γ.

2° — D'autre part nous pouvons déterminer le diamètre apparent du disque solaire, soit avec un héliomètre, soit directement avec les fils parallèles d'un double micromètre. Nous connaissons donc les distances r du Soleil à la Terre en valeurs relatives : *elles sont en raison inverse du diamètre apparent.*

Bref nous avons le moyen de déterminer complètement la trajectoire apparente solaire en coordonnées polaires, en prenant le temps sidéral comme variable auxiliaire :

$$L = f(t), \qquad r = \varphi(t); \qquad r = F(L).$$

Il est rationnel de régler notre horloge sur les étoiles; mais pour ce qui suit, peu importe l'unité de temps pourvu qu'elle soit bien déterminée. Le temps sidéral est commode, puisqu'en définitive les ascensions droites sont immédiatement déterminées avec ce temps.

3° — Diamètre apparent.

Nous avons trouvé pour la distance du Soleil à la Terre (en première approximation, § 88) :

$$r : a = 1 - e\cos\omega t.$$

Le diamètre apparent est en raison inverse de cette quantité; à la même approximation on a :

$$\delta = \delta_0(1 + e\cos\omega t).$$

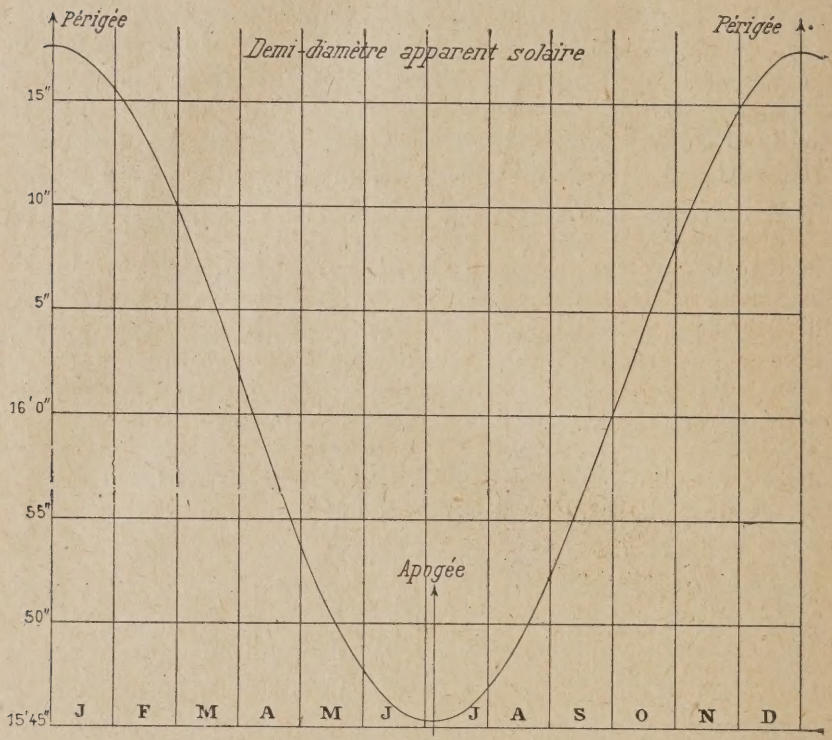


Fig. 99.

Effectivement la courbe représentative des variations ressemble fort à une sinusoïde (fig. 99).

On a pour demi-diamètres :

minimum : $\delta = \delta_0(1 - e) = 15'\,46'' = 945''$,
maximum : $\delta = \delta_0(1 + e) = 16'\,18'' = 978''$,
moyen : $\delta_0 = 16'\,1'' = 961''$.

Le rapport de la demi-différence à la valeur moyenne est $e = 0{,}01675$; c'est l'*excentricité* de l'orbite (§ 89).

Je laisse au lecteur à calculer le terme en $2\omega t$ qui entre dans la formule plus approchée.

Les tables donnent le demi-diamètre parce que les marins observent généralement la hauteur du bord inférieur. Pour avoir la position du centre, ils doivent ajouter le demi-diamètre.

113. Difficulté de la mesure du diamètre apparent.

Que le lecteur ne se laisse pas méduser par les nombres donnés par la *Connaissance des Temps*.

Le Bureau des Longitudes calcule *avec une extrême précision* les variations de quantités dont il admet *arbitrairement* la grandeur.

Le lecteur sera peut-être choqué qu'on lui donne, *au centième de seconde près*, une quantité que l'on ne connaît pas à une seconde près.

Depuis 1660 que les mesures se font avec précision, le diamètre apparent moyen solaire a oscillé entre $32'11'' = 1931''$, et $31'59'' = 1919''$. Devant de telles variations on se demande à quoi riment les centièmes de seconde de la *Connaissance des Temps*.

Il ne faut pas dire que les méthodes se sont perfectionnées, puisque le diamètre apparent moyen de la Lune a été trouvé par les mêmes astronomes constant à 1″ près (1868″). Il faut conclure qu'il y a dans la détermination de la grandeur apparente du Soleil des difficultés spéciales, à supposer que cette grandeur soit parfaitement définie.

On a fait là-dessus des expériences systématiques en modifiant le verre de couleur nécessaire à diminuer l'éclat du disque, l'ouverture des objectifs, le grossissement...; les divergences constatées entre les divers observateurs comme entre les résultats d'un même observateur ne semblent pas venir de là. On incrimine aujourd'hui l'*équation personnelle*, c'est-à-dire la manière dont chaque observateur place le fil de réticule par rapport au bord solaire.

Mais la question s'est posée de savoir si le disque solaire était circulaire et si ses dimensions étaient invariables. Je n'insiste pas sur les résultats assez contradictoires; j'ai voulu seulement mettre en garde le lecteur contre l'idée qu'une quantité est bien déterminée et connue au centième de seconde près, parce qu'il la trouve à cette approximation dans la *Connaissance des Temps*.

Ainsi, bien qu'en théorie la seule comparaison des valeurs du diamètre apparent solaire eût pu fournir la loi de variation de la distance de la Terre au Soleil et abréger la découverte de la forme exacte des orbites, en fait cette loi fut établie par Képler sans l'utilisation du diamètre apparent. Il en connaissait du reste fort inexactement la valeur : le micromètre n'était pas inventé.

114. Lois de Képler.

Le résultat des observations est résumé dans les deux premières lois de Képler; notre langage se rapporte aux mouvements apparents.

Le Soleil décrit une ellipse dont la Terre occupe un des foyers.

L'aire balayée par le rayon vecteur joignant le centre de la Terre au centre du Soleil est proportionnelle au temps.

Voici l'énoncé analytique de la seconde proposition (*loi des aires*). Soit Λ la variation de longitude solaire pendant un intervalle de temps τ toujours le même et pas trop long, de l'ordre du jour sidéral, par

exemple. Soit r la distance moyenne de la Terre au Soleil pendant l'intervalle τ; soit δ le diamètre apparent du disque solaire correspondant. Les quantités :

$$\Delta r^2 \quad \text{ou} \quad \Delta : \delta^2,$$

sont les mêmes en quelque endroit de la trajectoire qu'on les mesure.

115. Temps de passage du disque solaire sur les fils d'une lunette.

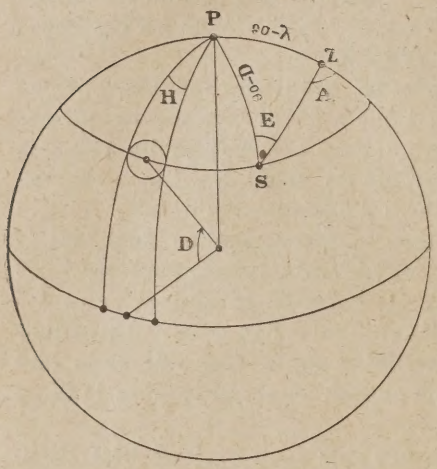


Fig. 100.

Au lieu de mesurer le diamètre apparent à l'héliomètre ou au micromètre, on peut déterminer le temps que le Soleil met à passer sur un fil réticulaire.

1° — TEMPS QUE LE SOLEIL MET A TRAVERSER LE MÉRIDIEN.

Soit Δ le diamètre du Soleil; on a :

$$\delta = \Delta : r.$$

L'angle H des cercles horaires qui tangentent le Soleil, est (fig. 100) :

$$H = \delta : \cos D;$$

D est la déclinaison.

Soit φ la vitesse angulaire de la Terre dans son mouvement diurne.

Le temps t que le Soleil met à traverser le méridien, est défini par l'équation :

$$t\varphi = H, \qquad t = \frac{\delta}{\varphi \cos D} = \frac{\Delta}{\varphi} \frac{1}{r \cos D}.$$

Pour trouver φ, remarquons que la Terre tourne de 360° ou de 1.296.000 secondes, en un jour sidéral, c'est-à-dire en 86 164 secondes de *temps moyen* (§ 2).

Elle parcourt donc 15″,04 par seconde de temps moyen. On a :

$$t = \frac{\delta}{15{,}04} \frac{1}{\cos D}.$$

A la distance moyenne, le diamètre apparent solaire est 32′2″, soit 1922″. Pour une déclinaison nulle, le temps serait 127,8 secondes de temps moyen.

En tenant compte de la déclinaison et de la distance, voici les temps de passage pour les premiers et les 15 des divers mois.

1er janvier . .	142s,1	1er mai . . .	131s,9	1er septembre.	128s,8
15 — . .	140 ,2	15 — . . .	134 ,2	15 — .	128 ,0
1er février . .	136 ,6	1er juin . . .	136 ,6	1er octobre. .	128 ,5
15 — . .	133 ,5	15 — . . .	137 ,7	15 — . .	130 ,2
1er mars . . .	130 ,9	1er juillet . .	137 ,5	1er novembre.	133 ,6
15 — . . .	129 ,3	15 — . .	136 ,0	15 — .	136 ,9
1er avril . . .	128 ,9	1er août . . .	133 ,3	1er décembre.	140 ,3
15 — . . .	129 ,8	15 — . . .	130 ,9	15 — .	142 ,2

Ainsi le maximum est de 142,2 secondes et le minimum de 128,9.

La différence est de 13s,3.

La déclinaison étant bien connue, la détermination de ces temps donne les distances solaires en valeur relative.

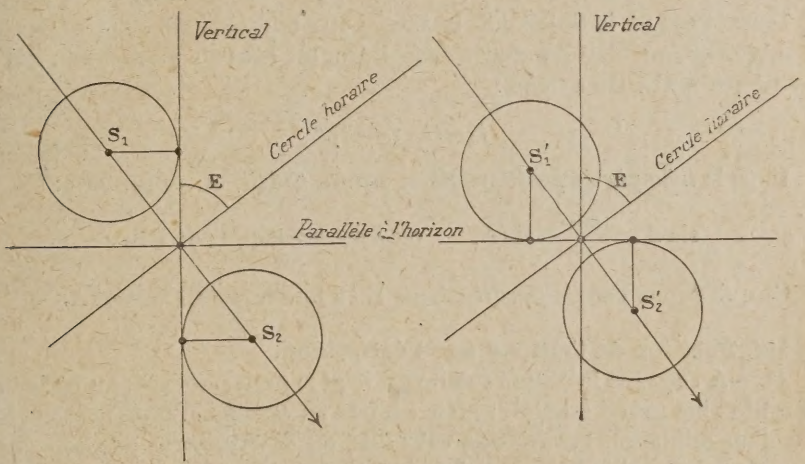


Fig. 101.

2° — Soit a le demi-grand axe de l'orbite; soit $2c$ la distance des foyers. L'excentricité est définie par l'équation :

$$e = c : a = 0{,}01675.$$

Le rapport de la plus grande à la plus petite distance est :

$$\frac{a+c}{a-c} = \frac{1+e}{1-e} = 1 + 2e = 0{,}0335.$$

Or la plus petite et la plus grande distance ont lieu vers le 1er janvier et vers le 1er juillet, c'est-à-dire au voisinage des solstices; la déclinaison varie peu et a la même valeur dans les deux cas.

Le rapport des temps de passage doit donc être à peu près comme le rapport inverse des distances. Effectivement on a :

$$1\,421 : 1\,375 = 1{,}0335.$$

Que le lecteur fasse bien attention qu'une des méthodes de détermination de e repose précisément sur la mesure des temps de passage.

3° — TEMPS QUE LE SOLEIL MET A TRAVERSER UN VERTICAL QUELCONQUE OU UN PLAN PARALLÈLE A L'HORIZON.

Ces temps se déduisent immédiatement du temps t_m précédemment calculé que le Soleil met à traverser un cercle horaire (le méridien en particulier).

Soit E l'angle que fait le vertical avec le cercle horaire au point où le Soleil coupe le vertical ou le plan parallèle à l'horizon (fig. 101).

Dans le cas où le Soleil doit traverser le vertical, le chemin S_1S_2 que doit parcourir son centre, est égal au quotient du diamètre pas cos E. On a donc :

$$t_v = t_m : \cos E.$$

Dans le cas où le Soleil doit traverser un plan parallèle à l'horizon, le chemin S_1S_2 que doit parcourir son centre, est égal au quotient du diamètre par sin E. On a donc :

$$t_h = t_m : \sin E.$$

Dans le *triangle de position*, *pôle*, *zénith*, *Soleil*, on a (fig. 100) :

$$\sin E = \frac{\cos \lambda}{\cos D} \sin A, \qquad \text{où } \lambda \text{ est la latitude de lieu.}$$

Ce qui donne l'*angle parallactique* E en fonction de l'azimut A.

116. Position de l'ellipse sur l'écliptique.

1° — A l'apogée le disque solaire est le plus petit possible ; au périgée il est le plus grand possible ; mais comme au voisinage d'un maximum ou d'un minimum la variation est nulle, on détermine la position des apsides en cherchant pour quelles longitudes encadrant les apsides, le diamètre apparent a les mêmes valeurs ; on prend la bissectrice des directions ainsi déterminées.

La méthode ne vaut pas grand'chose.

La mesure des diamètres apparents au périgée δ et à l'apogée δ' fournissent l'excentricité ; il est même suffisant d'observer au voisinage des apsides.

On a : $$\frac{\delta}{\delta'} = \frac{a+c}{a-c} = \frac{1+e}{1-e}, \qquad e = \frac{\delta - \delta'}{\delta + \delta'}.$$

Pour juger de la valeur de cette méthode, on saura que le diamètre apparent moyen du Soleil est de 32′4″, soit 1924″.

Admettons 0,0168 pour valeur de e, on a :

$$\delta - \delta' = 3848 \times 0{,}0168 = 65''.$$

2° — La loi des aires fournit une méthode corrélative de la précédente, basée sur la détermination des vitesses angulaires en longitude :

à l'apogée la vitesse $dL : dt$ est minima, elle est maxima au périgée. Ici encore on cherchera, non pas la longitude pour laquelle la vitesse est maxima ou minima, mais les longitudes pour lesquelles elle reprend la même valeur : la bissectrice des directions ainsi déterminées est la ligne des apsides.

On trouve que le Soleil passe à l'apogée vers le 1er juillet, un peu

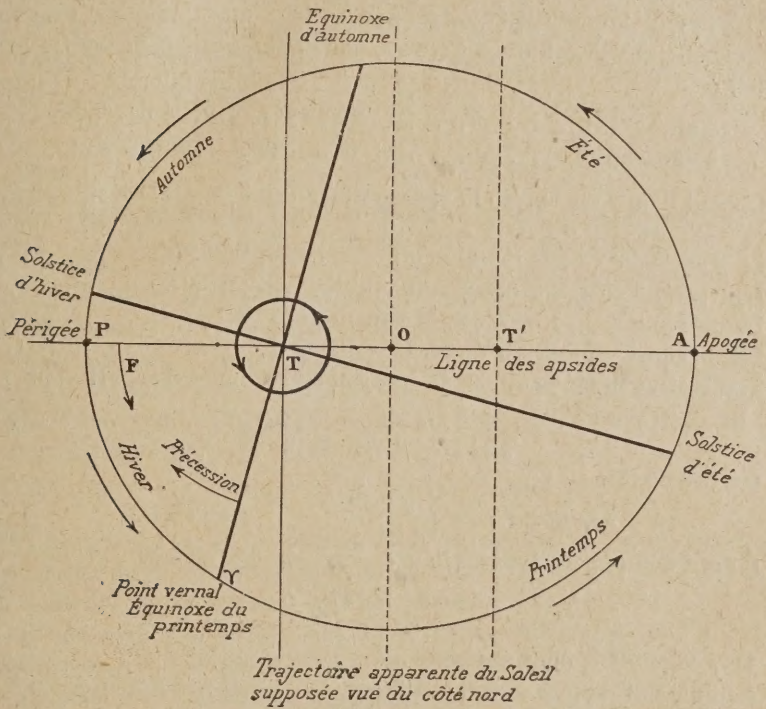


Fig. 102.

après le solstice d'été, au périgée vers le 1er janvier, un peu après le solstice d'hiver; la longitude du périgée est actuellement de 281°16′.

Soit v et v' les vitesses maxima et minima.

La loi des aires fournit la relation :

$$\frac{v}{\delta^2} = \frac{v'}{\delta'^2}, \qquad \text{d'où :} \qquad e = \frac{\sqrt{v} - \sqrt{v'}}{\sqrt{v} + \sqrt{v'}}.$$

Les observations sont assez précises depuis assez longtemps pour déceler une rotation de la ligne des apsides de 12″ par an dans le sens direct (sens de la flèche F). La ligne des équinoxes tournant moyennement en sens inverse de 50″ par an (*précession des équinoxes*), la ligne des apsides s'en rapproche annuellement de 62″ environ, un peu plus d'une minute.

Ptolémée indique pour longitude de l'apogée 65° 30′ par rapport à l'équinoxe de son temps; elle est aujourd'hui 101° 16′ par rapport à notre équinoxe. La ligne des apsides a donc tourné de 36° environ par rapport à l'équinoxe mobile. En réalité elle n'a tourné que du cinquième de cette quantité par rapport à un équinoxe fixe (par rapport à une étoile fixe qui aurait été justement sur l'équinoxe de Ptolémée).

3° — Méthode de La Caille.

Appliquons la méthode dont au § 91 nous avons expliqué le principe.

La Caille observant au Cap trouve pour la longitude géocentrique du Soleil :

30 juin 1751	$0^h\ 2^m\ 55^s$	98° 9′ 2″
30 décembre	0 3 0	278 30 5 .

On sait d'autre part que la vitesse diurne apogée est : $57'\ 12'' = 3\,432''$.

— — périgée est : $61'\ 12 = 3\,672$.

La *demi-année anomalistique* est $182^j\ 15^h\ 6^m\ 57^s$.

L'intervalle entre les observations est $183^j\ 0^m\ 5^s$.

La différence $T - T : 2$ est $8^h\ 53^m\ 8^s$.

On a : $\alpha - \beta = 21'\ 3'' = 1263''$. (1)

Transformons en fractions de jours et en secondes d'arc. Il vient :

$$\frac{\alpha}{3\,432} - \frac{\beta}{3\,672} = 0{,}3702. \qquad (2)$$

On tire de là :

$$\alpha = 1425'' = 23'\ 45'', \qquad \beta = 2'\ 42''.$$

Ce qui donne pour longitude géocentrique de l'apogée :

$$98°\ 32'\ 47''.$$

117. Formules élémentaires.

Comme je l'explique dans la Préface, s'il est très difficile de calculer les phénomènes avec toute la précision que comportent les instruments modernes, il est très facile d'en acquérir une vue d'ensemble. Les formules de première approximation fournissent déjà des résultats excellents, plus que suffisants pour nous qui ne jouons pas les Le Verrier.

Voici quelques résultats numériques qui le prouvent.

1° — Reprenons la formule de première approximation établie au § 88.

Pour éviter le double emploi du symbole ω, écrivons-la sous la forme :

$$\theta = nt + 2e \sin nt, \qquad \frac{d\theta}{dt} = n + 2ne \cos nt. \qquad (1)$$

Prenons le jour (de temps moyen) pour unité de temps : nous verrons que l'année tropique (§ 123) contient 365,2422 jours.

La constante n est donc définie par la condition :

$$365{,}2422 \times n = 1\,296\,000 \text{ secondes},$$

(à 50″ près, valeur de la précession). D'où $n = 3\,548{,}3$ secondes : c'est la variation de la longitude moyenne pendant un jour de temps moyen.

Admettons 0,01675 pour l'excentricité e.

Le coefficient du terme périodique dans la seconde formule (1) est :

$$0{,}0335 \times 3\,548{,}3 = 119 \text{ secondes.}$$

Autrement dit, les variations journalières de la longitude au périgée ($t = 0$) et à l'apogée ($nt = \pi$), diffèrent de $2 \times 119 = 238$ secondes.

Dans la *Connaissance des Temps* nous trouvons les longitudes suivantes à midi (temps moyen) :

1er janvier 1915	280° 0′ 1″	Différence 61′ 8″ = 3 668″.
2 — —	281 1 9	
1er juillet 1915.	98° 32′ 57″	Différence 57′ 11″ = 3 431″.
2 — —	99 30 8	

La moyenne est 3 549″; la différence est 237″; ce qui est conforme avec les formules (1) qui sont donc très approchées.

Le 1er janvier est voisin du périgée, le 1er juillet voisin de l'apogée.

2° — Au voisinage des équinoxes le second terme de la seconde formule (1) s'annule : la vitesse $d\theta : dt$ est donc voisine de 3 548″ environ. La variation d'ascension droite est donc :

$$3\,548'' \times \cos 23° 27' = 3\,253''.$$

Or entre les midis moyens le 20 et 21 mars 1915 l'ascension droite varie de 3 minutes 38 secondes, soit 218 secondes de temps, soit 3 270″ d'angle. Notre calcul ne devait pas donner un résultat plus rigoureux, parce que la ligne des équinoxes n'est pas à 90° exactement de la ligne des apsides; il s'en faut de 10°.

La variation diurne de déclinaison au voisinage des équinoxes est voisine de :

$$3\,548'' \times \sin 23° 27' = 1\,419''.$$

Effectivement les tables donnent 1 422″, un peu moins de 24′.

118. Variation de l'écliptique.

1° — Les observations montrent que l'obliquité de l'équateur sur l'écliptique diminue avec une vitesse à peu près constante de 48″ par siècle. En fait il s'agit d'une variation périodique dont la période est énorme. Je rapporte plus haut une observation de Pythéas de laquelle résulte que depuis 2 150 ans, l'obliquité a diminué d'une vingtaine de minutes (§ 99).

Cassini II nous apprend qu'en 66 ans, les déterminations de la hauteur méridienne du Soleil au solstice d'été indiquent une diminution de 30″ pour l'obliquité de l'écliptique. En 1740, Cassini donne l'angle 23° 28′ 20″.

Eratosthène qui vivait 230 ans avant J.-C., avait trouvé que la diffé-

rence entre les hauteurs du Soleil pour les deux solstices était de 11 parties dans un cercle divisé en 83; d'où l'on conclut un angle de 47° 42′ 40″, et une obliquité de 23° 51′ 20″.

On possède de nombreuses déterminations au cours des siècles. Elles montrent une variation toujours dans le même sens et qu'aux erreurs d'expérience près, on peut admettre régulière.

2° — Reste à savoir lequel des deux plans se déplace, de l'écliptique ou de l'équateur. Il résulte des calculs dont je vais parler que le pôle de l'écliptique n'est pas fixe.

Reprenons les formules fondamentales qui relient les coordonnées équatoriales et écliptiques :

$$\begin{aligned} \sin D &= \sin l . \cos\omega + \cos l . \sin\omega . \sin L, \\ \cos D . \sin \text{Æ} &= -\sin l . \sin\omega + \cos l . \cos\omega . \sin L, \\ \cos D . \cos \text{Æ} &= \cos l . \cos L. \end{aligned} \qquad (1)$$

Supposons invariable le plan de l'écliptique : la latitude l serait donc constante au cours des temps. Négligeons la nutation qui est périodique à courte période; ne conservons que la précession : il en résulte une augmentation séculaire de la longitude. Si l'obliquité ω change *parce que l'équateur s'incline sur l'écliptique fixe,* les formules précédentes permettent de calculer l'ascension droite Æ et la déclinaison D des étoiles, il y a 20 siècles par exemple, en fonction des valeurs actuelles Æ_0 et D_0 des coordonnées, connaissant la latitude actuelle ainsi que la variation d'inclinaison et la variation de longitude.

Or les observations de Ptolémée fournissent pour certaines étoiles la déclinaison et l'ascension droite il y a 20 siècles; *la comparaison des valeurs calculées avec les nombres de Ptolémée interdit d'admettre la fixité de l'écliptique.*

Admettons au contraire que l'écliptique s'incline vers l'équateur en tournant autour de la ligne des équinoxes comme charnière. Connaissant la variation de l'obliquité, c'est-à-dire la rotation de l'écliptique, nous pouvons calculer la variation de la latitude. Les formules (1) sont encore applicables, à la condition de ne plus considérer la latitude comme constante : nous en déduirons pour l'époque de Ptolémée ou d'Hipparque des ascensions droites et des déclinaisons autres que les premières calculées dans l'hypothèse de la fixité de l'écliptique. Les secondes s'accordent beaucoup mieux avec les observations anciennes.

3° — Je raisonne sur les déclinaisons et les ascensions droites parce que ce sont les résultats les plus précis des observations. Si l'on pouvait commodément voir en même temps le Soleil et les étoiles, le déplacement de l'écliptique se prouverait à l'œil nu en déterminant, au voisinage des solstices, les variations de la distance des étoiles au Soleil normalement à l'écliptique, c'est-à-dire les variations des latitudes; ce qui serait facile en prenant des étoiles assez proches. Il faut observer près des solstices, parce que, l'écliptique tournant sensiblement autour

de la ligne des équinoxes comme charnière, ce sont les étoiles voisines de la position du Soleil lors des solstices, dont les latitudes varient le plus au cours des siècles. Elles ont varié d'un tiers de degré depuis Hipparque. Autrement dit, une étoile voisine du solstice d'été sur laquelle le centre du Soleil passait au temps d'Hipparque, se trouve maintenant à quelques secondes au-dessus du bord supérieur du disque solaire, lorsque les longitudes de l'étoile et du Soleil sont égales.

Pour fixer les idées sur les ordres de grandeurs, le lecteur se rappellera que le diamètre apparent du Soleil est de 32′; par conséquent une variation de 20′ est une quantité relativement énorme.

Tycho Brahé qui passa sa vie à observer les étoiles, compara ses propres observations à celles de Ptolémée. Il trouva que les étoiles voisines des solstices avaient changé de latitude. Les étoiles voisines du solstice d'été dont les latitudes étaient méridionales, avaient des latitudes plus petites au temps de Tycho qu'au temps de Ptolémée; toutes celles qui se trouvaient au-dessus de l'écliptique, avaient au temps de Tycho des latitudes plus grandes qu'au temps de Ptolémée.

Il faut que le lecteur ne se laisse pas accabler par les variations de l'équateur et de l'écliptique qu'à d'autres instants nous prenons comme plans de repère fixes. Nous possédons dans les étoiles des repères d'une fixité quasi absolue, en mettant à part celles peu nombreuses qui ont des mouvements propres; encore sont-ils très petits. Il faut toujours que le lecteur imagine les positions instantanées de l'équateur et de l'écliptique tracées sur la voûte céleste : toutes nos mesures ont ce tracé pour but. En définitive nous déterminons le chemin que parcourt le pôle sur la sphère céleste, le chemin que le Soleil (vu du centre de la Terre) décrit parmi les étoiles : nous ne déterminons que cela. Ce n'est pas sensationnel, je l'accorde; mais au moins ce n'est pas difficile à comprendre! Par commodité nous prenons pour plan de référence provisoire l'équateur. Comme il varie relativement vite (ce qui ne veut pas dire beaucoup), nous avons intérêt à calculer les longitudes et latitudes célestes qui sont moins variables, c'est-à-dire à prendre l'écliptique pour meilleur plan de référence.

Mais ce ne sont là que des procédés pour rapporter les positions aux étoiles.

119. Cause du déplacement de l'écliptique.

1° — Nous montrerons plus loin que toutes les fois que deux planètes tournent autour du même centre, dans le même sens mais dans des plans différents, chacune de ces planètes fait rétrograder le nœud de l'autre sur sa propre orbite; l'inclinaison ne change pas.

La figure 103 représente *schématiquement* l'écliptique, l'équateur et l'orbite de Vénus dont l'action est prépondérante.

L'angle $\overline{\gamma A} = \Omega$ (longitude du nœud ascendant de Vénus) vaut 76° environ.

L'inclinaison i est de 3° 24′; nous savons que ω vaut 23° 27′.

De la proposition ci-dessus énoncée résulte que, *l'angle i restant invariable*, l'écliptique rétrograde sur l'orbite de Vénus.

J'ai figuré en $\gamma' A'$ la position qu'elle tend à occuper.

Montrons que de ce déplacement résulte une diminution de ω, *dans les positions relatives actuelles des orbites.*

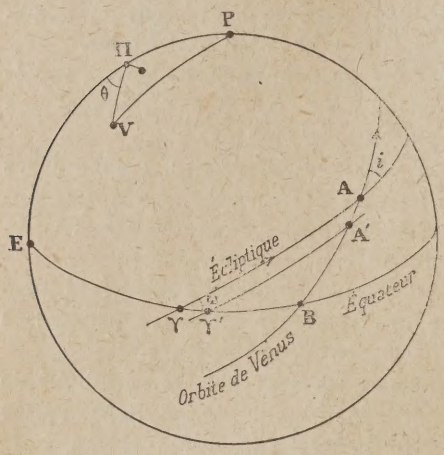


Fig. 103.

En P, Π, V, sont représentés les pôles de l'équateur, de l'écliptique et du plan orbital de Vénus.

L'angle EΠV est précisément égal à θ; il vaut 76°; $\overline{\Pi V}$ mesure l'inclinaison i; $\overline{\Pi P}$ mesure ω.

Puisque i reste invariable, l'effet instantané de la rétrogradation du nœud de l'orbite terrestre sur l'orbite de Vénus consiste à déplacer Π par rapport à V dans le sens rétrograde, sur un petit cercle de rayon i et de centre V. L'angle θ valant près d'un droit, le déplacement de Π le rapproche de P : d'où une diminution de l'obliquité de l'écliptique sur l'équateur. Le lecteur remarquera que la diminution tient à la disposition actuelle des trois points VΠP; elle pourrait être une augmentation pour une autre disposition.

2° — Fixons les ordres de grandeur.

Dans le triangle PΠV, nous pouvons considérer comme invariables les arcs i et Ω. Nous avons les relations :

$$\frac{\sin P}{\sin i} = \frac{\sin \Pi}{\sin \Omega} = \frac{\sin V}{\sin \omega}.$$

$$\cos \omega = \cos i . \cos \Omega + \sin i . \sin \Omega . \cos V.$$

Par différentiation on trouve :

$$\sin \omega . d\omega = \sin i . \sin \Omega . \sin V . dV,$$

$$d\omega = \sin i . \sin \Pi . dV = 0{,}057 . dV.$$

Admettons pour dV une valeur annuelle de 10″; nous avons pour la variation de l'obliquité 0″,58 par an, soit 58″ par siècle.

L'angle P varie aussi; ω et Ω diffèrent peu; on a sensiblement :

$$P = \frac{\sin i}{\sin \Omega} \sin V, \qquad dP = \frac{\sin i}{\sin \Omega} \cos V . dV.$$

En admettant pour valeur annuelle $dV = 10''$, on trouve $dP = 0'',35$.

3° — Deux remarques sont nécessaires.

D'abord le phénomène que nous étudions, pour séculaire qu'il paraisse, est un phénomène périodique. En définitive deux planètes ont seules une action sensible sur le déplacement des pôles terrestres, Vénus en raison de sa proximité, Jupiter en raison de sa masse; l'action de la première est sensiblement double de l'action de la seconde. Or les inclinaisons des orbites de Vénus et de Jupiter sur l'écliptique sont 3° 24′ et 1° 19′. Puisqu'en définitive le phénomène consiste en une rotation

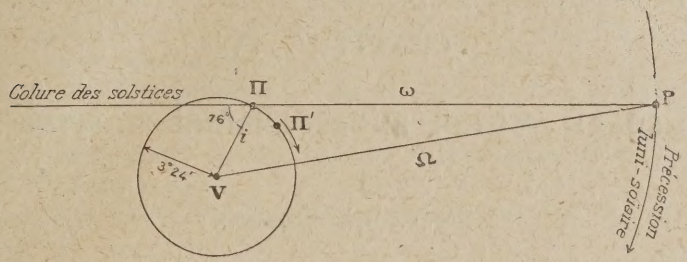


Fig. 104.

des pôles des orbites les uns autour des autres, le phénomène est périodique et essentiellement limité.

On démontre qu'en définitive le pôle de l'écliptique décrit un petit cercle de 1° 18′ de rayon autour d'un point fixe de la sphère céleste. Ce sont-là des variations très petites que je dois signaler, mais que sans inconvénient le lecteur peut considérer comme nulles s'il le désire.

Seconde remarque importante : le déplacement de l'écliptique change la position de son intersection avec l'équateur (ligne des équinoxes). Dans la disposition actuelle des orbites, l'action de Vénus produit un déplacement *direct*. Bien que la cause de la *précession lunisolaire* soit toute différente de celle qui agit sur les nœuds (*précession planétaire*), il est clair qu'en pratique les deux précessions s'ajoutent algébriquement : elles donnent ce qu'on appelle la *précession totale*. La précession planétaire est mesurée par la variation de l'angle P, variation évaluée ci-dessus. Le point Π venant en Π′, le colure des solstices tourne dans le sens *direct* de l'angle dP; d'où une petite diminution de la précession *lunisolaire*.

CHAPITRE IV

SOLEIL MOYEN EN ASCENSIONS DROITES

Jours et Années.

120. **Quantités moyennes en Astronomie. Inégalités, équations.** *1°* — Généralement en Astronomie les quantités se présentent sous la forme :

$$J = J_m + A \sin(2\pi at + \alpha) + B \sin(2\pi bt + \beta) + \ldots\ldots$$

J_m est la *moyenne* de la quantité J ; c'est la quantité J dépouillée de ses *inégalités*. Les différents termes de la série au moyen desquels on exprime les inégalités, sont les *équations*.

Moyenne, *inégalités*, *équations* sonneront continuellement aux oreilles du lecteur.

Pour la facilité du calcul les astronomes supposent d'abord que les mouvements sont uniformes; ils corrigent ensuite cette supposition en ajoutant des termes correctifs *périodiques*; on en met autant qu'il faut, par exemple, plus d'un millier pour représenter en fonction du temps les mouvements de la Lune en longitude et latitude.

Il peut arriver qu'outre les termes périodiques, l'expression de la quantité J contienne un polynôme en t. On dit que les *inégalités sont séculaires*. On peut toujours considérer un tel polynôme comme le développement en série d'un terme périodique dont la période serait énorme. C'est ce qui arrive pour la précession des équinoxes; nous la représentons par une fonction linéaire ou quadratique du temps, pour ne pas avoir à introduire un terme périodique dont la période serait 26 000 ans.

2° — La détermination de la valeur moyenne est toujours tentée avant de connaître les inégalités. Il suffit de prendre la moyenne arithmétique de la quantité J dans un intervalle de la variable (généralement le temps) grand par rapport à la période du terme qui a la plus grande période.

En effet la moyenne :

$$\frac{A}{t}\int_0^t \sin(2\pi at+\alpha)\,dt,$$

tend vers 0 quand t croît, quelque soit t. Si la moyenne est prise par rapport à un temps qui comprenne *même inexactement* (c'est le cas général) un grand nombre de périodes, l'erreur qui subsiste devient faible. Ce sont là des notions que le lecteur n'oubliera pas, s'il ne veut pas buter à chaque instant contre d'apparentes pétitions de principes, la détermination de la quantité moyenne étant le point de départ *obligé* des calculs astronomiques.

Il résulte de ce qui précède que la moyenne ne peut éliminer les *inégalités séculaires* dont il faut tenir compte après coup : en raison de leur définition même, il est évidemment impossible de satisfaire au principe ci-dessus posé.

Appliquons ce qui précède à la détermination du *jour moyen.*

121. Jour moyen. Unité C. G. S. de temps.

1. — L'observation montre que le jour *solaire vrai* (intervalle qui sépare deux passages consécutifs du centre du Soleil au méridien) est variable. Pour fixer tout de suite les idées, le jour le plus long (23 décembre) a 30 secondes au-dessus de la moyenne; le jour le plus court (16 septembre) a 21 secondes au-dessous.

Il y a donc des inégalités. Nous verrons plus loin qu'avec une déjà bonne approximation, on peut représenter le jour *vrai* par la formule :

$$J = J_m + a\sin(\omega t-\alpha)+b\sin(2\omega t-\beta).$$

Quoi qu'il en soit, cherchons à déterminer la valeur moyenne J_m.

Réglons une horloge sur le temps sidéral. *Déterminons la durée (en temps sidéral) d'un très grand nombre de jours solaires vrais consécutifs.* Poursuivons, par exemple, notre étude pendant 20 ans, soit approximativement pendant 7 305 jours.

Parmi ces jours J, les uns seront plus grands, les autres plus petits que leur moyenne J_m, et cela d'une manière inconnue. Nous appelons cette moyenne *jour solaire moyen.* Elle est évaluée en jours sidéraux ; inversement le jour sidéral se trouvera évalué en jour moyen.

Voici le résultat de l'expérience.

Si le jour solaire moyen est représenté par le nombre 86 400, le jour sidéral est représenté par le nombre 86 164,091.

Autrement dit le jour solaire moyen étant divisé en 86 400 secondes de temps moyen, le jour sidéral est plus court de :

$$3^m\,55^s,909 = 235,909 \text{ secondes de temps moyen.}$$

Rien n'est plus simple à comprendre, comme on le voit.

Dès que les astronomes eurent des horloges précises, ils déterminèrent ce nombre 236 qui est d'une importance pratique fondamentale.

2° — Unité légale de temps.

La seconde de temps moyen est l'unité légale C. G. S. de temps.

Comme rien dans le Ciel ne donne la durée du jour moyen, à l'exception bien entendu du procédé d'obtention qui résulte de la définition même, on règle les horloges sur le temps sidéral, de manière que dans un jour sidéral, elles battent 86 164,1 fois : *elles sont alors réglées sur le temps moyen.* Si elles battent un nombre différent de fois, une règle de trois donne immédiatement la valeur de la demi-oscillation du pendule (battement) en fonction de la seconde de temps moyen.

Au reste les expériences *en physique* à la précision du dix-millième étant l'exception, le dixième de seconde qui termine le nombre 86 164 est de pure forme *pour les physiciens.*

3° — Précision de la détermination.

Je suppose que les observations durent 20 ans. Cherchons si, par rapport à la quantité mesurée, ce laps est grand ou petit.

D'après le § 120, cela dépend évidemment des causes qui modifient la grandeur du jour vrai; autrement dit, cela dépend des périodes des *inégalités* de l'expression :

$$J = J_m + A \sin(2\pi at + \alpha) + B \sin(2\pi bt + \beta) + \ldots,$$

et de la valeur de ces inégalités.

Supposons qu'il s'agisse de déterminer la valeur moyenne de l'année tropique. Nous verrons plus loin qu'une de ses inégalités a 18 ans pour période : il est clair que 20 ans est un laps trop court pour déterminer la valeur moyenne de cette quantité, à moins de savoir calculer l'inégalité.

Imaginons au contraire que dans la durée du jour vrai n'interviennent que des inégalités de période annuelle ou semestrielle ; il est alors facile de voir qu'en faisant porter le calcul sur un nombre à peu près exact d'années, nous arrivons en 20 ans à une bonne approximation.

Commençons par exemple aux équinoxes : nous verrons que les jours sont alors plus courts que leur moyenne d'environ 20 secondes. Si aux 7 300 jours qu'a duré l'expérience, nous ajoutons 10 jours, *qui par hypothèse sont trop courts*, nous diminuons la moyenne de moins de 200 : 7300 secondes, soit de moins d'un trente-septième de seconde.

Conséquemment à l'approximation du dixième de seconde, la période de 20 ans est déjà longue.

Naturellement il est préférable de commencer l'expérience et de la terminer, *après un nombre entier d'années*, au voisinage d'un jour dont la longueur est voisine de la moyenne : toute mesure *précise* de la période (année) devient inutile.

Il n'y a dans tout cela aucun cercle vicieux, par ce qu'évidemment la

mesure de la moyenne est ordinairement précédée, au moins pendant quelques années, par la comparaison des jours vrais successifs avec le jour sidéral. Autrement dit, la mesure *précise* de la quantité moyenne, tout en ne dépendant pas *théoriquement* de la mesure des inégalités, est *ordinairement* précédée par la détermination *au moins grossière* de ces inégalités.

4° — Mauvaises définitions du jour moyen.

J'insiste sur ces notions pour éviter au lecteur les obscurités qu'un enseignement déplorable peut jeter dans son esprit.

On n'insiste généralement pas sur ces vérités incontestables que *le jour moyen est un jour de compte*, que le seul étalon de durée à notre disposition est le jour sidéral. Dans la définition du jour moyen, on introduit des *horloges parfaitement réglées*, sans avoir l'air de se douter que la seule horloge en laquelle nous puissons avoir confiance, est la Terre dans son mouvement de rotation; on a l'air de croire que nous pouvons régler nos horloges avec une approximation indéfinie.

On introduit l'année dans la définition du jour moyen où elle n'a rien à voir en théorie. Assurément la détermination de l'année tropique résulte de celle du jour moyen; mais on peut, par conséquent on doit se passer de l'année tropique pour définir le jour moyen. De ce que, pour aller plus vite dans cette détermination, il est préférable de faire porter la moyenne sur un nombre entier d'années, ne résulte pas qu'il faille lier deux notions théoriquement indépendantes.

La notion de moyenne revient à chaque instant en Astronomie; elle a toujours la même définition éminemment simple : *la valeur moyenne d'un très grand nombre de quantités successives.*

122. Détermination du rapport du jour solaire moyen au jour sidéral.

1° — Il s'agit là d'une notion capitale; aussi fixerai-je les idées par des exemples. Je prends les nombres de la *Connaissance des Temps*; le lecteur les regardera comme des résultats d'observations.

Voici les ascensions droites du Soleil, à midi vrai de Paris, pour quelques jours de 1915. Je supprime les fractions de seconde.

		Différences.
1er janvier 1915	$\text{Æ}_1 = 18^h\,43^m\,31^s$	
2 — —	$\text{Æ}_2 = 18\ 47\ 56$	$0^h\ 4^m\ 25^s$
3 — —	$\text{Æ}_3 = 18\ 52\ 21$	$8\ 50$
1er avril —	$\text{Æ}_4 = 0\ 39\ 16$	$5\ 55\ 45$
1er juillet —	$\text{Æ}_5 = 6\ 37\ 15$	$11\ 53\ 44$
1er janvier 1916	$\text{Æ}_6 = 18\ 42\ 26$	$23\ 58\ 55$

La détermination de ces ascensions droites est possible sans rien savoir de la marche du Soleil entre les dates choisies. Elles supposent seulement que l'on connaît la position de l'équinoxe par rapport à quelque

étoile équatoriale de comparaison (§ 111), ainsi que la variation moyenne de sa position (elle varie très lentement et très régulièrement), ce qui permet de calculer sa position chaque jour par rapport à l'étoile de comparaison. Les ascensions droites dont je me sers, sont en effet rapportées à l'équinoxe mobile, à l'équinoxe vrai du jour; c'est avec ce même équinoxe qu'est défini le jour sidéral (§ 24).

Le lecteur n'oubliera pas que si l'équinoxe est le point de l'équateur où passe le Soleil, c'est plus généralement la droite suivant laquelle le

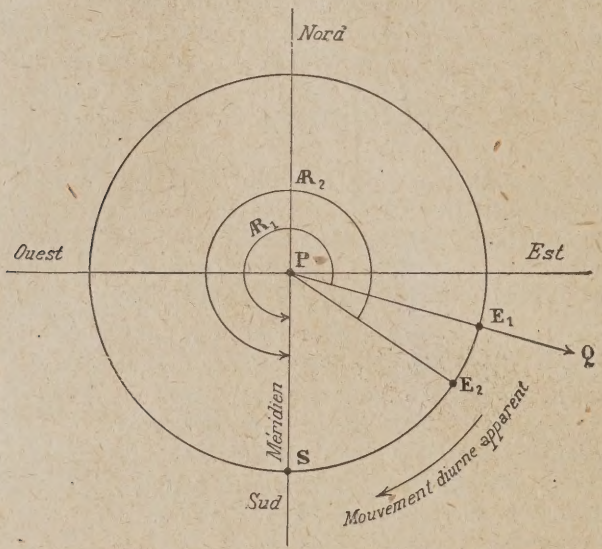


Fig. 105.

plan défini par la Terre et l'élément instantané de trajectoire solaire (mouvements apparents) coupe l'équateur.

L'équinoxe est donc défini à chaque instant sans ambiguïté.

2° — Utilisons d'abord les deux premiers nombres.

Le 1er janvier à midi vrai l'équinoxe E_1 fait l'angle $\mathcal{R}_1$ avec le méridien (fig. 105). Le 2 il est en E_2; il fait l'angle $\mathcal{R}_2$. Le mouvement diurne apparent s'effectue dans le sens de la flèche. Quand le 1er janvier le Soleil passe au méridien, l'équinoxe passe dans le cercle horaire PQ. Quand le 2 janvier, le Soleil passe au méridien, l'équinoxe a déjà traversé le plan horaire PQ; il fait avec lui l'angle $4^m\ 25^s$, qui correspond à la fraction 0,003067 de jour sidéral. Donc le jour solaire vrai compris entre les passages au méridien le 1er et le 2 janvier, contient :

1,003067 jour sidéral.

Ce rapport est, si l'on veut, le rapport R du jour moyen au jour sidéral, mais calculé pour un jour solaire.

La comparaison des ascensions relatives au 1er et au 3 janvier donne le même résultat.

Comparons les observations du 1er janvier et du 1er avril.

Il s'est écoulé 90 jours solaires vrais.

Une figure analogue à la figure 105 montre qu'il s'est écoulé :

90 jours + $5^h\ 55^m\ 45^s$ de temps sidéral = 90,247048 jours sidéraux.

D'où : $$R = \frac{90{,}247048}{90} = 1{,}0027449.$$

Comparons les observations du 1er janvier et du 1er juillet.

Pour 181 jours solaires vrais, il s'est écoulé :

181 jours + $11^h\ 53^m\ 44^s$ de temps sidéral = 181,495648 jours sidéraux.

D'où : $$R = \frac{181{,}495648}{181} = 1{,}0027384.$$

Comparons les observations du 1er janvier 1915 et du 1er janvier 1916.

Pour 365 jours solaires vrais, il s'est écoulé :

365 jours + $23^h\ 58^m\ 55^s$ de temps sidéral = 365,999248 jours sidéraux.

D'où : $$R = \frac{365.999248}{365} = 1{,}0027375.$$

Faisons encore le calcul pour le jour vrai et les dates suivantes :

18 septembre 1915	$AR = 11^h\ 39^m\ 43^s$	Différence $3^m\ 35^s$.
19 —	11 43 18	
23 décembre 1915	$18^h\ 2^m\ 31^s$	Différence $4^m\ 26^s$.
24 —	18 6 57	

D'où les rapports :

18 septembre . . . . . R = 1,002488.

23 décembre. . . . . R = 1,003079.

3° — Ces calculs extrêmement simples montrent que le rapport du jour vrai au jour sidéral est variable d'un jour à l'autre, ce que nous savions. Les deux derniers nombres sont ses valeurs extrêmes.

Mais dès que nous prenons un intervalle assez long, le rapport devient quasi constant. La valeur considérée comme exacte est :

1,002737909,

très voisine de celle que fournit le calcul pour une année entière.

Par convention le jour moyen contient 86 400 secondes de temps moyen : conséquemment le jour sidéral en contient :

$$\frac{86\,400}{1{,}0027379} = 86\,164{,}091$$

La différence jour solaire moyen — jour sidéral = $235^s{,}909$.

4° — La précision obtenue pour le calcul portant sur une année

entière vient de ce que les inégalités sont principalement de périodes annuelles et semi-annuelles ; elles s'éliminent donc du fait qu'on opère presque exactement sur un an.

Mais *a priori* nous ignorons ce qu'il en est. La prudence veut donc que nous recommencions le travail pour une période aussi grande que possible. Puisque nous prévoyons que les inégalités principales s'éliminent en choisissant un nombre entier d'années, nous aurons soin de nous placer dans cette hypothèse.

Comme exercice le lecteur calculera le rapport du jour solaire moyen au jour sidéral en partant des nombres suivants.

Cassini II nous apprend (dans son *Astronomie*) que le 16 janvier 1733, à midi vrai pour Paris, l'ascension droite du Soleil était :

$$\text{R} = 298^\circ\, 31'\, 24'', \text{ soit } 19^h\, 54^m\, 6^s.$$

D'après la *Connaissance des Temps* pour 1915, le 16 janvier 1915, à midi vrai pour Paris, on avait :

$$\text{R} = 19^h\, 49^m\, 0^s.$$

Le lecteur calculera le nombre de jours vrais entre les deux dates (il est entier). Pour cela il tiendra compte des années *bissextiles*.

Il se rappellera que 1800 et 1900 sont des années *communes*.

Soit N le nombre de jours solaires ainsi obtenu. La partie entière n du nombre correspondant $N + n + \varepsilon$ de jours sidéraux est évidemment connue sans ambiguïté. Comme aucune table ne l'indique, le lecteur la calculera (d'après le résultat ci-dessus), en supposant qu'on a *approximativement* :

$$\frac{N+n}{N} = 1{,}0027375 ; \qquad (1)$$

il trouvera un nombre fractionnaire dont il prendra la partie entière. Enfin il calculera la partie complémentaire en utilisant les ascensions droites données.

Connaissant N et $N + n + \varepsilon$, on a R.

La seule hypothèse intervenant dans le calcul est que l'équation approchée (1) est assez exacte pour que l'erreur sur n soit inférieure à une demi-unité. Sous ce rapport il serait prudent d'échelonner nos déterminations, par exemple, d'opérer d'abord sur 20 ou 30 ans, au lieu de prendre tout de suite l'intervalle de 182 ans, soit près de 66·500 jours.

123. Année tropique ; procédé vulgaire de détermination.

1° — Les phénomènes qui intéressent la vie civile, dépendent de la déclinaison du Soleil. L'année doit donc nécessairement être définie par quelque observation liée à la déclinaison. Il est vraisemblable que dès la plus haute antiquité, on a déterminé la valeur de l'année par quelque procédé analogue au suivant.

On marque un terme fixe à l'horizon au point où l'on voit le Soleil se lever ou se coucher pour une certaine date. L'année suivante on détermine, à la même date, l'endroit où le même phénomène se produit.

Une interpolation donne la grandeur de l'année.

En effet nous savons (§ 104) que l'azimut où le Soleil passe dans l'horizon, est lié à la déclinaison par la formule :

$$\cos A = -\sin D : \cos\lambda. \qquad (1)$$

Quand A reprend la même valeur, il en est de même pour D (la latitude λ restant invariable).

Voici l'exemple numérique donné par Cassini; il montre qu'à défaut de rigueur, la méthode est sensible.

Cassini marque un point de l'horizon où le Soleil se lève le 20 mars 1716. Le 20 mars 1717, le Soleil se lève en un point dont l'azimut est 7 minutes trop petit. Le 21 mars l'amplitude ortive s'est accrue de 37 minutes. Cassini pose la proportion :

$$\frac{7}{37} = \frac{x}{24}, \qquad x = 5^h\,50^m.$$

L'année définie par le retour à la même déclinaison est donc approximativement $365^j\,5^h\,50^m$.

2° — Cette méthode, peu précise, est intéressante à plus d'un titre.

Cassini choisit une date voisine de l'équinoxe, parce qu'alors D, par suite A varie le plus vite.

Au voisinage des équinoxes la variation diurne de déclinaison solaire est 23′ 43″. D'autre part la formule (1) donne sensiblement :

$$A = 90°, \quad D = 0°; \qquad dA = dD : \cos\lambda.$$

Pour Paris : $\lambda = 48°\,50'$, $\cos\lambda = 0{,}658$

$$dA = (23'\,43'')\,1{,}52 = 37' \text{ environ.}$$

C'est le nombre de Cassini.

A un kilomètre une minute vaut $1\,745 : 60 = 29$ cm. environ.

C'est le diamètre d'un arbre moyen.

A défaut de précision, Cassini a donc raison de déclarer la méthode sensible.

De fait on sait depuis longtemps que l'année *définie par la déclinaison solaire* vaut à peu près 365 jours *un quart*. Nous verrons que cette estimation est à la base de la réforme du calendrier par Jules César.

3° — Une autre méthode peu précise mais qui se présente naturellement à l'esprit, utilise les solstices.

On détermine les instants pour lesquels le Soleil, deux années de suite, parvient à la plus grande hauteur méridienne.

La déclinaison solaire étant peu variable au voisinage des solstices, on ne détermine pas leurs instants : on applique la méthode des hau-

teurs égales. On cherche les temps pour lesquels, à midi, le Soleil repasse à la même hauteur, avant et après le solstice; on fait la moyenne des temps obtenus. Si le Soleil à midi ne repasse pas exactement à la même hauteur, on interpole les résultats pour deux jours de suite.

Voici l'exemple donné par Cassini.

Hauteurs méridiennes du bord supérieur du Soleil :

17 mai 1716	60° 51′ 55″
25 juillet —	61 5 0
26 — —	60 52 0

Entre le 25 et 26 juillet à midi la déclinaison a diminué de $13' = 780''$. Pour être égale à celle du 17 mai, elle doit diminuer de $5''$ à partir du midi le 26 juillet. Ce qui demande :

$$5 : 780 = 0{,}0064 \text{ de jour} = 9^m\,14^s.$$

L'intervalle du 17 mai à midi au 26 juillet à $0^h\,9^m\,14^s$ est de $70^j\,0^h\,9^m\,14^s$ dont la moitié est $35^j\,0^h\,4^m\,37^s$.

Le temps du solstice apparent est donc le 21 juin 1716 à $0^h\,4^m\,37^s$ après midi. On recommence l'année suivante.

A la vérité la méthode n'est pas rigoureuse parce que les variations de la déclinaison solaire ne sont pas symétriques de part et d'autre du solstice (qui ne coïncide pas avec l'apogée). Elle est pourtant suffisante pour fournir une première approximation, la même différence entre le solstice vrai et le solstice calculé comme ci-dessus se reproduisant à peu près pour plusieurs années consécutives.

Comme les hauteurs peuvent être déterminées par le gnomon, il est vraisemblable que depuis des temps très reculés, on a utilisé les solstices pour déterminer la longueur de l'année.

124. Année tropique; méthode précise de détermination.

1° — La meilleure méthode pour déterminer l'année tropique utilise les équinoxes.

Pas de difficulté pour l'*année tropique vraie* : c'est le temps qui s'écoule entre deux passages consécutifs du Soleil par l'équinoxe du printemps; autrement dit, le temps qui s'écoule entre deux passages consécutifs du Soleil dans l'équateur, le Soleil allant du côté sud au côté nord de cet équateur (nœud ascendant).

Dès la plus haute antiquité on a su déterminer ce passage (§ 111).

L'*année tropique moyenne* est la moyenne d'un très grand nombre d'*années tropiques vraies*. Mais ici une difficulté se présente. L'année tropique vraie a sûrement une *inégalité périodique* de 18 ans due à la nutation; mais elle a aussi une *inégalité séculaire* due à la rotation du grand axe de l'orbite terrestre.

En raison de la précession des équinoxes, l'année tropique est un peu plus courte que l'année sidérale; mais outre que le petit angle à parcourir varie d'une année à l'autre en raison de la nutation (période de 18 ans environ), la vitesse avec laquelle le Soleil le parcourt varie au cours des siècles, en raison de la rotation de la ligne des apsides.

A ces inégalités s'en ajoutent d'autres provenant des actions sur la Terre des planètes voisines.

2° — Montrons d'abord que la détermination de l'année tropique moyenne en jours solaires moyens, n'est pas autre chose que le problème déjà étudié du rapport du jour solaire moyen au jour sidéral.

Ce sont là deux aspects du même problème; la seule différence est que les difficultés sont plus apparentes dans le cas de l'année tropique.

Considérons les mouvements apparents.

Le calcul du jour solaire moyen comparé au jour sidéral repose sur la mesure de l'angle α dont moyennement le Soleil s'écarte de l'équinoxe tous les jours en ascension droite. En un jour de temps moyen le Soleil moyen tourne autour de la Terre de 360°; l'équinoxe tourne de $360 + \alpha$. En un jour sidéral l'équinoxe tournant (par définition) de 360°, et ses mouvements étant uniformes, on a :

$$R = \frac{\text{jour moyen}}{\text{jour sidéral}} = \frac{360 + \alpha}{360} = 1 + \frac{\alpha}{360}.$$

Ainsi par jour de temps moyen, le Soleil moyen s'écarte (en ascension droite) de l'équinoxe de α degrés. Pour qu'il le rattrape, il faut un nombre n de jours moyens :

$$n = \frac{360}{\alpha} = \frac{1}{R - 1}.$$

Si nous connaissons R, nous calculons n; et réciproquement.

Fixons les idées sur cet angle α.

Nous trouvons dans la *Connaissance des Temps*, sous la rubrique *temps sidéral à midi moyen*, l'angle horaire de l'équinoxe.

Voici quelques nombres :

		Différences.
1er janvier 1915	$18^h\,40^m\,11^s,74$	
2 —	18 44 8 ,29	$3^m\,56^s,55$
3 —	18 48 4 ,85	3 56 ,56
4 —	18 52 1 ,41	3 56 ,56

La différence constante est $3^m\,56^s,55 = 236^s,55 = 59'\,8'',25$.

3° — Quoi qu'il en soit, montrons comment on détermine *l'année tropique moyenne*. J'emprunte mon exemple à Cassini II.

Il commence par établir, d'après les observations d'Hipparque, que l'équinoxe du printemps eut lieu à $11^h\,55^m$ du matin, le 24 mars de l'année 146 avant J.-C., à Alexandrie d'Égypte.

D'autre part il observe l'équinoxe de 1735 le 20 mars à $14^h\,20^m\,4^s0$.

La différence des méridiens entre Paris et Alexandrie étant de $1^h\,51^m\,46^s$, il trouve qu'il se produisit à Alexandrie le 20 mars 1 735 à $16^h\,12^m\,26^s$ ($4^h\,12^m\,16^s$ du matin).

Nous rencontrons une difficulté : de quelles heures s'agit-il? Cassini suppose une horloge réglée sur le temps vrai au voisinage des dates considérées, c'est-à-dire battant 86 400 fois entre deux passages consécutifs du Soleil au méridien. Si le jour solaire vrai différait beaucoup du moyen, cela n'aurait évidemment aucun sens. Mais la différence des deux jours n'étant que d'une vingtaine de secondes au voisinage de l'équinoxe, il importe peu qu'on se serve de l'un ou de l'autre, l'erreur devant être divisée par le nombre de jours qui séparent les deux observations : il est ici formidable. C'est ce que j'explique au long dans le § 120.

De ces données, il s'agit de conclure la durée de l'année tropique. Elle sera tout naturellement exprimée en *jours moyens*, du seul fait que le calcul porte sur un très grand nombre de jours vrais; on peut même dire, sur le plus grand nombre de jours vrais dont on disposait en 1735, les observations antérieures à Hipparque n'étant pas assez précises pour être utilisées.

Cassini réduit la différence en années juliennes; il retranche 11 jours dont le calendrier grégorien anticipe sur le julien.

Il trouve entre les deux observations :

1 880 années juliennes, moins $14^j\,7^h\,42^m\,34^s$, l'année julienne étant comptée de 365,25 jours, ou $365^j\,6^h$.

Le calcul de l'année tropique moyenne tient donc en ceci que 1880 années tropiques sont inférieures à 1 880 années juliennes de :

$$14^j\,7^h\,42^m\,34^s = 1{\cdot}237{\cdot}354 \text{ secondes de temps moyen;}$$

Ce qui fait : $658^s = 10^m\,58^s$ par an.

L'année tropique moyenne contient donc

$$365^j\,5^h\,49^m\,2^s \text{ de temps moyen.}$$

Une autre observation d'Hipparque fournit pour 1 860 années une avance de $14^j\,10^h\,48^m\,49^s$. D'où pour l'année tropique moyenne :

$$365^j\,5^h\,48^m\,49^s \text{ de temps moyen.}$$

L'avance par an sur l'année julienne serait de 671 secondes.

On admet aujourd'hui :

$$365^j\,5^h\,48^m\,46^s.$$

125. Inégalités séculaires.

Qu'allons-nous faire des inégalités séculaires?

Deux voies s'offrent à nous.

Ou bien nous les considérons comme telles et disons : l'année tropique moyenne est appelée moyenne parce que débarrassée des inégalités à courtes périodes; mais elle varie lentement : ce n'est qu'une année moyenne *valable pendant un certain temps*.

Nous écrivons donc avec la *Connaissance des Temps* :

Année tropique $= 365^j,24219647 - 0^j,000\cdot006\cdot24\ t$,

où t est exprimé en siècles de 36 525 jours (cent années juliennes).

Plus clairement nous disons que l'année tropique diminue de $0^s,53$ par siècle.

Ou bien nous définissons une année tropique *plus exactement moyenne* qui serait la moyenne des années tropiques calculée pour une révolution entière de la ligne des apsides. C'est ce que font Cassini et Lalande. Ils corrigent les observations du fait que l'angle total de précession des équinoxes depuis Hipparque n'est pas parcouru par le Soleil avec sa vitesse moyenne.

C'est ainsi qu'à sa première détermination de

$$365^j\ 5^h\ 49^m\ 2^s,$$

Cassini ajoute 6^s.

Il va de soi que le résultat nous est indifférent; seul nous intéresse la nature des raisonnements. Que l'année tropique varie ou ne varie pas de $0^s,53$ par siècle, j'imagine que cela vous touche aussi peu que moi.

126. Année sidérale. Année caniculaire.

1° — On appelle *année sidérale* le temps nécessaire pour que la longitude moyenne du Soleil, *comptée à partir d'un équinoxe fixe* augmente de 360°.

Comme on le voit cette définition ne diffère de celle de l'année tropique que parce que la droite de référence est fixe, tandis que l'équinoxe est mobile. Il rétrograde moyennement de $50'',26$ par an.

L'année sidérale est donc plus longue que l'année tropique du temps que le Soleil met à parcourir $50'',26$ sur l'écliptique.

Or la variation moyenne de longitude par jour moyen est de $59'\,8'',21$. A ce taux il faut $20^m\ 23^s$ pour parcourir $50'',26$. On a donc :

Année tropique	365^j	5^h	48^m	46^s
— sidérale	365	6	9	9
Différence			20	23

En jours et fraction décimale de jour cela fait :

Année tropique.	365,24220 jours
— sidérale	365,25636

Pour fixer les idées sur la valeur de l'année sidérale, expliquons ce qu'était *l'année caniculaire* des Égyptiens; ce qui expliquera par surcroît le sens du mot *canicule* encore souvent employé. La *canicule*, c'est Sirius ou α Grand Chien, l'étoile la plus brillante du Ciel.

Les coordonnées approchées actuelles sont :

$$A = 6^h\ 41^m \qquad D = -16°\ 36'.$$

L'année *cynique* des Égyptiens commençait au *lever héliaque* de Sirius. Expliquons le sens de ce terme.

2° — Dans son mouvement propre à travers les étoiles, le Soleil va dans le sens direct, de l'ouest à l'est. Si un jour il a même ascension droite qu'une étoile, le lendemain son ascension est plus grande : au moment où l'étoile se lève, il est encore sous l'horizon.

On admet que pour les latitudes voisines de 30°, Sirius est alors visible, à la condition que le Soleil soit à 10° sous l'horizon.

C'est ce qu'on appelle le *lever héliaque* de Sirius.

Cherchons la date actuelle du lever héliaque de Sirius pour la latitude 30°.

Calculons l'angle horaire de Sirius au moment de son lever (§ 13).

On a : $D = -16° 36'$ $\lambda = 30°$

$\cos H = 0{,}1719$ $H = 80° 6'$

Pour avoir l'angle horaire du Soleil quand sa hauteur est $-10°$, il faut connaître sa déclinaison. Employons la méthode de fausse position : posons $D = 18°$. La formule à appliquer est (§ 13) :

$$\sin h = \sin D. \sin \lambda + \cos D. \cos. \lambda \cos H.$$

Posons : $h = -10°$, $D = 18°$, $\lambda = 30°$.

On trouve aisément :

$$\cos H = -0{,}400, \quad H = 113° 36'.$$

La différence des ascensions droites du Soleil et de Sirius est égale à la différence des angles horaires, soit :

$$33° 30' = 2^h 14^m$$

L'ascension droite du Soleil est par suite :

$$6^h 41^m + 2^h 14^m = 8^h 55^m.$$

ce qui correspond au 4 août. Pour cette ascension droite la déclinaison solaire est 17° 20', *très voisine de celle que nous avons arbitrairement posée*. En tâtonnant on conçoit la possibilité d'obtenir une meilleure approximation, inutile, pour le but que nous poursuivons, et sans intérêt d'après la nature de la question.

Déterminer la date du lever héliaque de Sirius, c'est, par une méthode peu précise *mais très facile à appliquer*, déterminer l'année sidérale (§ 146).

3° — Ce lever tombait au solstice d'été, 1300 ans environ avant notre ère.

Pour le montrer, supposons que le lever héliaque se fait toujours pour la même différence d'ascension droite entre le Soleil et Sirius. Ce n'est pas exact (en raison de la variation de la déclinaison solaire), mais

cela suffit pour le but que nous poursuivons. Au solstice d'été l'ascension droite du Soleil est 6^h. Il faut donc que celle de Sirius diminue de 3 heures environ du fait de la précession des équinoxes.

$$3 \text{ heures} = 45^\circ = 162\,000''.$$

A raison de $50'',26$ par an, cela fait 3 220 années.

Le lever héliaque de Sirius annonçait le commencement de l'inondation du Nil. D'où son importance pour les Égyptiens. Il annonçait les grandes chaleurs; d'où le mois de la Canicule, dont le nom s'est perpétué alors qu'en raison de la précession, la date du lever héliaque retardait d'un mois et demi dans l'année tropique.

127. Longueur des saisons.

1° — Le Soleil, ne se déplaçant pas sur sa trajectoire avec une vitesse angulaire uniforme, ne passe pas dans le même temps d'un équinoxe au solstice suivant, ou d'un solstice à l'équinoxe suivant.

Si la ligne des apsides coïncidait exactement avec la ligne des solstices, l'hiver serait égal à l'automne, le printemps à l'été; les deux premières saisons seraient plus courtes que les secondes. Comme les deux lignes ne coïncident pas, les quatre saisons sont inégales. *Par convention*, elles ont pour limites les instants où le Soleil passe aux équinoxes et aux solstices, points dont les longitudes diffèrent de 90°.

Le périgée étant en hiver, l'apogée en été, l'hiver est en définitive la saison la plus courte, l'été est la plus longue.

Pour avoir la longueur des saisons en 1915, consultons la *Connaissance des Temps*. Nous trouvons les indications suivantes :

Équinoxe de printemps. .	21 mars	79e jour	$5^h\ 1^m$
Solstice d'été	22 juin	172 —	0 39
Équinoxe d'automne. . .	23 septembre	265 —	15 33
Solstice d'hiver	22 décembre	355 —	10 26

Ce qui donne pour longueurs des saisons :

Printemps	92 jours	19 heures	38 minutes
Été	93 —	14 —	54 —
Automne.	89 —	18 —	33 —
Hiver	89 —	0 —	24 —

Soit au total 365 jours 5 heures 49 minutes, c'est-à-dire la valeur de l'année tropique qui évidemment intervient ici.

L'inégalité des saisons est si grande qu'elle n'avait pas échappé aux anciens; entre l'équinoxe de printemps et l'équinoxe d'automne (printemps + été) s'écoulent 186 jours 11 heures; entre l'équinoxe d'automne et celui de printemps (automne + hiver) s'écoulent 178 jours 17 heures;

le Soleil est donc au-dessus de l'équateur 7 jours 16 heures de plus qu'au-dessous.

2° — Observations anciennes.

Comme il s'agit là d'une des premières déterminations précises des anciens, je décris leur procédé de mesure.

Ils utilisaient des *cercles armillaires*. Autant qu'on en peut juger d'après leurs descriptions incomplètes, l'appareil se composait de deux

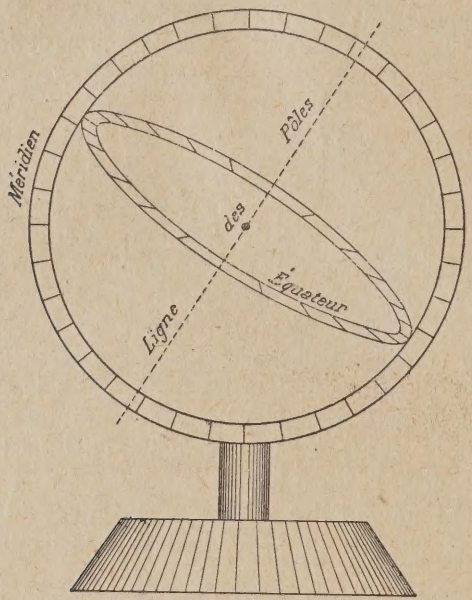


Fig. 106.

cercles divisés de cuivre, l'un fixe dans le méridien, l'autre fixe dans l'équateur. On règle le second en vérifiant que le rayon visuel rasant le limbe aboutit pendant toute la nuit à la même étoile, malgré le déplacement dû à la rotation de la Terre.

Aux équinoxes l'ombre de la partie supérieure du cercle équatorial se fait exactement sur la partie inférieure : le Soleil est dans le plan du cercle.

Les anciens déterminaient les solstices au moyen du gnomon (§ 99) et par la méthode des hauteurs égales. Elle consiste à mesurer l'ombre à midi de jour en jour et à prendre la moyenne des temps pour lesquels les ombres sont égales. Ayant ainsi longtemps déterminé les équinoxes et les solstices, les anciens trouvèrent qu'ils ne sont pas équidistants : le Soleil ne se déplace pas dans l'écliptique avec une vitesse angulaire uniforme.

128. Équation du temps.

1° — Se servir du jour moyen pour mesurer le temps, c'est imaginer un Soleil fictif (Soleil moyen) qui se déplace sur l'équateur d'un mouvement angulaire uniforme. *Peu importe à quel instant nous lâcherons notre Soleil moyen*; c'est pure affaire de convention sans grande importance pratique. Changer l'instant conventionnel du départ, c'est modifier la valeur numérique d'une constante dans la relation que nous allons définir. Il suffit qu'on pose qu'à telle date le Soleil moyen passe au méridien de tel lieu, tant de secondes de temps moyen avant ou après le Soleil vrai, pour que les temps moyens se trouvent *ipso facto* définis pour toutes les époques passées ou futures, *la longueur du jour moyen en fonction du jour sidéral étant supposée choisie.*

Assurément rien dans le ciel ne fixe à chaque instant la position du Soleil moyen; mais par définition son ascension droite croît uniformément. D'après la valeur numérique choisie pour le jour moyen (nombre de secondes sidérales qu'il contient) et d'après la convention de lâcher, nous pouvons aisément calculer à chaque instant sa position par rapport à une étoile équatoriale, plus précisément par rapport à l'équinoxe mobile (intersection instantanée *moyenne* de l'écliptique et de l'équateur).

En définitive le Soleil moyen est un astre fictif qui se déplace avec une vitesse constante sur l'équateur dans le sens direct et qui, par définition, a la propriété d'aller aussi vite *en moyenne* que le Soleil vrai.

2° — Reste à connaître à chaque instant la position du Soleil vrai par rapport au Soleil moyen.

Soit $\mathcal{R}$ l'ascension droite du Soleil vrai;

$\mathcal{R}_m = \omega t$, est celle du Soleil moyen.

Nous posons : $\mathcal{R} = \mathcal{R}_m + C + E_1 + E_2 + \ldots$

C est une constante qui dépend de l'époque du lâcher du Soleil moyen; E_1, E_2,... sont des termes périodiques; C, E_1, E_2,... sont les *équations*, quantités qu'il faut ajouter à l'ascension droite moyenne pour avoir l'ascension droite vraie.

Évaluons t en jours. La constante ω vaut 3 548″,33, puisqu'en une année tropique (365,2422 jours moyens), le Soleil moyen doit parcourir exactement 360° = 1 296 000 secondes d'arc par rapport à l'équinoxe mobile.

Reste à déterminer les équations périodiques. Il ne s'agit pas pour nous d'établir les formules *exactes* des astronomes : elles contiennent des centaines de termes. Montrons que les deux principales inégalités ont des périodes annuelle et semestrielle.

De la non-uniformité du mouvement en longitude résulte (comme première approximation) une équation E_1 *de période annuelle* étudiée au § 89. Montrons que de l'obliquité de l'équateur sur l'écliptique résulte une seconde équation E_2 *de période semi-annuelle*. Son amplitude dépasse celle de la précédente; c'est elle qui règle l'allure du phénomène total.

Cherchons quelle serait la loi de variation de l'ascension droite à supposer que la longitude solaire variât linéairement par rapport au temps.

Pour cela parlons de la formule :

$$\operatorname{tg} \mathrm{R} = \cos i \,.\, \operatorname{tg} \mathrm{L} = \cos i \,.\, \operatorname{tg} \omega t.$$

i est l'inclinaison de l'écliptique sur l'équateur :

$$i = 23^\circ 27' \qquad \cos i = 0{,}917.$$

$\mathrm{L} = \omega t$, est la longitude géocentrique solaire *que je suppose varier linéairement en fonction du temps.* Posons :

$$\operatorname{tg} \mathrm{R} = (1 - 0{,}093) \operatorname{tg} \omega t, \qquad \operatorname{tg} \mathrm{R} - \operatorname{tg} \omega t = -0{,}083 \operatorname{tg} \omega t.$$

Considérons le premier membre comme une différentielle.

$$\frac{\mathrm{R} - \omega t}{\cos^2 \omega t} = -0{,}083 \,.\, \operatorname{tg} \omega t, \qquad \mathrm{R} - \omega t = -0{,}0415 \,.\, \sin 2\omega t.$$

$$\mathrm{R} - \omega t = -143' \sin 2\omega t.$$

Ainsi de l'obliquité de l'écliptique résulte une variation périodique ayant six mois pour période et 143′ environ pour amplitude.

129. Étude d'un cas simple.

1° — Comme, je ne sais pourquoi, ces questions rebutent les commençants, je vais traiter un cas schématique sur lequel il est impossible de ne pas comprendre. Après quoi je reviendrai au cas réel.

Supposons que le périgée coïncide avec le solstice d'hiver, et que le Soleil et la Terre soient seuls dans l'espace. La relation entre les ascensions droite, moyenne et vraie, serait rigoureusement de la forme simple :

$$\mathrm{R} = \mathrm{R}_m + \mathrm{C} + a \sin \omega t + b \sin 2\omega t + \ldots\ldots = \omega t + \mathrm{C} + \mathrm{E} + \ldots\ldots$$

Prenons pour origine des temps le passage au solstice d'hiver (périgée); supposons qu'alors les deux Soleils coïncident. On a :

$$\mathrm{C} = 0, \qquad \mathrm{R} - \omega t = a \sin \omega t + b \sin 2\omega t = \mathrm{E}.$$

J'ai construit les courbes $\mathrm{E} = f(t)$, $d\mathrm{E} : dt = f'(t)$, en choisissant pour a et b des valeurs numériques simples dont le rapport ne s'écarte pas beaucoup des valeurs réelles.

Pour simplifier je suppose l'année de 360 jours, ce qui me permet comme variable de prendre les jours ou les degrés.

2° — A partir du solstice d'hiver, le Soleil vrai va d'abord plus vite sur l'équateur que le Soleil moyen, dans le sens direct par rapport aux étoiles : l'équation, d'abord nulle, est positive et croît.

Elle passe par un maximum au milieu de février, est encore positive à l'équinoxe du printemps; elle s'annule au milieu d'avril.

Pendant tout ce temps la disposition relative des deux Soleils par

rapports aux étoiles est représentée par la figure 108 : le Soleil vrai passe au méridien après le Soleil moyen.

Lorsque l'équation est devenue négative, on a la disposition relative inverse : c'est au tour du Soleil moyen d'être en avance sur le Soleil vrai par rapport au déplacement dans le champ des étoiles. Corrélativement c'est le Soleil vrai qui passe au méridien avant le Soleil moyen.

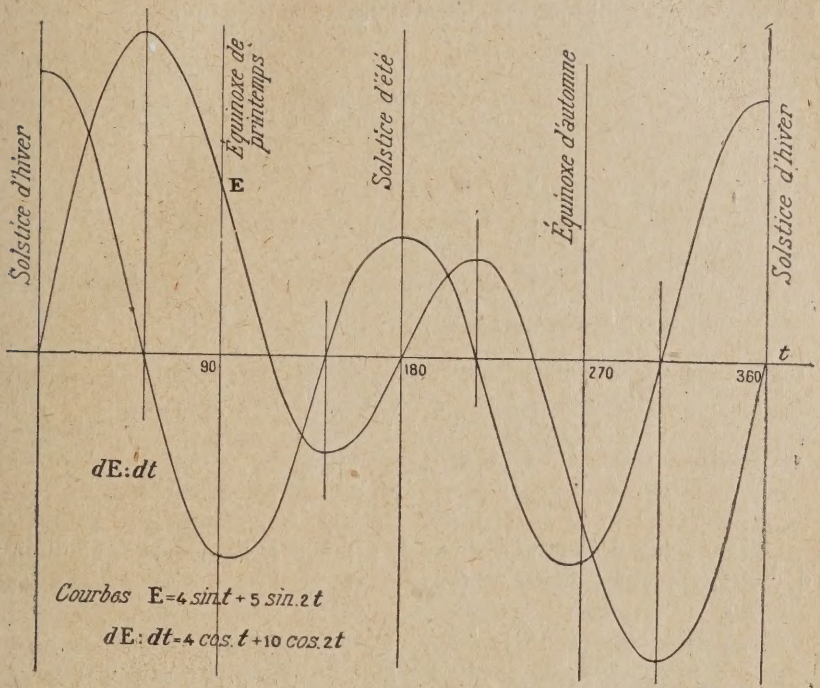


Fig. 107.

L'équation est minima au milieu de mai.

Au solstice d'été nous avons parcouru la moitié de la période.

Les phénomènes se reproduisent alors avec les signes contraires : petit maximum de l'équation fin juillet, valeur nulle au début de septembre, valeur négative à l'équinoxe d'automne, grand minimum fin octobre, valeur nulle au solstice d'hiver.

3° — JOURS VRAIS.

Par rapport aux étoiles le Soleil se déplace dans le sens direct, c'est-à-dire précisément dans le sens du mouvement diurne *réel* : le méridien d'un lieu doit tourner de plus de 360° pour rattraper le Soleil. Le jour vrai dépasse donc d'autant plus le jour sidéral (par suite le jour moyen) que la vitesse de variation d'ascension droite est plus grande.

D'où cette conséquence fondamentale : *l'excès du jour vrai sur le jour moyen est proportionnel à* d**E** : *dt.*

Par exemple quand on passe de la disposition 1 à la disposition 2 (fig. 108), il est clair que le temps mis par le Soleil vrai à repasser au méridien, est plus grand que le temps mis par le Soleil vrai, et cela d'autant plus que E′ l'emporte davantage sur E.

Il résulte de là que (pour notre cas schématique), le jour vrai est le plus long aux solstices ; il est le plus court au voisinage des équinoxes. Les maximums sont inégaux, les minimums sont égaux.

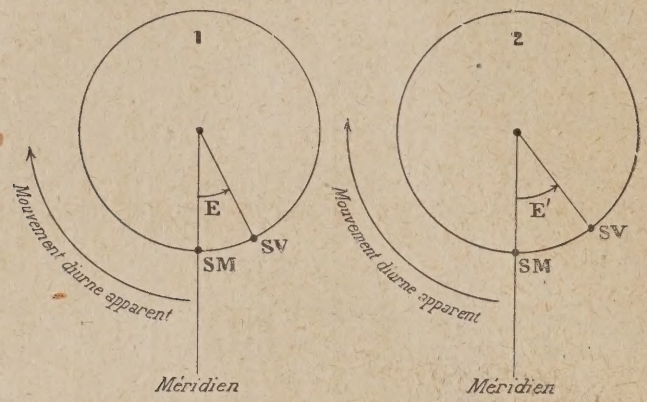


Fig. 108.

Le jour vrai est égal au jour moyen quand la distance angulaire des deux Soleils est maxima ou minima.

130. **Jours vrais.**

1° — Les courbes 109 et 110 donnent l'équation du temps et l'excès du jour vrai sur le jour moyen pour l'année 1915. Elles ressemblent d'une manière remarquable à celles du paragraphe précédent, preuve que si notre hypothèse est trop simple, elle donne remarquablement l'allure du phénomène.

La complication provient de ce que le périgée ne coïncide pas exactement avec le solstice, et que la Terre et le Soleil ne sont pas seuls dans l'espace.

Tout en restant dans notre hypothèse simpliste, cherchons à représenter l'équation du temps par une formule numérique à deux termes. Encore une fois il s'agit, non d'une représentation rigoureuse, mais de comprendre comment les phénomènes s'enchaînent. Laissons les astronomes de profession hausser les épaules devant les formules approchées ; j'en sais, et de fort bien rentés, qui ne se doutent même pas de la nature des problèmes dont nous élucidons l'essentiel.

Réunissons les résultats des §§ 89 et 128 en prenant dans les deux cas le solstice d'hiver comme origine des temps.

Nous obtenons la formule :

$$\mathrm{AR} - \omega t = 115'.\sin\omega t + 143'.\sin 2\omega t.$$

Elle est légitimée par le fait que nous pouvons ajouter purement et simplement de petites corrections dues à des causes différentes.

Transformons en secondes *de temps*; il faut multiplier par 4 :

$$\mathrm{E} = 460^{s}.\sin\omega t + 572^{s}.\sin 2\omega t.$$

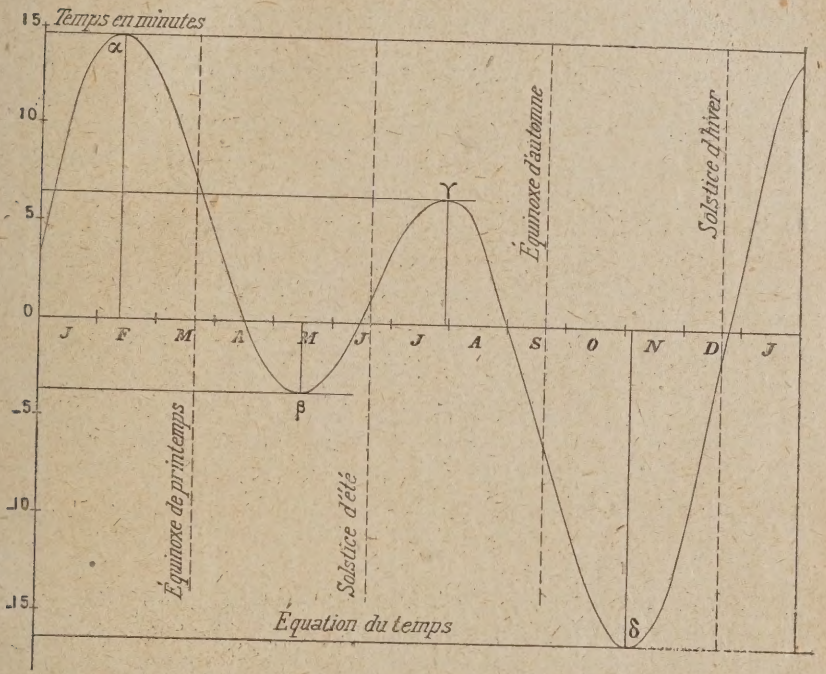


Fig. 109.

Les coefficients sont entre eux à peu près comme 4 et 5.

Le maximum et le minimum ont lieu sensiblement pour :

$$\omega t = 53^{\circ}, \qquad \omega t = 143^{\circ}.$$

Nous trouvons pour E les quantités :

$$\mathrm{E\ maximum} = 918^{s}, \qquad \mathrm{E\ minimum} = 274^{s}$$

Consultons la *Connaissance des Temps*, ou la courbe de la figure 109. Nous trouvons pour le 12 février une avance 865^{s}, pour le 4 novembre un retard de 982^{s}; soit une moyenne de 924^{s}. De même pour le 15 mai un retard de 227^{s}, pour le 27 juillet une avance de 380^{s}; soit une moyenne de 303^{s}.

Les nombres que donne la formule ci-dessus sont du même ordre.

2° — Jours vrais.

Nous savons que la différence entre le jour vrai et le jour moyen s'obtient en dérivant l'équation du temps.

Prenons comme unité le jour : le paramètre ω est tel que le produit ωt vaille 2π, pour $t = 365{,}24$.

On trouve aisément :

$$\omega = 0{,}0172.$$

D'où pour l'excès du jour vrai sur le jour moyen :

$$\text{Excès} : = 7{,}91 \cdot \cos \omega t + 19{,}68 \cdot \cos 2\,\omega t.$$

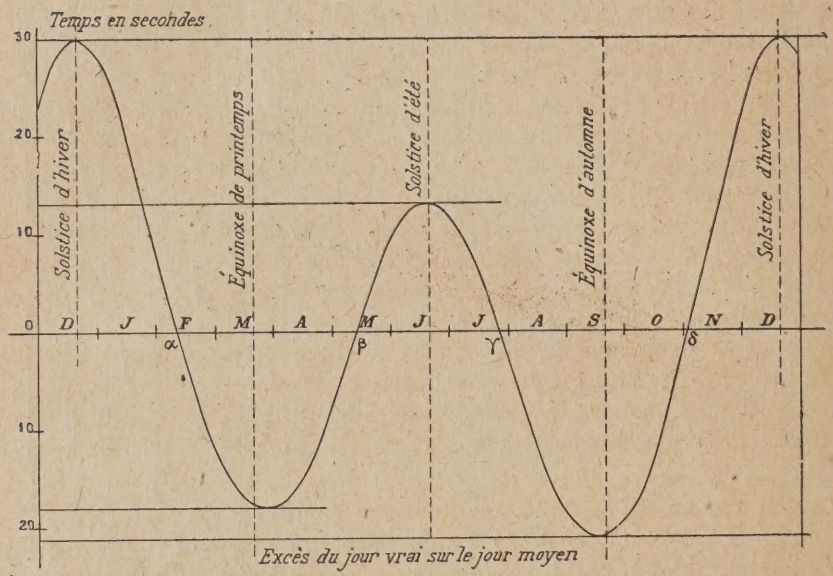


Fig. 110.

L'excès maximum du solstice d'hiver est : $7{,}91 + 19{,}68 = 27{,}59$, soit environ 28 secondes.

L'excès maximum du solstice d'été est : $-7{,}91 + 19{,}68 = 11{,}77$, soit environ 12 secondes.

Enfin les deux minimums égaux correspondent à peu près à $\omega t = 90°$; la formule donne environ — 20 secondes.

Il est très remarquable que, par des calculs aussi simples, nous rendions compte, d'une manière numériquement très acceptable, de résultats au premier abord infiniment complexes. Il serait du reste vain de chercher une représentation plus précise sans quitter l'hypothèse simpliste de la coïncidence du périgée et du solstice d'hiver.

On obtiendrait une représentation meilleure des phénomènes en tenant compte du décalage entre le périgée et le solstice d'hiver.

Le périgée arrive vers le 1er janvier, c'est-à-dire après le passage au solstice; il faudrait écrire :

$$E = 460.\sin(\omega t - \alpha) - 572.\sin 2\omega t.$$

Le retard α vaut environ 9°.

3° — De ce que le Soleil moyen est tantôt en avance tantôt en retard sur le Soleil vrai, résulte que celui-ci se lève et se couche à des heures dont la somme n'est pas 24 (temps civil). Si le midi civil coupait en deux parties égales le jour vrai, le Soleil se lèverait par exemple à $6^h 30'$ du matin et se coucherait à $5^h 30'$ du soir ($17^h 30'$, temps civil).

Je néglige la variation de déclinaison diurne.

Il n'en est pas ainsi. Par exemple à la date où j'écris (1er novembre, Toulouse), il fait jour à 6 heures du matin, mais nuit noire à 6 heures du soir. Le jour est plus long avant midi moyen qu'après midi moyen.

Effectivement, à midi moyen le 1er novembre 1915, l'angle horaire du Soleil vrai est $16^m 19^s$ pour le méridien de Paris.

Le Soleil vrai est en avance sur le moyen. Sa distance (en temps) du midi moyen est plus grande quand il se lève que quand il se couche. Il faut ajouter à cela que le méridien qui fixe l'heure en France passe à l'ouest de Toulouse, ce qui retarde encore le midi moyen sur le midi vrai.

Le phénomène inverse se produit avec une intensité considérable vers le 12 février. Le jour est plus court avant midi moyen qu'après midi.

Il est vrai qu'alors le choix du méridien origine du temps moyen (Greenwich) diminue la grandeur du phénomène.

131. Tables de la Connaissance des Temps.

1° — La *Connaissance des Temps* fournit les positions relatives du Soleil moyen et du Soleil vrai en donnant à midi moyen l'angle horaire du Soleil vrai, à midi vrai l'angle horaire du Soleil moyen.

Ici plusieurs remarques sont nécessaires.

Pour le 11 février 1915 on trouve :

A midi vrai	Soleil moyen	$H = 0^h 14^m 24^s,27$
A midi moyen	Soleil vrai	$H' = 23\ 45\ 35\ ,74$

Les angles horaires sont des angles exprimés en temps. Mais le Soleil moyen se déplaçant d'un mouvement uniforme et toujours à la même vitesse, à raison de 360° par 24 heures de temps moyen, quand on dit que son angle horaire est $0^h 14^m 24^s,27$, on dit par le fait qu'il y a $14^m 24^s,27$ de temps moyen qu'il est passé au méridien.

Au contraire le Soleil vrai ne se déplaçant pas toujours avec la même vitesse, on ne peut immédiatement conclure, de ce qu'à midi moyen son angle horaire est H', qu'il passera au méridien $24^h - H'$ après le Soleil vrai.

En d'autres termes la différence des ascensions droites des deux Soleils ne reste pas invariable pendant le temps qui s'écoule entre leurs passages respectifs au méridien.

Toutefois la somme $\mathcal{H} + \mathcal{H}'$ diffère extrêmement peu de 24 heures.

Au 11 février l'écart des deux Soleils est maximum, le Soleil vrai est le plus à gauche possible du Soleil moyen ; corrélativement leurs vitesses

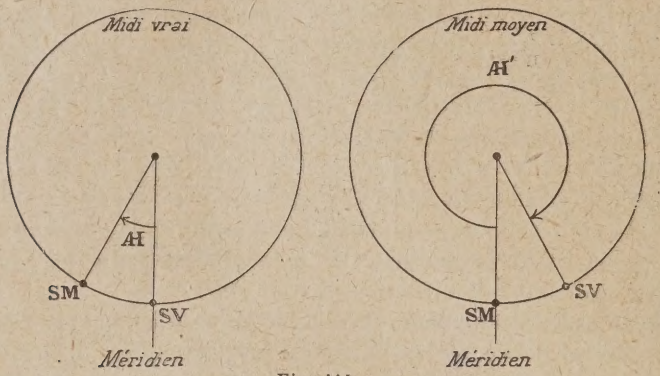


Fig. 111.

sont sensiblement les mêmes : la somme $\mathcal{H} + \mathcal{H}'$ vaut presque rigoureusement 24 heures.

Au contraire pour le 13 mars je trouve.

A midi vrai	Soleil moyen	$\mathcal{H} = 0^h\ 9^m\ 51^s,84$
A midi moyen	Soleil vrai	$\mathcal{H}' = 23\ 50\ 8,05$

La somme $\mathcal{H} + \mathcal{H}'$ est nettement différente de 24 heures.

Elle est plus petite que 24 heures parce que la différence des ascensions droites décroît.

Pour le 11 janvier, je lis :

A midi vrai	Soleil moyen	$\mathcal{H} = 0^h\ 7^m\ 44^s,71$
A midi moyen	Soleil vrai	$\mathcal{H}' = 23\ 52\ 15,42$

La somme $\mathcal{H} + \mathcal{H}'$ est plus grande que 24 heures.

2° — Ceci dit, voici quelques nombres pris dans la *Connaissance des Temps* ; ils correspondent à la figure 109. Je donne les angles horaires du Soleil moyen à midi vrai ; je supprime les fractions de seconde.

1er janvier	1915.	0h	3m	19s	27 juillet	1915.	0h 6m 20s
12 février	— .	0	14	25	1er septembre	—	0 0 13
16 avril	— .	0	0	2	2 —	— .	23 59 55
17 —	— .	23	59	48	4 —	— .	23 43 38
15 mai	— .	23	56	13	25 décembre	— .	23 59 45
14 juin	— .	23	59	51	26 —	— .	0 0 15
15 —	— .	0	0	4	1er janvier	— .	0 3 11

La *Connaissance des Temps* fournit la variation de l'angle horaire pour une heure de temps, renseignement qui permet de calculer immédiatement la différence jour vrai — jour moyen.

Voici les nombres qui correspondent aux maximums et minimums.

		Pour 1 heure.	Pour 24 heures.
28 mars	1915.	$-0,767$	$-18^s,4$
20 juin	—	$+0,542$	$+13,0$
19 septembre	—	$-0,887$	$-21,3$
24 décembre	—	$+1,245$	$+29,9$

132. Convention sur le lâcher du Soleil moyen en ascensions droites.

1. — En raison du rôle que doit remplir le Soleil moyen, son ascension droite est tantôt plus grande, tantôt plus petite que celle du Soleil vrai. Il est naturel de le lâcher de manière que la somme des avances compense la somme des retards.

Soit A l'ascension droite du Soleil moyen le 1er janvier d'une certaine année. Divisons l'année en six parties égales (par exemple); les ascensions droites du Soleil moyen seront :

$$A,\quad A+4^h,\quad A+8^h,\quad A+12^h,\quad A+16^h,\quad A+20^h.$$

Aux mêmes dates les ascensions droites du Soleil vrai seront :

$$\text{Æ}_1,\quad \text{Æ}_2,\quad \text{Æ}_3,\quad \text{Æ}_4,\quad \text{Æ}_5,\quad \text{Æ}_6.$$

Écrivons que la somme des premières ascensions droites égale la somme des secondes : nous déterminerons le paramètre A.

L'année tropique valant $365^j\,6^h$ environ, le sixième est $60^j\,21^h$.

Les dates équidistantes dans l'année sont inscrites dans le tableau suivant, avec en regard les ascensions droites solaires vraies correspondantes. Voici le calcul pour 1915.

0^j	1er janvier.	0^h	$18^h\,43^m\,30^s,38$	
60 21	2 mars.	21	22 52 30,72	
121 18	2 mai	18	2 37 7,97	$+24^h$
182 15	2 juillet	15	6 43 57,88	$+24$
243 12	1er septembre . . .	12	10 40 16,99	$+24$
304 9	1er novembre . . .	9	14 23 53,47	$+24$
			$172^h\,1^m\,17^s,41$	

Il faut retrancher de là 60^h et diviser par 6. On trouve :

$$A = 18^h\,40^m\,13^s, \quad \text{soit} \quad 280°\,3'\,0.$$

2° — La quantité que nous venons de calculer est l'ascension droite moyenne :

$$A = \frac{1}{t}\int_0^t \text{Æ}\,.\,dt.$$

Pour trouver la valeur exacte de A, il ne faut naturellement pas se borner à un aussi petit nombre de termes. Au reste, si les inégalités ont une période différente de l'année, le calcul portant sur une seule année donne des résultats différents d'une année à l'autre. Le lecteur n'oubliera pas que, pour intéressante que soit cette manière de lâcher le Soleil moyen, elle est conventionnelle : il n'y aurait qu'un inconvénient minime à changer l'origine du temps moyen. Mais au surplus lorsqu'une fois le Soleil moyen est lâché, c'est pour toujours, tout au moins pour un très grand nombre d'années.

Il revient au même de dire que dans la formule complète :

$$\mathrm{R} = \mathrm{R}_m + \mathrm{C} + \mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2 + \ldots,$$

du § 129, on fait en sorte que la constante C soit nulle.

133. **Temps sidéral à midi moyen.**

1° — La connaissance du paramètre A permet de déterminer ce que la *Connaissance des Temps* appelle *temps sidéral à midi moyen* : c'est l'ascension droite du Soleil moyen tous les jours à midi moyen (temps de Paris).

L'ascension droite du Soleil augmente en un jour moyen de

$$236^s,5554.$$

Connaissant son ascension droite à une certaine date, nous l'aurons à toute autre date séparée de la première par un nombre connu de jours moyens.

Ainsi le 1er janvier 1915, le *temps sidéral* était :

$$18^h\,40^m\,11^s,74.$$

100 jours après, c'est-à-dire le 11 avril, il est :

$$1^h\,14^m\,27^s,28;$$

la différence est $6^h\,34^m\,15^s,54 = 23655^s,54$.

Comme exercice, retrouvons le jour sidéral à partir de ces données.

Dans un jour de temps moyen, la Terre doit tourner d'un tour plus l'équivalent de $236^s,5554$ en arc soit $59'\,8'',331$.

D'où la proportion : $\dfrac{86\,400}{x} = \dfrac{360^\circ\,59'\,8'',331}{360^\circ}$.

L'importance *du temps sidéral à midi moyen* vient de ce qu'il fournit la position du point γ à midi moyen, par suite donne les angles horaires de toutes les étoiles dont nous connaissons les ascensions droites.

En réalité le problème se pose pratiquement en sens inverse : la connaissance du *temps sidéral* permet de régler les horloges de temps moyen à partir de l'heure de passage au méridien des étoiles fondamentales.

Tous les calculs de longitude s'effectuent à partir du temps moyen de Paris; ils supposent la connaissance du temps sidéral à midi moyen, c'est-à-dire la connaissance de la position de la sphère céleste à midi moyen par rapport au méridien origine.

2° — La *Connaissance des Temps* fournit le *temps sidéral* à midi moyen *de Paris*. Cherchons quel est le *temps sidéral* pour midi moyen *temps local* d'un lieu de longitude L exprimée en minutes de temps.

Montrons qu'il faut *ajouter* L $\times$ 0^s,164, si le lieu est à l'*ouest* de Paris. Il faut *retrancher* le même temps, si le lieu est à l'est de Paris.

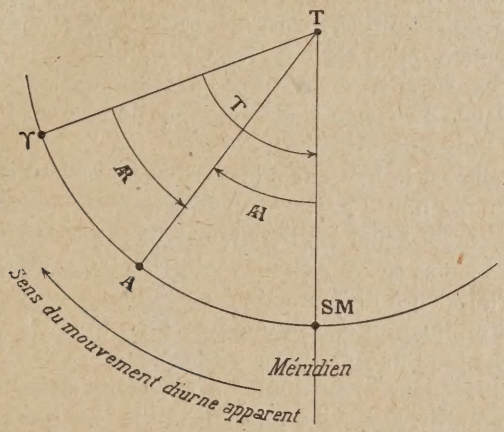


Fig. 112.

En effet l'ascension droite du Soleil moyen croît, par jour de temps moyen, de 236^s,5554. Si la longitude du lieu est ouest et vaut L minutes de temps, le Soleil moyen passe à son méridien une fraction n : 1 440 de jour de temps moyen après être passé au méridien de Paris.

Son ascension droite a crû de :

$$(236,5554 \times n) : 1\,440 = n \times 0^s,164;$$

ce qu'il fallait démontrer.

3° — La connaissance du temps sidéral à midi moyen est la donnée fondamentale pour le calcul des angles horaires des astres et le réglage des horloges en temps moyen.

Rappelons que l'angle horaire d'un astre par rapport à un méridien donné, est l'angle avec le méridien de son plan horaire (plan contenant l'astre et la ligne des pôles). Il est compté dans le sens rétrograde (sens du mouvement diurne apparent) de 0 à 360°.

La figure 112 donne immédiatement la règle suivante :

L'angle horaire Æ *d'un astre à midi moyen est égal au temps sidéral* T *moins l'ascension droite* Æ *de cet astre* :

$$Æ = T - Æ.$$

Connaissant l'angle horaire d'une étoile à midi moyen, on le connaît à toute heure, puisqu'il augmente de 15° ou d'une heure en une heure *sidérale* de temps. En une heure de temps moyen, son augmentation est 1,000273 plus grande.

Soit à calculer le passage d'une étoile au méridien.

On fait la différence $\mathrm{R} - \mathrm{T}$; on ajoute au besoin 24 heures pour la rendre positive; on trouve ainsi *en temps sidéral* l'intervalle qui s'écoule entre le midi moyen et le prochain passage au méridien. Pour avoir cet intervalle en temps moyen, on multiplie par $0{,}99727 = 1 - 0{,}00273$.

En fait comme rien n'indique dans le ciel le Soleil moyen, c'est le calcul inverse qu'on utilise; c'est d'après les temps de passage des étoiles au méridien qu'on règle les horloges en temps moyen (voir mon *Cours de Chronométrie*).

La connaissance du *temps sidéral* permet de résoudre les problèmes suivants.

Trouver quelle est la hauteur d'un astre à un instant donné.

Trouver à quelle heure se lève une étoile pour un certain jour, ou inversement quel jour une étoile se lève à une certaine heure.

Plus généralement trouver quelles sont les étoiles qui sont à la même hauteur sur l'horizon à un moment quelconque.

Trouver les étoiles qui sont simultanément dans un même vertical.

Trouver quel jour une étoile cesse de paraître le soir après le coucher du Soleil (coucher héliaque). On admettra qu'elle s'aperçoit sur l'horizon du côté du couchant pourvu que le Soleil soit à 12° au-dessous de l'horizon.

Même problème pour le lever. Pour que l'étoile soit visible à l'horizon, c'est-à-dire au moment de son lever réel, on admettra que le Soleil doit être à 12° au-dessous de l'horizon. Ce nombre de 12° ne convient qu'aux étoiles de 1re grandeur (Sirius); il est naturellement fort arbitraire.

4° — Avant de quitter ces notions, je reviens encore une fois sur leur rôle, sachant par expérience tout ce que le débutant éprouve de peine à comprendre ce qu'est *le temps moyen*, précisément parce qu'il n'y a rien à comprendre, mais qu'on enseigne comme si c'était horriblement difficile.

Notre étalon de durée est *le jour sidéral* : nous n'en avons pas d'autre. C'est sur les étoiles, c'est-à-dire sur la rotation de la Terre que nous réglons nos horloges. Rien ne nous empêche de prendre une nouvelle unité de temps qui soit avec la première dans tel rapport conventionnel qu'il nous plaît. Par exemple, nous prenons pour unité un nouveau jour que nous appelons *jour de temps moyen*, qui est au jour sidéral comme 1 : 0,99727.

A la seule condition de préciser qu'à telle date, telle étoile passe conventionnellement au méridien de tel lieu, à $0^h\ 0^m\ 0^s$ de notre nouveau système, tout est connu et d'une manière rigoureuse, puisque ce n'est qu'une définition ou, si l'on veut, un changement de variable.

Il est clair qu'un tel changement n'a d'intérêt que s'il amène une simplification dans l'étude des phénomènes importants. Nous n'aurions évidemment aucun avantage à quitter le jour sidéral comme unité de temps, pour prendre *arbitrairement* un nouveau jour *quelconque*.

Nous choisissons notre nouveau jour de manière qu'en *moyenne* il soit le plus possible égal au jour solaire.

Toutefois, et je prie le lecteur de méditer ce point, si nous nous trompons sur la valeur de ce jour défini comme il vient d'être dit, il n'en résulte absolument rien d'incorrect sur la mesure du temps. Il en résulte seulement qu'au bout d'un nombre très grand d'années, il se produira un petit décalage *moyen* entre notre Soleil moyen et le Soleil vrai.

Le lecteur se rappellera donc *qu'au point de vue bien déterminé de la mesure du temps, le jour moyen est purement et simplement une unité arbitrairement choisie qui est au jour sidéral dans le rapport* 1 : 0,99727.

Conventions horaires.

134. Jour civil, jour astronomique

1. — Il est naturel de prendre pour origine du jour l'instant où le Soleil moyen passe au méridien. Même dans cette hypothèse simple, il existe deux manières de compter le jour. Les civils mettent son commencement à minuit, les astronomes le mettent à midi, *12 heures plus tard*. Tous aujourd'hui comptent ou sont censés compter les heures de 0 à 24.

Précisons par un exemple.

Le 3 juillet civil commence à minuit; de minuit à midi (12 heures), les astronomes sont encore le 2 juillet. Le 3 juillet civil à 9 heures du matin, les astronomes comptent 2 juillet 21 heures.

La règle suivante évite toute erreur. Si le temps civil est exprimé en heures *du soir*, il suffit de supprimer le mot soir pour avoir le temps astronomique. Si le temps civil est exprimé en heures *du matin*, il faut retrancher un jour à la date et ajouter 12 heures pour avoir le temps astronomique.

Reprenons le nombre donné au § 111 pour l'équinoxe de printemps. *Pris dans la Connaissance des Temps, il est compté suivant la convention astronomique.* Le 21 mars $5^h\ 1^m$ signifie que le phénomène a lieu $5^h\ 1^m$ après le midi moyen du 21 mars civil; il se produit donc à $5^h\ 1^m$ du soir du temps civil ou à $17^h\ 1^m$ du 21 mars civil compté de 0 à 24.

Effectivement reportons nous à l'*Annuaire du Bureau des Longitudes où est utilisé le temps civil.*

Nous trouvons que les ascensions droites solaires sont :

Le 21 mars à midi moyen.	$23^h\ 59^m$
Le 22 — —	0 3

Par interpolation et *à l'approximation de ces données*, l'ascension droite est nulle un quart de jour après le midi moyen du 21 mars, c'est-à-dire le 21 mars à 6 heures du soir, ou encore à 18 heures civiles.

On s'est demandé si les astronomes ne pourraient pas compter comme les civils; ils répondent qu'un changement de date au milieu de leurs séances d'observation qui comprennent ordinairement le milieu de nuit, serait un ennui et une cause d'erreur.

Cela n'a du reste aucune importance.

2° — Si l'on prenait pour origine des jours en chaque lieu le temps de passage du Soleil moyen au méridien de ce lieu, seuls les lieux de même longitude auraient la même heure; d'où une extrême diversité des heures et une impossibilité pratique pour le fonctionnement des chemins de fer, des postes et des télégraphes.

Chaque pays a donc choisi une heure conventionnelle unique.

Pendant longtemps l'heure légale française fut déterminée par le passage du Soleil moyen au méridien de Paris.

A Besançon, par exemple, dont la longitude par rapport à Paris est orientale et de 3° 39′ (en temps $14^m\ 36^s$), le midi légal est alors en retard sur le midi moyen de 14 minutes 36 secondes.

A Brest, dont la longitude est occidentale et de 6° 50′ (en temps $27^m\ 20^s$), le midi légal est alors en avance sur le midi moyen de 27 minutes 20 secondes.

135. Fuseaux horaires. Temps légal.

1° — Ce système national présentait de graves inconvénients pour le service télégraphique international et pour les horaires de chemins de fer. Il a été remplacé par le système des *fuseaux horaires*.

On convient d'adopter pour méridien origine celui de l'observatoire de Greenwich. On découpe la Terre en 24 fuseaux horaires de 15° chaque, ayant comme plans bissecteurs les méridiens, dits *normaux*, de longitudes $L = 0°, 15°, 30°, 45°, \ldots$ degrés par rapport à Greenwich.

Chaque fuseau contient tous les points de longitudes $L \pm 7° 30'$.

On pose qu'il n'existera plus comme heures légales que celles des méridiens normaux; ce qui revient à dire que les heures légales de tous les lieux seront l'heure de Greenwich plus ou moins un nombre entier d'heures. Chaque pays déclare à quel fuseau il choisit d'appartenir : c'est généralement celui qui contient sa capitale.

Dans chaque fuseau l'écart entre l'heure *moyenne* locale et l'heure légale est au plus de 30 minutes.

La correction est un entier positif de 1 à 11 pour les fuseaux à l'est du fuseau central (Greenwich, Europe occidentale); c'est un nombre négatif de 1 à 11 pour les fuseaux à l'ouest de Greenwich.

Voici quelques nombres pour fixer les idées : il faut les ajouter algébriquement à l'heure de Greenwich :

Angleterre, Portugal, Espagne,... (Europe occidentale).	0
Belgique, Hollande, Suisse, Italie, Allemagne, Norvège, Suède, Autriche-Hongrie, Serbie (Europe centrale). .	+ 1
Turquie, Bulgarie, Égypte (Europe orientale)	+ 2
Aden.	+ 3
Australie, Chine (côtes).	+ 8
Japon	+ 9
Nouvelle-Zélande	+11
Brésil (côtes).	— 2
Chili, New-York	— 5
Californie	— 8
Alaska.	— 9

2° — Système français.

Nos pontifes, toujours à plat ventre devant l'étranger quand il s'agit

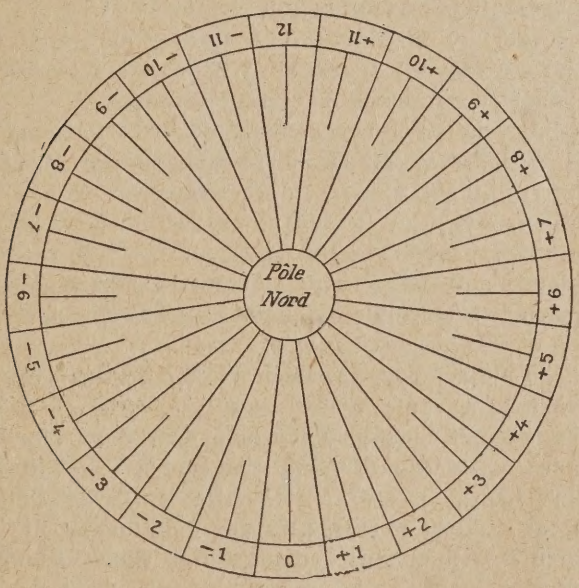


Fig. 113.

de récolter des croix ou des sous, font de temps en temps du nationalisme bête pour essayer de balancer leur platitude habituelle. Ne croyez donc pas que la France a tout bonnement choisi le fuseau de Greenwich. Elle a pompeusement déclaré que l'heure légale en France et en Algérie serait celle de temps moyen pour Paris, retardée de $9^m\ 21^s$.

Comme la longitude de Greenwich par rapport à Paris est de $9^m\ 20^s,9$, cela revient pratiquement à prendre l'heure de Greenwich.

Mais, par Zeus! nous n'abandonnons pas notre méridien!

L'honneur est sauf!..... On met son honneur où l'on peut!

Il résulte de là, par exemple, qu'au 1er janvier 1915, le Soleil vrai est passé au méridien de Paris à $11^h\ 53^m\ 58^s$ (temps légal), ce qui donne $12^h\ 3^m\ 19^s$ (temps moyen).

L'équation du temps est $3^m\ 19^s$, comme nous l'avons déjà dit.

Voici les corrections pour les colonies françaises.

Guyane, St-Pierre et Miquelon	— 4
Sénégal, Guinée	— 1
Côte d'Ivoire, Dahomey, Maroc	0
Tchad, Tunisie	+ 1
Madagascar, côte des Somalis	+ 3
Indochine	+ 7
Nouvelle-Calédonie	+11

3° — Remarque.

En fait d'heures tous les systèmes ont leurs avantages et leurs inconvénients; il s'agit non pas de récriminer contre ce qui est, mais de se rendre compte de ce qu'il a de fâcheux. Il est incontestable que nous avons une tendance invincible à retarder les diverses occupations de l'existence (repas, lever, coucher...) au point que les repas finissent au cours des siècles par se substituer les uns aux autres, le déjeuner devenant dîner, le dîner souper,.... Nous nous levons très tard, nous nous couchons très tard, de manière à n'utiliser que fort mal la lumière que le Soleil nous dispense généreusement. Sous ce rapport voyons pour quels lieux l'heure légale aggrave cette déperdition.

Raisonnons d'abord comme si l'heure légale était le temps moyen de Paris.

Si nous habitons Nancy et sortons du lit à 8 heures (temps légal), c'est effectivement à $8^h\ 16^m$ (temps moyen de Nancy) que nous nous levons : c'est un quart d'heure de jour de perdu. Si nous habitons Brest et sommes aussi paresseux, c'est effectivement à $7^h\ 33^m$ (temps moyen de Brest) que nous nous levons. Par rapport à Nancy nous gagnons 43 minutes de jour. Le transport du méridien de Paris à Greenwich (c'est-à-dire au Mans), aggrave la situation de Nancy, diminue l'avantage de Brest.

Mais le temps vrai peut différer du temps moyen de 15 minutes; nous levant toujours à 8^h de temps légal à Nancy, nous finissons par sortir du lit à 8 heures 40 minutes, temps vrai de Nancy. Cet exemple montre clairement la perte sèche qui résulte en gaz ou électricité de la situation d'une ville *à l'est* du méridien qui définit l'heure.

Pour prendre un autre exemple, quand avant 1911 l'heure légale française était celle de temps moyen de Paris, Tunis avait l'heure de Paris. C'était très gênant; cela devint insupportable quand la France prit le méridien de Greenwich : Tunis en profita pour avancer son temps d'une heure entière.

Contre la tyrannie de l'heure légale, rien à faire, précisément parce qu'elle règle les repas qui sont les divisions naturelles du jour civil. Le seul palliatif est de changer l'heure en été et de poser qu'onze heures s'appellera midi. On décale ainsi le jour d'une heure en avançant toutes les pendules. Nous assistons périodiquement à cette modification des heures; le seul résultat incontestable de la réforme est de montrer à tout le monde que l'heure est chose relative dans l'état actuel de notre civilisation. Assurément les savants n'en doutaient pas, puisque, depuis l'introduction des heures légales, autant dire personne n'utilise le temps moyen du lieu qu'il habite.

Le temps moyen a été introduit en France vers 1816 pour les horloges publiques parisiennes, à la grande joie des horlogers qui n'eurent plus à expliquer pourquoi leurs montres ne marchaient pas comme le Soleil.

136. **Problème du « Tour du monde en 80 jours ».**

Résolvons ce facile mais très intéressant problème qui a servi de base au *Tour du monde en 80 jours* de Jules Verne.

1° — Un voyageur doit faire le tour du monde en 80 jours. Pour simplifier nos calculs mettons qu'il doit faire le tour du monde en 90 jours *apparents* avec un déplacement uniforme en longitude. C'est donc de 4° de longitude qu'il doit se déplacer par jour; si son voyage doit s'effectuer sur l'équateur, la distance à parcourir est de 444 kilomètres environ par jour *apparent*, c'est-à-dire entre deux midis moyens des lieux où il se trouve à midi.

Il part du méridien origine à midi moyen le 1er janvier 1915, et *va vers l'est*, c'est-à-dire en sens inverse du mouvement apparent solaire. Il est facile de voir que pour lui les jours moyens *apparents* auront, non plus 24 heures ou 1 440 minutes, mais 16 minutes de moins, soit 1 424 minutes.

En effet, par hypothèse, en un jour moyen le voyageur se déplace de 4°; le Soleil moyen n'a donc, pour le rencontrer, que 356° à parcourir. Comme il fait 1 degré en 4 minutes, c'est donc un raccourcissement de $4 \times 4 = 16$ minutes du jour moyen. Le jour moyen *apparent* vaut 16 minutes de moins que le jour moyen *vrai*. Donc pour faire le tour du monde en 90 jours *apparents*, le voyageur doit augmenter sa vitesse moyenne, s'il va vers l'est.

Après un tour complet il croira bien avoir vécu 90 jours; il a vu 90 fois le Soleil passer au méridien. Cependant, au calendrier du lieu de départ, il ne s'est écoulé que 89 jours. Sans s'en douter, notre voyageur a gagné 1 jour plein, en raison de la diminution de 16 minutes sur chacun des 90 jours apparents.

On a en effet : $16 \times 90 = 1\,440^{m} = 1$ jour moyen.

Il revient au méridien origine le 31 mars 1915 au lieu du 1er avril qu'il comptait revenir. A la condition donc qu'il ne perde en route qu'un peu moins d'un jour apparent, il gagne son pari. Et c'est justice

puisque, pour signifier quelque chose, ce pari implique qu'il fera le tour du monde en 1440×90 minutes de temps moyen.

2° — Supposons au contraire qu'*il parte vers l'ouest*, dans le sens du mouvement apparent solaire. Un raisonnement semblable au précédent, mais en sens inverse, prouve que son jour moyen est augmenté de 16 minutes; il vaut 1456 minutes de temps moyen. Le Soleil doit en effet parcourir 364° avant de retrouver notre voyageur qui se déplace, par hypothèse, de 4° entre chaque midi moyen des lieux où il se trouve à midi.

S'il ne prend pas garde à l'allongement apparent du jour (dont au surplus il peut profiter pour faire un peu plus de chemin), après avoir vu le soleil se lever 90 fois, il reviendra au méridien origine le 2 avril, 91 jours de temps moyen après son départ.

3° — Présentons le même raisonnement sous une forme saisissante. Supposons qu'on lui impose de faire le tour de la Terre en un jour de temps moyen.

S'il part à midi moyen vers l'ouest, il doit avoir constamment le Soleil moyen au méridien. Cependant, partant le 1er janvier, il reviendra le 2 au méridien origine.

S'il part vers l'est, il retrouve 12 heures après le Soleil à son méridien, lorsqu'il passe par la longitude 180°. Cependant il revient encore le 2 au méridien origine. Il a vécu 2 jours de 12 heures.

J'insiste parce que de tels problèmes se trouvent à tout bout de champ en Astronomie.

137. Où le jour change-t-il de nom?

1° — Nous voilà prêts à résoudre le problème : *Où le jour change-t-il de nom?* Car en définitive, si en cours de route Philéas Fogg avait regardé un calendrier, il n'aurait pas eu besoin de revenir à Londres pour savoir que son pari était gagné. Ces erreurs-là ne sont possibles que dans les romans.

Montrons d'abord comment le problème se rattache à la question des fuseaux horaires. Posons que le Soleil moyen est au méridien de Greenwich le vendredi 1er janvier 1915. Dans le fuseau de l'Europe centrale, premier fuseau à l'est de Greenwich, il est une heure de l'après-midi du vendredi 1er janvier, et ainsi de suite. Dans le onzième fuseau, il est 11 heures du soir. Enfin, dans le douzième dont le méridien normal a pour longitude 180° E., il est minuit vendredi 1er janvier, c'est-à-dire 0 heure du samedi 2 janvier.

Dans le premier fuseau à l'ouest de Greenwich, il est 11 heures du matin du vendredi 1er janvier 1915, et ainsi de suite. Dans le douzième dont le méridien normal a pour longitude 180° O., il est 0 heure vendredi 1er janvier.

Mais ces deux douzièmes fuseaux constituent le même fuseau. Donc, suivant que nous comptons d'une manière ou d'une autre, nous aurons

pour les mêmes lieux deux dates qui diffèrent exactement d'un jour.

Il est fort heureux que ce fuseau soit à peu près tout entier en pleine mer, sauf une partie qui contient la Nouvelle-Zélande.

De quelque façon que nous prenions le problème, il existe donc une ligne idéale conventionnelle où nécessairement le jour doit changer de nom.

2° — Cette ligne fut imposée par l'histoire.

Les Portugais et les Hollandais firent les premiers le tour de la Terre en allant vers l'est, c'est-à-dire en passant par le Cap. Les Espagnols firent ce tour en allant vers l'ouest, c'est-à-dire en passant par le détroit de Magellan. Chaque nation conservant sa manière de compter, il en est résulté que l'île Formose, jadis colonie hollandaise, eut un lundi à son calendrier le jour où les îles Mariannes, relativement peu distantes, recevaient des Espagnols un dimanche.

Il est résulté des circonstances historiques une ligne conventionnelle voisine du méridien 180°, de part et d'autre de laquelle les calendriers diffèrent d'un jour. Fort heureusement cette ligne ne coupe aucun territoire habité, la Nouvelle-Zélande suivant le sort de l'Australie qui en est à l'ouest.

Quand les navires traversent la ligne de l'ouest à l'est comme Philéas Fogg, ils doublent le jour; s'ils vont de l'est à l'ouest, ils sautent un jour.

Le vendredi à 0^h 1er janvier 1915 pour Greenwich, il est vendredi 1er janvier à l'est de Greenwich jusqu'à cette ligne de démarcation; il est jeudi 31 décembre 1914 à l'ouest de Greenwich jusqu'à la même ligne.

CHAPITRE V

CADRANS SOLAIRES. — CALENDRIERS

Cadrans solaires.

138. **Définition. Cadrans équatoriaux et polaires.**

1° — Le *cadran solaire* est un instrument donnant l'*heure vraie* par la position de l'ombre d'une tige *parallèle à l'axe du monde*. En cela il diffère du *gnomon* dont le style est vertical. La tige produit à travers la lumière solaire un mince plan d'ombre qui matérialise les cercles horaires dans lesquels se trouve successivement le Soleil. Construire un cadran solaire consiste à choisir un plan P de projection sur lequel on détermine les traces des plans horaires qui sont à 1, 2, 3, 4,... heures du méridien, c'est-à-dire qui font avec le méridien des angles de 15°, 30°, 45°..., de part et d'autre de ce plan.

Pour un angle horaire donné, la déclinaison du Soleil influe sur la longueur de l'ombre : elle ne modifie pas sa position. Le cadran solaire fournit donc (aussi exactement que le permet la netteté des ombres) l'heure solaire *vraie* pour tous les jours de l'année : il ne peut être suppléé par les horloges qui indiquent le temps moyen.

A la vérité les cadrans solaires ne donnent pas l'heure; en effet s'il est loisible de compter les angles horaires *en temps*, à raison de 15° à l'heure, la vitesse angulaire du Soleil ne restant pas absolument constante, l'ombre ne met pas toujours le même temps à balayer le même nombre de degrés.

Il est donc bien entendu que les cadrans solaires déterminent uniquement l'angle que fait avec le méridien le plan horaire dans lequel se trouve actuellement le Soleil. On énonce cet angle en temps, mais on n'oubliera pas qu'en toute rigueur ce temps demande une correction pour être pris dans le sens usuel du mot. Du reste la correction est inutile à la précision ordinaire des cadrans solaires.

2° — Cadrans équatoriaux ou équinoxiaux.

Ce sont les cadrans les plus simples : le plan de projection P est normal au style, conséquemment parallèle à l'équateur. Les droites horaires sont angulairement équidistantes; elles font des angles de 15, 30,... degrés de part et d'autre de la trace du méridien. Le cadran doit avoir deux faces; elles servent l'une ou l'autre suivant que le Soleil est dans l'hémisphère boréal ou dans l'hémisphère austral. Lors des équinoxes le cadran devient inutilisable, le Soleil n'en éclairant nettement ni l'une ni l'autre face. Comparez aux armilles, § 127.

3° — Cadrans polaires.

Le plan de projection PP est perpendiculaire au méridien et parallèle à la ligne des pôles.

Le style T, parallèle au plan PP en est à la distance δ.

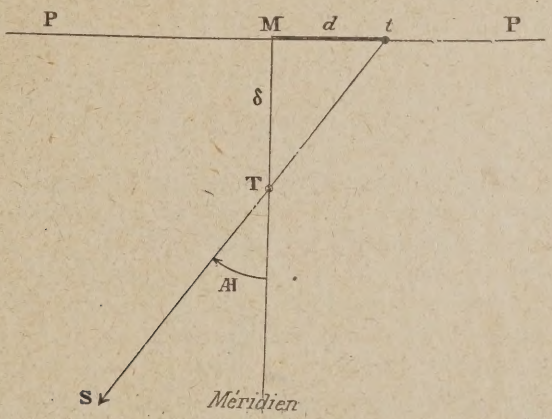


Fig. 114.

Vu la distance du Soleil à la Terre, on peut admettre qu'il tourne autour de T. Les traces t des plans horaires Tt menés par le style sont des droites parallèles.

Leur distance d à la trace M du méridien (droite de midi) est :

$$d = \delta . \operatorname{tg} H.$$

139. Longueur des ombres dans le cas général.

1° — Déterminer la courbe décrite journellement sur le plan P par l'ombre Q' d'un point Q du style, et ses variations au cours d'une année, est un excellent exercice qui amène le débutant à préciser ses idées.

La déclinaison pouvant être considérée comme invariable pendant un jour, les droites qui vont du point Q au centre du Soleil forment un cône de révolution dont le demi-angle au sommet est le complément de la déclinaison actuelle D. D'où résulte que la courbe diurne décrite

par le point Q′ est toujours une section conique, intersection du cône par le plan P.

Elle varie d'un jour à l'autre.

Le cône se réduit à un plan aux équinoxes (D = 0).

2° — Cadrans équatoriaux et polaires.

Dans le cadran solaire *équatorial*, le plan P est normal à l'axe du

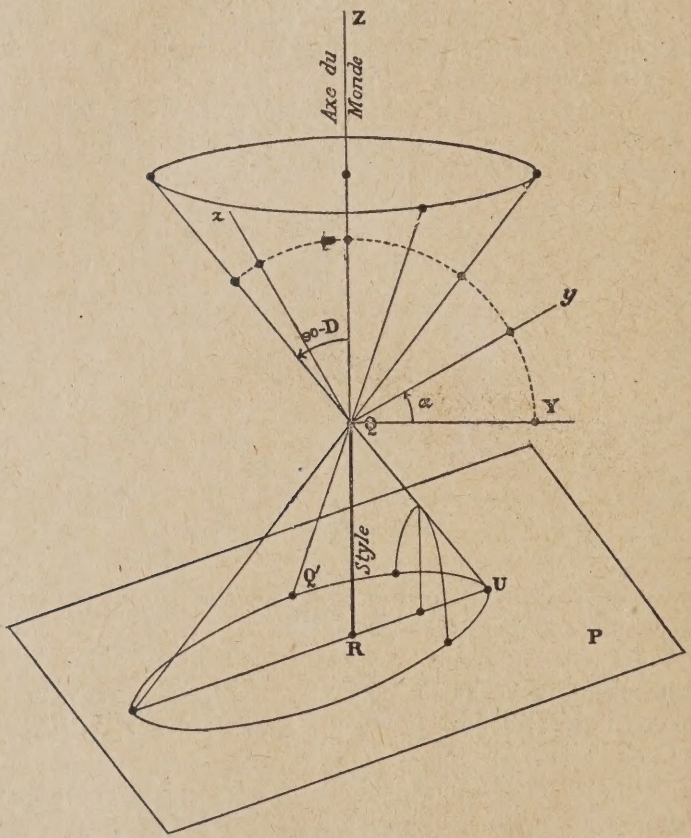


Fig. 115.

cône; la trajectoire diurne de l'ombre Q′ est un arc de cercle de rayon ρ :

$$\rho = \delta \operatorname{cotg} D ;$$

δ est la longueur $\overline{QR}$ du style (fig. 115).

ρ devient infini aux équinoxes.

Dans le cadran solaire *polaire*, le plan P est parallèle à l'axe du cône : la trajectoire diurne est une hyperbole qui se réduit à une droite horizontale aux équinoxes.

Sur le plan P prenons cette droite pour axe des x; prenons la trace du méridien zOy pour axe des y. Soit Δ la distance $\overline{QO}$ du point Q qui porte ombre au plan P (xOy) de projection.

On vérifie aisément que l'hyperbole a pour équation :

$$y^2 - x^2 \operatorname{tg}^2 D = \operatorname{tg}^2 D.$$

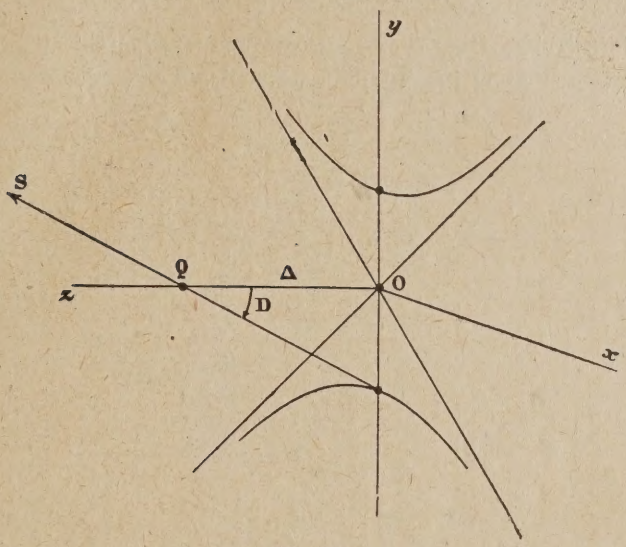


Fig. 116.

On obtient les deux branches de la même hyperbole pour $\pm D$; l'un correspond à $+D$, l'autre à $-D$.

3° — ÉQUATION DU CÔNE ET DE SES SECTIONS PLANES.

Utilisons les figures 115 et 117.

Le cône d'axe QZ et de demi-angle au sommet $90 - D$, a pour équation :

$$Y^2 + x^2 = \operatorname{cotg}^2 D.\ Z^2.$$

Changeons le système d'axes YQZ en le système yQz qui fait avec lui l'angle α.

On a : $Y = y\cos\alpha - z\sin\alpha$, $Z = y\sin\alpha + z\cos\alpha$.

L'équation du cône devient :

$$(y\cos\alpha - z\sin\alpha)^2 + x^2 = \operatorname{cotg}^2 D\ (y\sin\alpha + z\cos\alpha)^2.$$

On veut l'intersection par un plan parallèle à yQx' tel que sa distance à yQx mesurée suivant l'axe du monde égale la longueur δ du style. On prend le pied R du style pour nouvelle origine des coordonnées.

Il faut poser $\overline{QU} = z = -\delta\cos\alpha$, et remplacer y par $y - \delta\sin\alpha$.

L'équation de l'intersection est :

$$y^2 \cos^2\alpha + x^2 = \operatorname{cotg}^2 D\,(y \sin\alpha - \delta)^2.$$

Dans les cas traités ci-dessus on a :

Cadran équatorial $\alpha = 0$, $y^2 + x^2 = \delta^2 \operatorname{cotg}^2 D$.
Cadran polaire $\alpha = 90°$, $x^2 \operatorname{tg}^2 D = (y - \delta)^2$.

Cette dernière équation représente évidemment deux droites puisque nous coupons le cône par un plan passant par son axe; pour obtenir

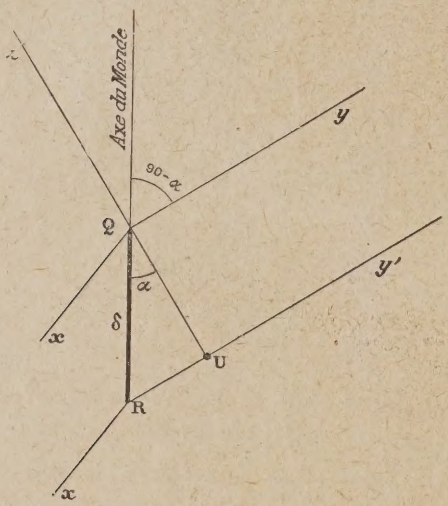


Fig. 117.

l'hyperbole convenable, il faut couper par un plan parallèle à l'axe du cône (voir plus haut). Le lecteur remarquera que les termes du second degré sont identiques dans cette équation et dans celle trouvée plus haut, ce qui est évident *a priori*.

140. Cadrans horizontaux.

1° — La figure 118 montre l'horizon, le style CS.
Le tableau est pris pour méridien.
Dans le triangle rectangle SNA, on a :

$$\operatorname{tg}\alpha = \sin\lambda \,.\, \operatorname{tg} H, \qquad (1)$$

qui donne l'angle α de la méridienne CN avec les traces CA des plans horaires, en fonction des angles horaires H, par suite en fonction de ce que nous appelons l'heure solaire vraie; λ est la latitude du lieu (hauteur du pôle au-dessus de l'horizon).

La formule (1) se construit aisément (fig. 119).

Sur la méridienne $\overline{CN}$, prenons deux longueurs $\overline{CN}$, $\overline{ON}$, telles qu'on ait : $\overline{ON} = \overline{CN}.\ \sin\lambda.$

Joignons C et O à un point quelconque A de la perpendiculaire TNT

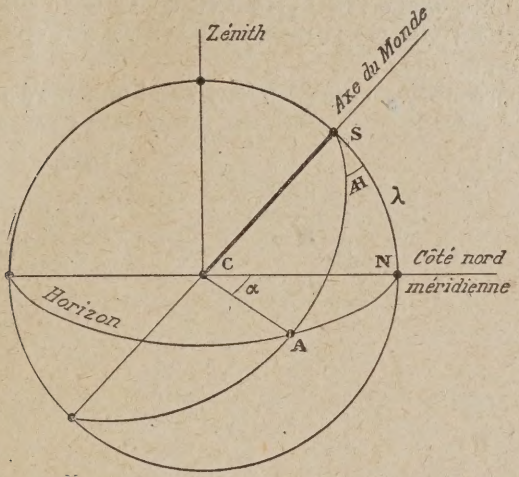


Fig. 118.

menée sur CN : les angles α et H sont évidemment reliés par la formule (1).

Pour trouver les droites qui correspondent aux diverses heures, on

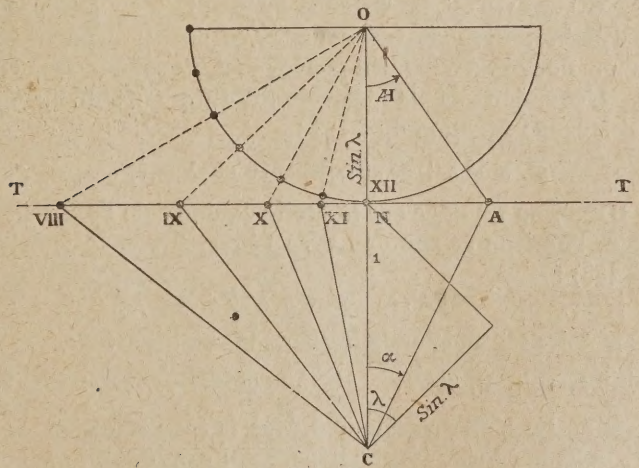


Fig. 119.

divise le cercle de centre O et de rayon $\overline{ON}$ en 24 parties, on mène les rayons correspondants, enfin on joint le point C à leurs points d'intersection avec TT.

Pour plus de solidité, on utilise parfois une lame métallique fixée normalement sur le point du cadran dans le méridien (fig. 120). L'angle λ est égal à la latitude.

2° — L'étude de la trajectoire Q′ de l'ombre d'un point Q du style nous ramène au gnomon (§ 99) : il est clair qu'elle ne dépend pas de la disection du style; elle est la même que le style soit vertical ou dirigé suivant l'axe du monde.

Nous devons couper par un plan horizontal un cône d'axe parallèle à

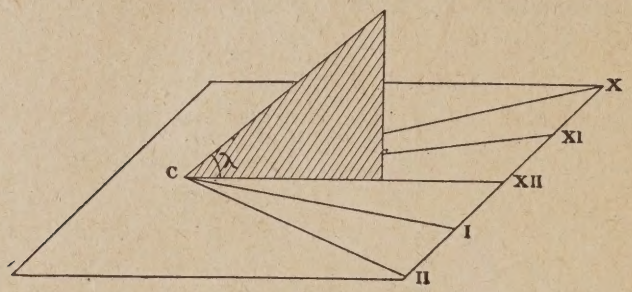


Fig. 120.

l'axe du monde et dont le demi-angle au sommet est le complément de la déclinaison.

A l'équinoxe, le cône s'évanouit en un plan : la trajectoire est une droite.

Posons $\overline{CQ} = \delta$; c'est la distance au point C du point Q dont on cherche l'ombre. Prenons CN comme axe des y; comme axe des x, prenons une horizontale passant par le point C et située dans le premier vertical. L'équation de la trajectoire diurne s'obtient en posant $\alpha = 90 - \lambda$ dans l'équation du § 139 :

$$y^2 . \sin^2\lambda + x^2 = \operatorname{cotg}^2 D\,(y\cos\lambda - \delta)^2. \qquad (1)$$

Pour $D = 0$, on retombe sur la droite équinoxiale : $y = \delta : \cos\lambda$.

Au pôle, l'horizon se confond avec l'équateur, la trajectoire est un cercle (§ 138) :

$$\lambda = 90°, \qquad x^2 + y^2 = \delta^2 \operatorname{cotg}^2 D.$$

La trajectoire est une parabole quand la condition :

$$\sin^2\lambda = \operatorname{cotg}^2 D . \cos^2\lambda, \qquad \operatorname{tg}^2\lambda = \operatorname{cotg}^2 D, \qquad \lambda_0 + D = 90°,$$

est satisfaite. Ce n'est possible que dans la zone glaciale.

Pour $\lambda < \lambda_0$, la courbe est une hyperbole; c'est une ellipse pour $\lambda > \lambda_0$.

En définitive dans les zones tempérées les arcs diurnes sont toujours des hyperboles.

A midi vrai la longueur de l'ombre est :

$$x = 0, \qquad y = \frac{\delta\cos D}{\cos(\lambda - D)} \qquad (2)$$

141. Cadrans verticaux.

Je n'étudierai pas le cas général des cadrans solaires qui est de nul intérêt; je me borne à supposer le mur de projection *vertical*, ce qui est le cas usuel.

Appelons β l'angle que fait le mur avec le méridien. On a :

$$\cotg\alpha . \cos\lambda = -\cos\beta . \sin\lambda + \sin\beta . \cotg H. \qquad (2)$$

1° — PREMIER VERTICAL.

Le mur se confond avec le premier vertical. On a $\beta = 90°$.

La formule (2) devient :

$$\tg\alpha = \cos\lambda . \tg H. \qquad (3)$$

C'est la formule (1) où λ est remplacé par son complément (ce qui

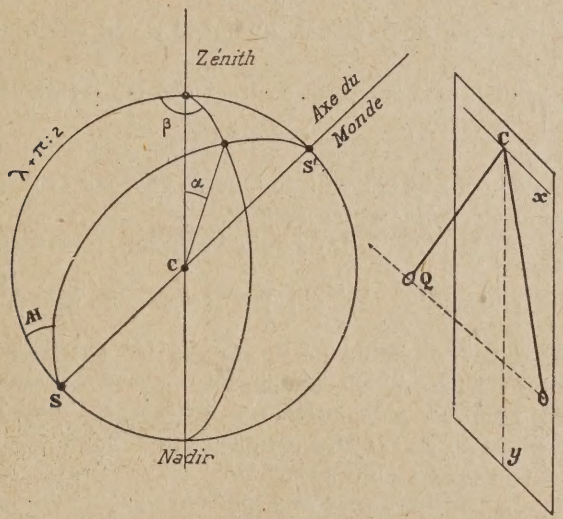


Fig. 121.

est évident *a priori*). La construction précédemment donnée peut encore servir. Les droites horaires sont symétriquement placées par rapport à la verticale (qui dans tous les cas correspond à midi).

La droite de 6 heures est horizontale.

L'heure ne peut être marquée que si le Soleil est en avant du mur, c'est-à-dire se trouve entre le premier vertical et le méridien. Il sert entre 6 heures du matin et 6 heures du soir à l'équinoxe, c'est-à-dire pendant 12 heures. Entre l'équinoxe de printemps et l'équinoxe d'été, le temps utile est plus petit; il se réduit à 9 heures pour Paris au solstice d'été. En hiver le Soleil éclaire le mur tout le temps qu'il est au-dessus de l'horizon.

Dans les traités de *Gnomonique*, fort en honneur il y a deux siècles, les auteurs distinguent le cadran *méridional* (le mur est exposé au midi)

du cadran *septentrional* (le mur est exposé au nord); un cadran n'indiquant que les premières et dernières heures du jour *en été seulement*, n'est pas d'une grande utilité.

Prenons pour axe des y, la verticale dirigée vers le bas et pour axe des x l'horizontale passant par le pied C du style.

La trajectoire de l'ombre d'un point Q au style tel que $\overline{CQ} = \delta$ s'obtient en faisant $\alpha = \lambda$ dans l'équation du § 138 :

$$y^2 \cos^2 \lambda + x^2 = \operatorname{cotg}^2 D \, (y \sin \lambda - \delta)^2.$$

La droite équinoxiale est $y = \delta : \sin \lambda$.

La longueur de l'ombre à midi est :

$$y = \frac{\delta \cos D}{\sin (\lambda - D)}.$$

Elle devient infinie pour $\lambda = D$, quand le Soleil passe au zénith du lieu d'observation.

La méridienne de temps moyen se trace comme il sera expliqué plus loin.

2° — MÉRIDIEN.

Dans un second cas intéressant, le mur se confond avec le méridien : le cadran est dit *oriental* ou *occidental*.

Faisons $\beta = 0$; la formule (2) semble ne plus rien donner; elle se réduit à :

$$\operatorname{cotg} \alpha . \cos \lambda = - \sin \lambda ; \qquad \operatorname{cotg} \alpha = - \operatorname{tg} \lambda ;$$

H a disparu; la direction α, invariable, est parallèle à l'axe du monde. Effectivement la construction est impossible quand le style est *dans* le mur; elle redevient possible et intéressante quand le style est fixé *parallèlement* au mur, à une distance *non nulle* Δ.

Considérons le cas du cadran *oriental*.

En vertu des principes généraux, nous avons à déterminer les intersections du plan vertical P avec des plans passant par une parallèle à P.

Soit CS la projection verticale du style; c'est l'ombre du style pour six heures du matin. D'une manière générale on aura :

$$\overline{CA} = \Delta . \operatorname{tg} H ;$$

l'angle horaire est compté à partir de six heures du matin.

Pour construire les droites horaires, on utilise le cercle OC du rayon $\overline{OC} = \Delta$, et dont le centre est sur la droite CS.

Même théorie pour le cadran *occidental*. Ils ne peuvent servir, le premier qu'avant midi, le second après midi; à midi l'ombre passe à l'infini. Les droites horaires sont symétriquement placées par rapport à 6 heures.

Le calcul de la trajectoire de l'ombre d'un point Q s'effectue comme pour le cadran polaire. On trouve les hyperboles :

$$y^2 - x^2 \operatorname{tg}^2 D = \Delta^2 \operatorname{tg}^2 D.$$

La droite équinoxiale est $y = 0$.

La longueur de l'ombre à six heures est $y = \Delta \operatorname{tg} D$; elle est comptée à partir de la projection du point Q sur le plan P.

3° — Dans le cas général, on dit que le cadran est *irrégulier* ou *déclinant*, *déclinant* parce que l'angle β est quelconque, *irrégulier* parce que les traits ne sont plus symétriquement distribués.

Pour déterminer les droites horaires, le plus simple est d'utiliser la formule (2), après avoir mesuré par un procédé quelconque les angles β

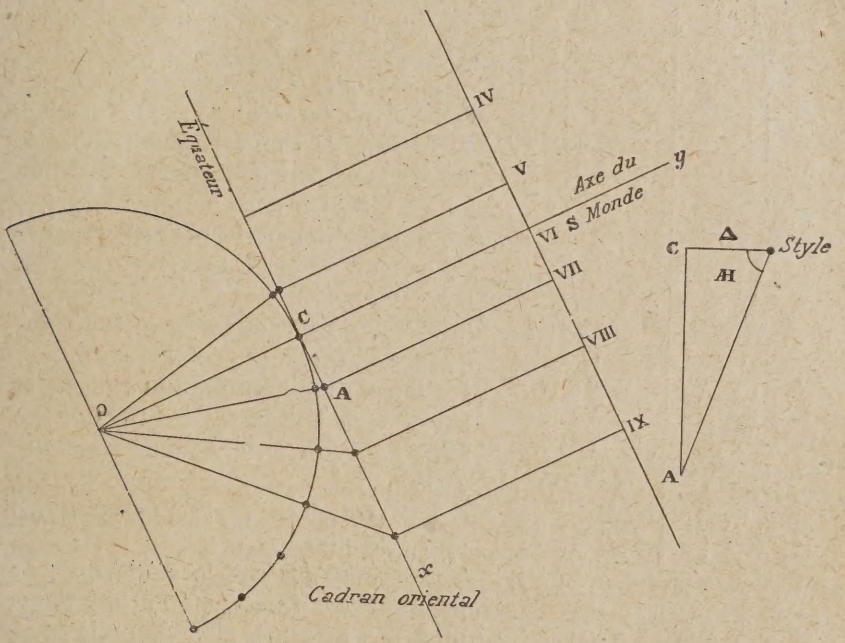


Fig. 122.

et λ. Au reste les cadrans solaires ne sont plus que des objets de curiosité d'importance pratique nulle; *ils conservent une importance pédagogique considérable, à la condition de ne pas raser les étudiants avec des cas généraux sans intérêt éducatif.* Je souligne, parce qu'il est des principes sur lesquels on ne saurait trop insister : quoi qu'on fasse, il restera toujours une armée d'imbéciles pour les méconnaître. Ces idiots croiront superbe de raconter à leurs élèves comment Ptolémée construisait le monde, ce qui est d'un intérêt nul *pour la majorité des hommes intelligents*; ils n'auront que mépris pour les cadrans solaires qui ne servent plus, c'est entendu, mais qui, outre leur rôle social évident pendant de longs siècles, sont un excellent exercice pour l'étudiant qui ne se complaît pas dans le bafouillage grandiloquent. Pour Dieu! commencez donc par savoir la théorie des cadrans solaires!

Vous parlerez ensuite de l'histoire des doctrines astronomiques, si ça vous amuse! Commencez donc par le commencement; c'est de beaucoup le plus difficile.

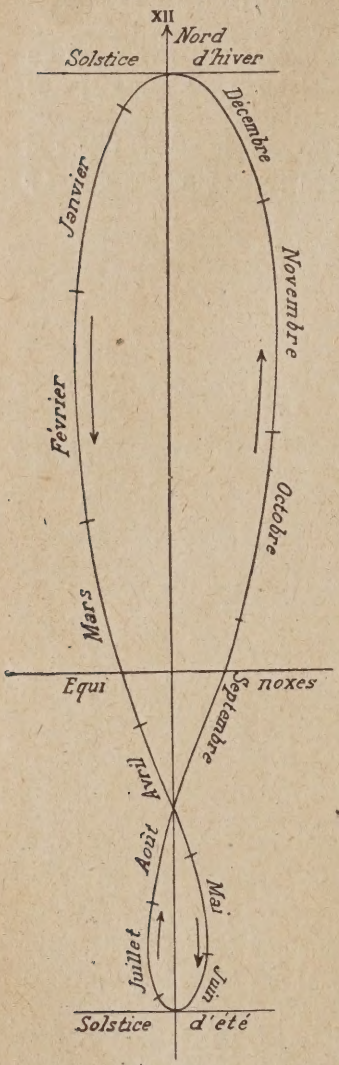


Fig. 123.

142. Méridienne de temps moyen. *1°* — Nous avons déjà remarqué que le cadran solaire donne non pas les heures, mais les angles horaires; l'expression qu'*il donne le temps vrai*, n'est exacte que dans ce sens.

Il peut être avantageux de lui faire indiquer le midi moyen. On appelle *méridienne de temps moyen* la courbe lieu des positions de l'ombre d'un point tous les jours à midi moyen : le Soleil moyen passe au méridien quand l'ombre passe sur la méridienne de temps moyen.

Il n'est possible de tracer cette courbe que si l'on connaît l'équation du temps, pratiquement si l'on possède une table analogue à l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* ou à la *Connaissance des Temps*.

Mais certaines propriétés générales sont évidentes.

Dans tous les cas la méridienne de temps moyen est un huit de chiffre plus ou moins déformé. Elle coupe la trace du méridien (méridienne vraie) en quatre points pour les dates qui correspondent à l'équation nulle (16 avril, 15 juin, 1er septembre, 25 décembre).

La courbe est nécessairement tangente aux courbes diurnes qui correspondent aux solstices.

Le point double du 8 correspond à deux dates pour lesquelles la déclinaison est la même et simultanément l'équation; cela arrive un peu avant le 16 avril et le 1er septembre. Le point double n'est donc pas exactement sur la méridienne vraie; mais il s'en faut de si peu qu'on l'y place généralement.

La méridienne de temps moyen n'est pas symétrique par rapport à la méridienne vraie, même dans les cas les plus simples.

On se rappellera que :

du 16 avril au 15 juin	le Soleil vrai avance sur le Soleil moyen.	
du 15 juin au 1er septembre	—	retarde —
du 1er septembre au 25 décembre	—	avance —
du 25 décembre au 16 avril	—	retarde —

On vérifie immédiatement que :

du 16 avril au 15 juin	la M de TM est à droite de la MV.	
du 15 juin au 1er septembre	—	à gauche —
du 1er septembre au 25 décembre	—	à droite —
du 25 décembre au 16 avril	—	à gauche —

Les généralités posées, pour ne pas faire de géométrie inutile, je me

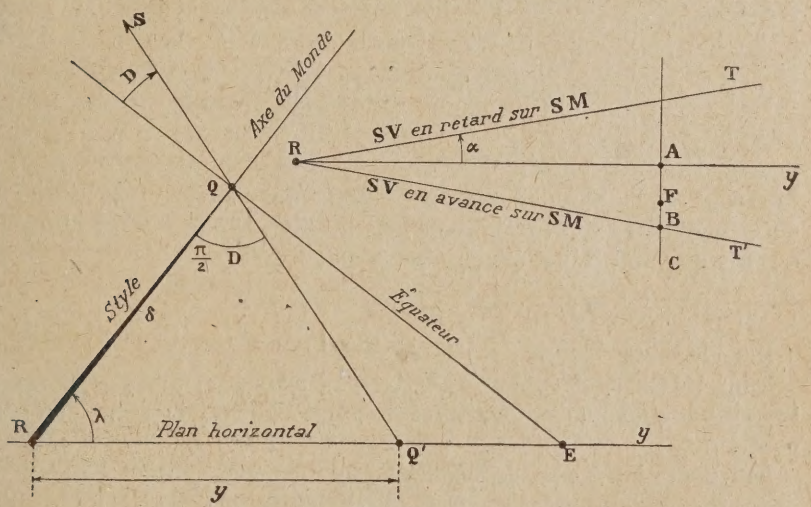


Fig. 124.

borne à quelques précisions dans le cas du cadran horizontal (*gnomon*) et du cadran vertical dont le plan de projection est le premier vertical normal au méridien.

2° — Considérons le cas d'un gnomon de style incliné.

Traçons la méridienne vraie Ry. Pour une déclinaison D, la longueur y de l'ombre à midi vrai est donnée par la formule (établie au § 140, mais évidente sur la figure 124) :

$$y = \frac{\delta \cos D}{\cos(\lambda - D)}. \qquad (1)$$

λ est la latitude du lieu. D est la déclinaison solaire, δ est la longueur du style.

Prenons dans la *Connaissance des Temps* les déclinaisons à midi vrai, par exemple pour les 1 et les 15 de chaque mois.

Calculons les y correspondants.

Menons par les points ainsi déterminés les perpendiculaires AC à la méridienne vraie Ry. Elles représentent les trajectoires de l'ombre du point Q *au voisinage du midi vrai.* Il est inutile de les prolonger guère au delà des droites T, T′, du plan horizontal, issues du point R, qui correspondent à $11^h\,45^m$ et $12^h\,15^m$.

L'angle α quelles font avec Ry, est donné par la formule :

$$\operatorname{tg}\alpha = \sin\lambda \,.\, \operatorname{tg} H, \qquad \text{pour } H = 15 \text{ minutes} = 3^\circ\,45'.$$

Pour aller plus loin, reportons-nous à la table de la *Connaissance des Temps* intitulé *Temps vrai à midi moyen.* Pour la date à laquelle correspond la droite AC, portons dans le sens convenable une longueur $\overline{AF}$ qui soit à $\overline{AB}$ comme l'avance du Soleil vrai sur le Soleil moyen est à 15 minutes. Par commodité on transformera cette avance en secondes; 15 minutes valent 900 secondes.

Par exemple, le 15 novembre 1915 à midi vrai la déclinaison est australe et égale à $18^\circ\,17'$. Le Soleil vrai est en avance sur le Soleil moyen de $15^m\,28^s = 928^s$. Soit AC la droite telle que $\overline{RA} = y$ soit la longueur de l'ombre pour la déclinaison choisie; soit RT′ la droite qui correspond à $12^h\,15^m$ vrai. Le point F est placé du côté indiqué, mais au delà du point B, de manière qu'on ait :

$$\overline{AF} : \overline{AB} = 928 : 900.$$

Dans la figure l'angle α est très exagéré.

Pour tracer la méridienne de temps moyen, on recommencera le travail pour un nombre suffisant de points qu'on joindra par un trait continu.

Les opérations sont les mêmes pour le cadran dont le plan de projection est le premier vertical, à la différence que les formules sont :

$$\operatorname{tg}\alpha = \cos\lambda \,.\, \operatorname{tg} H, \qquad y = \frac{\delta \cos D}{\sin(\lambda - D)}.$$

La figure 123 purement schématique montre l'aspect d'une méridienne de temps moyen horizontale.

143. Précision des indications des cadrans solaires.

Le cadran fournit l'angle horaire *apparent,* c'est-à-dire non corrigé de la réfraction. Pour un jour donné les temps qui s'écoulent entre les passages de l'ombre d'un trait au suivant, ne sont pas absolument égaux de ce chef : mais l'erreur est toujours négligeable à l'approximation des mesures.

D'un jour à l'autre le temps qui s'écoule entre le passage de l'ombre sur deux traits horaires consécutifs, ne reste pas absolument invariable

en raison de la variation de la longueur du jour vrai. Mais la différence entre les jours vrais extrêmes étant d'une cinquantaine de secondes de temps moyen, la différence des temps qui correspondent à la variation de 15° de l'angle horaire (heures vraies), est de l'ordre de 2 secondes au maximum. Deux secondes, un 1 800 centième de l'heure, sont une quantité absolument inappréciable au cadran solaire.

Dans les cadrans les plus précis, on termine le style par une plaque métallique percée d'un trou circulaire. L'indicateur est la tache lumineuse formée par les rayons qui traversent le trou. Les droites horaires passent par la trace, sur le plan de projection, d'une parallèle à l'axe du monde menée par le centre du trou. Il n'est plus alors indispensable que la tige de suspension matérialise l'axe du monde : la plaque peut être supportée par un système de tiges quelconques. On détermine l'heure en regardant sur quelle droite horaire se trouve le centre de la tache lumineuse sensiblement elliptique que forment les rayons admis par le trou.

144. Cadran cylindrique par les hauteurs.
Ce petit appareil est amusant et instructif.

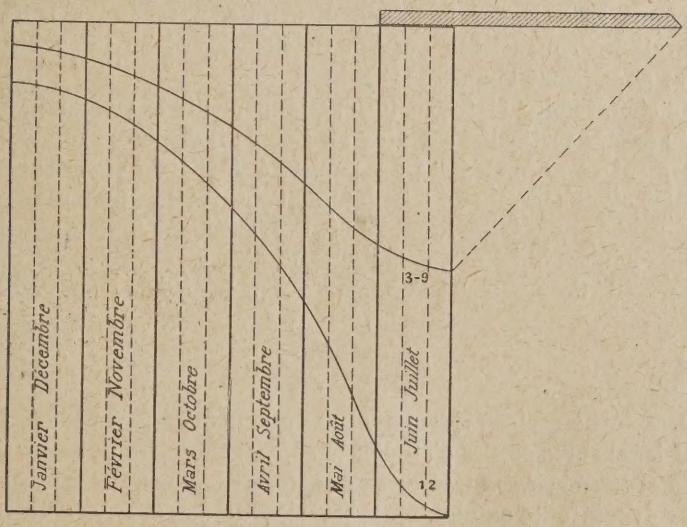


Fig. 125.

La distance zénithale du Soleil se calcule par la formule (§ 12) :

$$\cos z = \sin\lambda . \sin D + \cos\lambda . \cos D . \cos H.$$

Pour un lieu donné, pour un jour de date donnée (c'est-à-dire pratiquement pour une déclinaison donnée), la relation entre z et H est de la forme :

$$\cos z = a + b \cos H.$$

La longueur h de l'ombre d'un style horizontal de longueur δ est donnée par la formule : $h = \delta \operatorname{cotg} z$.

Pour un lieu et un jour donnés, nous pouvons donc calculer d'heure en heure la longueur de l'ombre. Réciproquement mesurant l'ombre, nous avons l'heure.

Ceci posé, choisissons un certain angle horaire H, prenons pour variable la déclinaison D, ou ce qui revient au même (grâce à un changement de variable) le nombre de jours qui séparent le jour considéré du solstice d'été (ou d'hiver). Nous pouvons calculer en fonction de ce nombre la longueur de l'ombre du style.

Le résultat des calculs pour divers angles horaires H se représente par des courbes telles que celles de la figure 125. Elles ne sont valables que pour la latitude λ choisie.

La courbe de 3 heures après midi est identique à la courbe de 9 heures du matin.

Collons le graphique obtenu sur un cylindre de bois ou de métal, normalement à l'axe duquel tourne le style. Quand le cylindre est librement suspendu, ses génératrices sont verticales; le style est horizontal.

Amenons le style sur la génératrice qui correspond à la date de l'observation. Tournons-le vers le Soleil; regardons où aboutit son ombre : nous lisons l'heure.

Pour comprendre aisément le fonctionnement, le lecteur placera le plan du papier verticalement face au Soleil; il disposera le style horizontalement et normalement au papier, à la partie supérieure de la génératrice qui correspond à la date de l'observation (par rapport à la figure, le style aura donc tourné de 90°). L'enroulement sur un cylindre n'est que pour diminuer l'encombrement.

Je conseille de construire l'appareil à grande échelle.

Calendriers.

Le lecteur ne désire évidemment pas que je fasse la revue de tous les calendriers : il me suffira d'étudier le *calendrier Julien* qu'emploient les Russes et le *calendrier Grégorien* que nous utilisons.

Pour éviter toute ambiguïté, il est entendu que la date d'un phénomène *avance* lorsqu'elle passe, par exemple, du 20 au 19 mars; elle *recule* quand elle passe du 20 au 21 mars.

145. Calendrier Julien.

Nous admettons les propositions suivantes :

a) il est avantageux que l'année civile soit d'un nombre entier de jours;

b) il est avantageux que les phènomènes astronomiques relatifs aux saisons se reproduisent aux mêmes dates;

c) l'année tropique dont dépendent les saisons, est de 365,2422 jours moyens.

Corollaire immédiat : les années ne peuvent avoir toutes le même nombre de jours.

Jules César n'était pas astronome ; en revanche il était fort intelligent. Il fit donc venir un astronome de métier (Sosigènes d'Égypte) et lui demanda conseil. Dictateur et pontife il sut obliger les Romains à une réforme dont la nécessité était évidente, mais à laquelle s'opposaient les routines et les intérêts. Un chic à Jules !

La réforme de Jules César repose sur l'hypothèse que l'année tropique est exactement de 365 jours *un quart*. César adopta le nombre 365 jours pour l'année *commune* et posa que toutes les quatrièmes années (dont le numéro d'ordre *actuel* est divisible par 4) seraient de 366 jours. Il conserva la division traditionnelle à Rome de l'année en 12 mois auxquels il donna le nombre de jours que nous connaissons.

Janvier . . .	31^j	Mai	31^j	Septembre. .	30^j
Février . . .	28	Juin.	30	Octobre. . .	31
Mars	31	Juillet. . . .	31	Novembre. .	30
Avril	30	Août	31	Décembre . .	31

Il paraît bizarre que le divin Jules (qui n'était pas une bête) ait conservé l'inégalité choquante du mois de février. Mais ce mois était consacré aux dieux mânes, aux dieux infernaux, aux purifications ; il ne pouvait, croyait-on, se terminer que par un huit, nombre néfaste. Les nombres impairs étaient consacrés aux dieux supérieurs (*numero Deus impare gaudet*). Si bien qu'en lui ajoutant un jour une fois tous les quatre ans, on ne fit pas un 29 février ; on doubla le 24 qui était le sixième des calendes de Mars (c'est-à-dire le sixième avant le 1er mars ; 24, 25, 26, 27, 28, 1) ; d'où le jour dit *bis sexto calendas martias*, d'où l'année dite *bissextile*.

A Rome les jours du mois ne se comptaient pas de 1 à 28, 30 ou 31. Le premier jour s'appelait *calendes* ; le 5e ou le 7e suivant les mois s'appelait *nones* ; le 13e ou le 15e s'appelait *ides*. Des *nones* aux *ides*, il y avait toujours *neuf* jours, y compris les nones et les ides.

Voici comme exemple le nom des jours du mois de janvier :

1	Calendes.	12	Veille des ides.	22	XI.
2	IV avant les nones.	13	Ides.	23	X.
3	III —	14	XIX avant les calendes de février.	24	IX.
4	Veille des nones.	15	XVIII.	25	VIII.
5	Nones.	16	XVII.	26	VII.
6	VIII avant les ides.	17	XVI.	27	VI.
7	VII —	18	XV.	28	V.
8	VI —	19	XIV.	29	IV.
9	V —	20	XIII.	30	III.
10	IV —	21	XII.	31	Veille des calendes de février.
11	III —				

146. Oscillations de la date de l'équinoxe. Inconvénients du calendrier Julien. Année vague des Egyptiens.

1° — Étudions ce qui résulte du système de César en ce qui concerne la date de l'équinoxe.

Voici les déclinaisons du Soleil à midi moyen de Paris le 20, le 21 et le 22 mars pour une série d'années.

	1908	1909	1910	1911	1912	1913	1914	1915
20 mars	— 12′	— 18′	— 24′	— 30	— 11	— 17′	— 23	— 29
21 —	+ 11	+ 6	0	— 6	+ 12	+ 6	+ 1	— 5
22 —	+ 35	+ 29	+ 23	+ 18	+ 36	+ 30	+ 24	+ 19

De ce tableau résulte que pour ces huit années l'équinoxe a toujours eu lieu le 21 mars. De 1908 à 1911, le Soleil est passé dans l'équateur aux heures approximatives suivantes (temps moyen civil) :

1908	1909	1910	1911
0^h	6^h	12^h	18^h

La date de l'équinoxe recule sensiblement d'un jour en 4 ans.

Mais l'année 1912 est bissextile; le mois de février contient un jour de plus; la date de l'équinoxe est donc avancée d'un jour.

D'où pour la nouvelle période de 4 ans les heures approximatives suivantes de l'équinoxe, le 21 mars encore :

1912	1913	1914	1915
0^h	6^h	12^h	18^h

2° — En définitive l'année de 365 jours est trop courte d'environ un quart de jour; la date de l'équinoxe recule tous les ans de 6 heures (approximativement) ; mais tous les quatre ans l'intercalation d'un jour supplémentaire la ramène sensiblement à sa date antérieure.

Le système est donc excellent; il satisfait aux desiderata posés; *mais il n'y satisfait qu'approximativement.*

En effet l'année tropique n'est pas de 365,25 jours moyens; elle est un peu plus courte; sa valeur exacte est 365,2422.... D'où résulte que la date de l'équinoxe prise (afin de faciliter la comparaison) pour les années de même numéro dans les périodes de quatre ans, avance peu à peu. La période réelle de 4 années tropiques contient 1 460,9688 jours moyens; la période julienne de 4 ans en contient 1 461 : l'avance est donc de 3,12 centièmes de jour par période de 4 ans, soit de 45 minutes environ.

Évidemment c'est peu; mais au cours des temps cela finit par faire des jours. La date de l'équinoxe dans le calendrier Julien avance d'un jour pour 32 périodes, soit 128 ans.

L'équinoxe de printemps est tombé le 21 mars, l'année du Concile de Nicée (325); il se trouvait le 11 mars en 1582, soit 1 257 ans après.

3° — Année vague des Égyptiens.

L'inconvénient était autrement grave avec l'année civile des Égyptiens qui était uniformément de 365 jours. Ses mois se promenaient à travers les saisons; d'où le nom d'année *vague* (errante) qu'on lui donna très justement.

Soit l'équinoxe le 21 mars d'une certaine année; 4 ans après il tombe le 22, 8 ans après le 23, et ainsi de suite en reculant. L'année tropique qui détermine les saisons, étant de 365,2422 jours, il est facile de trouver au bout de combien d'années l'équinoxe fait le tour des mois.

On a : $365 \times 1\,508 = 365{,}2422 \times 1\,507 = 550\,420.$

Donc 1 508 années *vagues* font à peu près exactement 1 507 années *tropiques*. Les Égyptiens admettaient faussement les nombres 1 461 et 1 460, parce qu'ils prenaient l'année tropique de 365,25 jours exactement.

Il faisaient une erreur aussi forte mais en sens inverse en confondant l'année tropique et l'année sidérale (définie par le lever héliaque de Sirius; voir § 126). L'année sidérale valant 365,2564 jours moyens, on a :

$$365 \times 1\,425 = 365{,}2564 \times 1\,424 = 520\,125.$$

Donc 1 425 années *vagues* font à peu près exactement 1 424 années *sidérales*.

La période de 1 460 ans (*qui ne correspondait à rien*) était dite *caniculaire* ou *sothiaque*; on s'étonne qu'elle soit restée aussi célèbre.

147. Réforme Grégorienne.

1° — En 1582 Grégoire XIII[1] résolut de corriger le calendrier Julien. Pour des raisons rituelles[2], il ramena l'équinoxe le 21 mars, ce qui était facile : il posa que le 5 octobre 1582 serait appelé 15 octobre.

Pour éviter les modifications ultérieures de la date équinoxiale, il fallait retrancher de temps en temps 1 jour, par conséquent poser que certaines années qui devaient être bissextiles d'après le système julien, seraient communes.

Dans le calendrier de César, la date de l'équinoxe avance d'un jour en 128 ans, soit de 3 jours en 384 ans.

1. Voici le portrait de ce pape par Montaigne qui eut l'honneur de baiser sa mule le 29 décembre 1580 : « C'est un très beau vieillard, d'une moyenne taille et droite, le visage plein de majesté, une longue barbe blanche, âgé lors de plus de quatre-vingts ans, le plus sain pour cet âge, et vigoureux s'il est possible de désirer, sans goutte, sans colique, sans mal d'estomac. D'une nature douce, peu se passionnant des affaires du monde, grand bâtisseur, grand aumônier. Il n'est nulle fille à marier à laquelle il n'aide à se loger et compte l'on sa libéralité pour argent contant. » Un brave homme de Saint père au demeurant!

2. Le Concile de Nicée a fixé la fête de Pâques au dimanche qui suit la première pleine lune du printemps, *à supposer qu'il commence le 21 mars.*

Grégoire XIII jugea très suffisant en pratique de supprimer 3 années bissextiles en 400 ans. Il ordonna donc que les années séculaires (qui toutes devaient être *bissextiles* puisque leur numéro est divisible par 4) seraient *communes, une sur quatre exceptée*, celle dont le nombre formé par les chiffres des milliers et des centaines est divisible par 4.

Par exemple, 1600 est bissextile; 1700, 1800, 1900 sont communes; 2000 est bissextile, 2100, 2200, 2300 sont communes; et ainsi de suite.

Le système grégorien laisse subsister une petite erreur, mais si petite qu'elle ne prendra d'importance que dans un très grand nombre d'années. Pour préciser, en 10·000 années tropiques ou cent siècles le nombre exact de jours moyens est 3·652·422. Si l'année était de 365 jours, le nombre des jours serait de 3·650·000; la différence serait grossière. Suivant le calendrier Julien, il faut ajouter 25 jours par siècle, ce qui porte le nombre des jours à 3·652·500; la différence est encore de 78 jours.

Si nous supprimons comme bissextiles toutes les années séculaires, c'est 100 jours de moins, soit 3·652·400; nous nous rapprochons du nombre exact. Dans le système de Grégoire XIII, nous ne devons supprimer que 3 jours pour 4 siècles, soit en tout 75 jours; d'où en définitive 3·652·425 jours. Donc après 10·000 ans, la date de l'équinoxe sera le 18 mars : elle n'aura avancé que de 3 jours.

O Zeus secourable! où seront alors nos vertèbres?

3° — Pour bien fixer les idées du lecteur, voici les déclinaisons du Soleil à midi moyen de Paris, au voisinage de l'équinoxe, pour 1844 et 1896; entre ces dates se sont écoulés 52 ans, soit exactement 13 périodes de 4 ans :

	1852	1896
19 mars.	—24′	—14′
20 —	0	+10
21 —	24	+33

Ainsi en 1844, le Soleil passe dans l'équateur à midi le 20 mars; en 1896, il passe dans l'équateur ce même 20 mars (temps civil) vers 2 heures du matin : sa date avance. Dans le système Julien où l'année 1900 est bissextile, l'équinoxe tomberait pour les années 1908 et 1912 au voisinage de minuit dans la nuit du 19 au 20 mars (temps civil). Dans le système Grégorien, l'année 1900 est commune, le mois de février n'a que 28 jours : la date de l'équinoxe se trouve donc retardée d'un jour; elle est ramenée pour les années bissextiles 1908 et 1912 au voisinage de minuit dans la nuit du 20 au 21 mars.

4° — Opposition a la réforme grégorienne.

Dans la réforme Grégorienne, il y a deux parties : un changement brusque de date, une manière de placer les années bissextiles. La première partie était purement rituelle et devait remplir les intentions des Pères du Concile de Nicée (ils avaient réglé les fêtes religieuses

dans l'hypothèse que l'équinoxe tomberait toujours le 21 mars); contre elle s'élevèrent les pays *hérétiques* protestants (Angleterre, Allemagne,...) et les pays *schismatiques* orthodoxes (Russie).

Les pays catholiques allemands accueillirent la réforme en 1584; les protestants résistèrent jusqu'en 1600. L'Angleterre fut la plus longue à se soumettre; elle adopta la réforme en 1752; la différence était alors de 11 jours à cause de l'année 1700 bissextile dans l'*ancien style* julien, commune dans le *nouveau style* grégorien.

La Russie continue à faire bande à part; à cause des années 1800 et 1900 communes pour nous, bissextiles pour eux, la différence est actuellement de 13 jours: le 8 mars pour les Russes est le 21 mars pour les peuples non orthodoxes. L'année 1915 a commencé pour nous le vendredi 1er janvier; elle a commencé pour les Russes le jeudi 14 janvier; ce jour fut leur premier janvier.

147 *bis*. **Fête de Pâques. Fêtes mobiles.**

Le lecteur me saura gré de lui donner quelques indications sur les fêtes mobiles; elles règlent la vie universitaire par les vacances.

1° — Suivant le Concile de Nicée, Pâques tombe le premier dimanche APRÈS le quatorzième jour de la Lune (après la pleine Lune), si ce quatorzième jour arrive le 21 mars ou après le 21 mars. Ainsi la fête de Pâques ne peut arriver avant le 22 mars, la règle disant que ce sera le premier dimanche après le quatorzième jour. Elle ne peut reculer plus tard que le 25 avril; car si la pleine Lune tombe le 20 mars, on attend la suivante qui tombe le 18 avril. Si ce 18 avril est un dimanche, on attend le dimanche suivant.

Par exemple, en 1915, la nouvelle Lune eut lieu le 15 mars à $19^h\ 42^m$ (temps civil); la pleine Lune eut lieu le 31 mars à $5^h\ 38^m$ du matin qui était un mercredi. Conséquemment Pâques tomba le dimanche suivant, 4 avril.

En 1913, la pleine Lune eut lieu le 22 mars à $11^h\ 56^m$ qui était un samedi. Conséquemment Pâques tomba le 23 mars.

Il est naturellement fort rare que Pâques arrive à ses limites. Pour nous borner aux temps rapprochés de nous, Pâques est tombé le 25 avril en 1886 et ne se retrouvera à cette date qu'en 1943. Pâques est tombé le 22 mars en 1818 et ne s'y retrouvera qu'en 2285.

2° — Une fois Pâques connue, les autres fêtes sont d'un calcul aisé. Le dimanche de Carnaval (Quinquagésime) est 7 semaines avant Pâques; le mercredi suivant est le mercredi des Cendres; le Carême a 40 jours, les dimanches étant exclus. La Pentecôte est 7 semaines après Pâques; l'Ascension est le jeudi, 10 jours avant la Pentecôte. La Trinité est le dimanche 8 semaines après Pâques, la Fête-Dieu le jeudi suivant.

148. **Ères.**

Quelques mots sont indispensables sur ce qu'on entend par *ères*, en particulier par *ère chrétienne*.

1° — César ramena le commencement de l'année du 21 avril au 1er janvier. C'est le 1er janvier 709 de Rome (nouveau style) que son calendrier entre en vigueur. Ce qui ne veut pas dire que, suivant la chronologie romaine, Rome était fondée depuis 709 ans, ne serait-ce qu'en raison de la tradition qui donnait le 21 avril pour date de la fondation. Peu importe du reste; la chronologie romaine antérieure au 1er janvier de cette année conventionnelle 709 manque de précision, à cause des intercalations arbitraires que se permettaient les magistrats.

César fut assassiné l'année suivante *aux ides de mars* (15 mars 710).

Pendant plus de cinq siècles, les chrétiens n'eurent pas d'ère particulière, ils utilisèrent d'abord l'*ère Julienne*, puis l'*ère des Martyrs* qui n'en diffère que par le numérotage des années.

L'*ère Chrétienne* fut proposée en 532 par un moine scythe, venu à Rome et appelé Denys le Petit. Il supputa que Jésus-Christ était né le 25 décembre de l'an de Rome 753. La première année de notre ère commence donc avec l'an de Rome 754, c'est-à-dire, suivant Denys lui-même, 7 jours après la naissance du Christ. L'année 753 porte le nom de première avant J.-C. et par abréviation d'an 1 avant J.-C.; de sorte que, suivant Denys, Jésus-Christ est né en l'an 1 avant J.-C. L'année 752 est l'an 2 avant J.-C.; d'une manière générale, avant J.-C., la somme des deux numéros donne 754. La première année de Rome après la réforme Julienne (709) est donc la 45e avant J.-C.; la réforme Julienne fut inaugurée l'an 45 avant notre ère; César fut assassiné le 15 mars de l'an 44 avant J.-C., 710 de Rome.

2° — Les auteurs ecclésiastiques estiment que Denys s'est trompé.

L'*Art de vérifier les dates* met la naissance du Christ le 25 décembre de l'an 6 avant J.-C., cinq ans avant notre ère; ce qui correspond au 25 décembre de l'an 40 de l'ère Julienne, de l'an 748 de Rome. C'est la 39e année d'Auguste depuis la mort de César, la 25e depuis la bataille d'Actium qui lui donna l'empire.

La circoncision aurait eu lieu le 1er janvier de l'an 5 avant J.-C.

Peu importe pour l'objet qui nous occupe; il n'existe aucune incertitude sur la relation entre les années avant et après Jésus-Christ, puisque le changement d'ère s'est opéré suivant une convention dont nous connaissons tout le détail historique. C'est d'une extrême importance pour l'emploi des observations astronomiques anciennes dont l'usage implique que nous en calculions la date *dans notre ère*; en particulier pour l'emploi des observations de Ptolémée qui vivait au IIe siècle après J.-C. Il est relativement facile de relier les observations de Ptolémée à celles d'Hipparque, les calendriers grecs et égyptiens ayant toujours été compliqués, mais réguliers (à la différence du romain).

Auguste mourut le 19 août de l'an 14 de notre ère. Tibère lui succéda. Si l'on admet que J.-C. fut crucifié la 15e année du règne de Tibère, il n'aurait eu alors que 29 ans. Or certaines traditions lui en donnent 33;

d'où 4 ans d'erreur dans la supputation de Denys le Petit. Mais d'autres traditions lui en donnent davantage.

3° — Autres ères.

L'ère Julienne ne fut employée que jusqu'en 345 (300 de l'ère chrétienne); au delà de cette époque on n'en trouve plus trace dans les monuments publics. Alors on commença à utiliser l'*ère de Dioclétien ou des Martyrs*. Elle débute le 29 août 284, jour de l'avènement de Dioclétien; dans les tables chronologiques on fait correspondre l'an 1 de l'ère des martyrs à l'an 285 de J.-C.; mais on a le soin d'en fixer effectivement le début au 29 août précédent (voir l'*Art de vérifier les dates*).

L'*Hégire* commence le 16 juillet 1622. Nous dirons plus loin quelques mots des années lunisolaires et lunaires dont l'année grecque ancienne et l'année arabe sont les types.

	AVANT JÉSUS-CHRIST					APRÈS JÉSUS-CHRIST				
Ère Chrétienne .	5$^{Biss.}$	4	3	2	1$^{Biss.}$	1	2	3	4$^{Biss.}$	5....
Ans de Rome . .	749$^{Biss.}$	750	751	752	753$^{Biss.}$	754	755	756	757$^{Biss.}$	758
Ère Julienne . .	41$^{Biss.}$	42	43	44	45$^{Biss.}$	46	47	48	49$^{Biss.}$	50

L'an 709 de Rome (supposé commençant le 1er janvier) coïncide avec l'an 1 de l'ère Julienne et avec l'an 45 avant J.-C. En réalité le 1er janvier de l'an 1 de l'ère Julienne est dans l'an 708 de la fondation de Rome. puisque l'an 709 ne commença que le 21 avril de l'an 1 de l'ère Julienne, Le lecteur vérifiera qu'elle fut bissextile : elle est en effet de 40 ans en arrière de l'an 41 qui est bissextile.

149. Cycle solaire. Lettre dominicale.

1° — La période de 4 ans de notre calendrier (sauf l'exception des années centenaires *communes*) contient 1 461 jours, nombre qui n'est pas divisible par 7 : $1\,561 = 208 \times 7 + 5$.

C'est donc seulement après 28 ans que les jours de la semaine reviennent aux mêmes dates.

Cette période de 28 ans s'appelle *cycle solaire*.

Chaque année est affectée d'un nombre donné sous cette rubrique par l'*Annuaire du Bureau des Longitudes*. Les débuts des périodes les plus voisines de nous (années 1 de chaque cycle) sont :

1812 1840 1868 1896 1924

Les années 1897, 1898, 1899, portent donc les numéros 2, 3, 4. L'année 1915 porte le numéro 20. Mais en raison de ce que la période qui va

de 1896 à 1924 contient un jour de moins (l'année 1900 est *commune*), les jours ne sont pas distribués après 1900 comme dans les années antérieures portant le même numéro. Par exemple, l'année 1852 de numéro 13 commence un jeudi; l'année de même numéro 1908 commence un jour plus tôt, le mercredi.

2° — C'est au même ordre d'idées que se rapporte la *lettre dominicale* des calendriers ecclésiastiques. Il attribue la lettre A au premier jour de l'année, B au second..., G au septième; puis, en recommençant, A au huitième, B au neuxième ,... et ainsi de suite. Il est clair que tous les lundis ont la même lettre, de même tous les mardis....

Ceci posé la *lettre dominicale* est celle qui désigne le premier dimanche de l'année, par conséquent qui désigne tous les dimanches.

On a : $$365 = 52 \times 7 + 1.$$

Le jour qui finit l'année, est le même que celui qui la commence. D'où résulte que si la lettre dominicale est F pour une année commune, elle est E pour la suivante, en rétrogradant d'un rang.

On a : $$366 = 52 \times 7 + 2.$$

L'année commençant par un lundi, par exemple, finit par un mardi. Le premier jour de l'année suivante est un mercredi. Donc la lettre dominicale rétrograde de deux rangs. Par convention dans les années bissextiles on utilise deux lettres dominicales, l'une du 1er janvier au 24 février inclusivement, l'autre du 25 février à la fin de l'année.

Le changement se fait le 25 février, jour de la Saint-Mathias.

Voici les lettres pour quelques années :

1910	1911	1912	1913	1914	1915	1916
B	A	GF	E	D	C	BA

Le 1er janvier 1915 était un vendredi. On a donc :

1er janvier vendredi.	2 samedi.	3 dimanche.
A	B	C

La lettre dominicale est bien C.

L'utilité de tout cela est faible en dehors de la chronologie. Mais alors il est beaucoup plus simple et plus sûr de dresser une table évitant toutes les erreurs. Sous le rapport chronologique, le monde est jeune. Tous les *calendriers* se ramènent à 14 types, suivant le jour qui commence l'année, suivant qu'elle est commune ou bissextile. A ces 14 pages il faut joindre la liste des années avec le jour qui les commence : une table n'ayant que 2 500 lignes a peu de volume. Les calendriers dits perpétuels, qui permettent censément au premier venu de calculer, entre la poire et le fromage, quel jour tombait le 13 novembre de l'année 602, sont d'innocentes manies, comme de tourner des ronds de serviette ou de traduire Horace.

CHAPITRE VI

ROTATION DU SOLEIL

150. Position de la question.

La question de la rotation du Soleil sur lui-même est difficile et embrouillée. Si le Soleil était un corps *solide* de révolution quasi sphérique, sa masse étant énorme et les perturbations extrêmement petites, il tournerait suivant la loi établie par Poinsot quand les couples appliqués sont nuls. Considérons son centre comme fixe : son ellipsoïde d'inertie de révolution roulerait sur un plan. L'axe instantané de révolution décrirait un cône circulaire d'un mouvement uniforme.

Comme cas particulier vraisemblable, il tournerait autour d'un axe de direction quasiment invariable. C'est ce qui arriverait si l'ellipsoïde d'inertie était sphérique, ou si le Soleil avait été lancé à l'origine autour de son axe de révolution géométrique.

Malheureusement pour la simplicité, nous ne connaissons rien de la structure du noyau solaire; nous ne voyons que ce qui se passe à la surface. La température du Soleil étant assurément très élevée, la pression étant formidable dès qu'on s'enfonce dans la masse, les mots *solide* et *fluide* perdent tout sens défini. Bref nous ne savons pas si la vitesse angulaire est uniforme du centre à la surface; nous ne connaissons que ce que nous révèle l'observation du mouvement des particularités superficielles (*taches et facules*).

Or l'observation des taches révèle la loi suivante : la rotation solaire n'a pas la même durée sur tous les parallèles; la vitesse angulaire est maxima à l'équateur, elle diminue à mesure que la latitude augmente. C'est à l'équateur que l'angle parcouru en un jour est le plus grand.

La direction de la ligne des pôles de rotation est déterminée avec une précision relativement grossière. On admet qu'elle est invariable.

Pour fixer les idées, voici les formules les plus simples proposées pour la vitesse (angle parcouru en un jour) en fonction de la latitude solaire :

$$\Omega = 862' - 186' \sin^2\lambda = 773' + 93' \cos 2\lambda.$$

D'autres préfèrent la formule :

$$\Omega = 502' + 360' . \cos\lambda.$$

C'est dire à quel point les résultats sont incertains.

Admettons 862′ de rotation diurne à l'équateur. La période de rotation équatoriale serait 25 jours. Pour montrer l'incertitude de ce résultat, les nombres proposés ont varié de 25,0 à 25,6 jours.

On admet aujourd'hui 7° 30′ environ pour inclinaison de l'équateur solaire sur l'écliptique (les nombres proposés varient de 6° 51′ à 7° 30′), et 74° pour longitude héliocentrique du nœud ascendant (les nombres proposés varient de 68 à 76°).

La rotation solaire a lieu dans le sens direct, c'est-à-dire dans le sens de la rotation terrestre ou encore dans le sens du déplacement de la Terre sur l'écliptique (sens inverse des aiguilles d'une montre pour l'observateur placé sur l'écliptique, la tête vers le nord).

Ces résultats assez décourageants n'ont rien qui puisse étonner. Nous sommes dans les conditions d'un habitant du Soleil qui déterminerait la rotation de la Terre par le déplacement des nuages : il trouverait des résultats discordants.

Quoi qu'il en soit, voyons comment on fait l'étude du déplacement des taches; disons d'abord quelques mots de la constitution de ces repères.

151. Taches et facules.

1° — Les *taches solaires* sont des parties noires irrégulières qu'on aperçoit de temps en temps sur le disque solaire quand on le regarde avec un grossissement suffisant. Elles apparaissent sur le bord oriental et disparaissent sur le bord occidental. Elles sont généralement entourées d'une partie moins sombre.

Elles ne sont pas permanentes; elles se dissipent peu à peu. Certaines durent quelques jours, d'autres quelques semaines. On en a vu persister pendant 2, 3 et jusqu'à 8 révolutions solaires, ce qui permet de déterminer par leur moyen le mouvement de la couche superficielle solaire.

Les taches occupent deux grandes zones (*zones royales*) qui s'étendent de part et d'autre de l'équateur entre les latitudes 5 et 30°. Leur fréquence est maxima entre 10 et 15°. Elles sont rares à l'équateur solaire, quasiment inexistantes au delà de 45° de latitude solaire.

Le nombre des taches visibles chaque année varie périodiquement entre un minimum de l'ordre de 20 à 30, et un maximum de l'ordre de 2 à 300. La périodicité est voisine de 11,1 ans. La courbe du nombre des taches en fonction de l'année est dissymétrique; la figure 125 en représente l'allure. Il s'agit là d'une périodicité moyenne : les nombres réellement observés oscillent de part et d'autre de la courbe tracée.

On a trouvé que l'amplitude de l'oscillation diurne de la déclinaison

magnétique est maxima quand le nombre des taches est maximum, minima quand ce nombre est minimum.

2° — La surface solaire n'est pas uniforme; elle apparaît en projection comme *granulée*. Certains points sont particulièrement lumineux; on

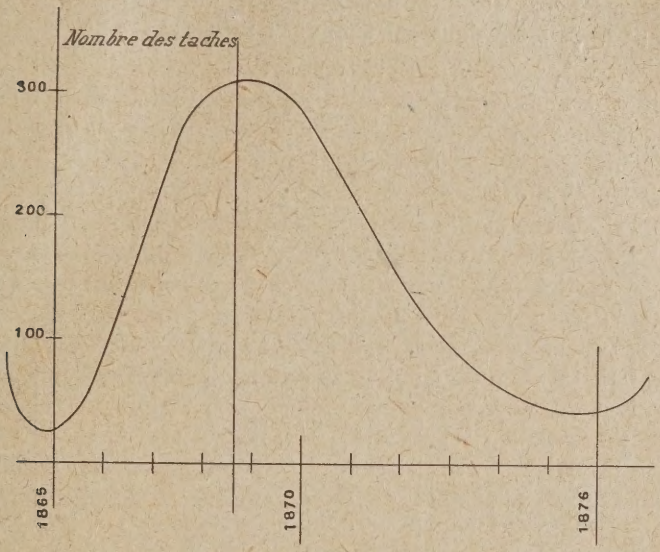


Fig. 125.

les appelle *facules*. Les facules se déplacent comme les taches, l'observation et les calculs se font de même pour les deux espèces de repères.

152. Repérage des taches sur le disque solaire.

1° — Pour étudier les taches on utilise ordinairement un équatorial, c'est-à-dire une lunette tournant autour d'un axe A parallèle à l'axe du monde. On règle l'axe A en vérifiant que l'image d'une étoile peut toujours être amenée sur la croisée de deux fils réticulaires, par simple rotation autour de l'axe A, sans changement de l'angle que la lunette fait avec lui : dans ces conditions la croisée des fils décrit un *parallèle de déclinaison*.

Le réticule porte des fils rectangulaires convenablement distribués; il est monté sur un cercle gradué déterminant son azimut par rapport au plan horaire qui passe par l'axe optique de la lunette.

On commence par chercher sur le cercle l'azimut pour lequel les fils d'un des groupes sont dans les plans horaires. Pour cela on s'arrange de manière qu'une étoile reste en coïncidence avec un des fils de l'autre groupe quand, la lunette restant immobile, l'étoile se déplace en raison du mouvement diurne.

Ceci posé, on appelle *angle de position* P du point T, l'angle que fait

avec le cercle horaire passant par le centre C du Soleil, la droite CT passant par le point T. On le détermine en tournant le réticule tout entier à partir de l'azimut ci-dessus déterminé, de manière que le fil F central passe par le point T et que le disque soit symétriquement encadré par les fils parallèles F′ et F″ équidistants de F.

Laissant le réticule dans cet azimut et utilisant les fils mobiles, on

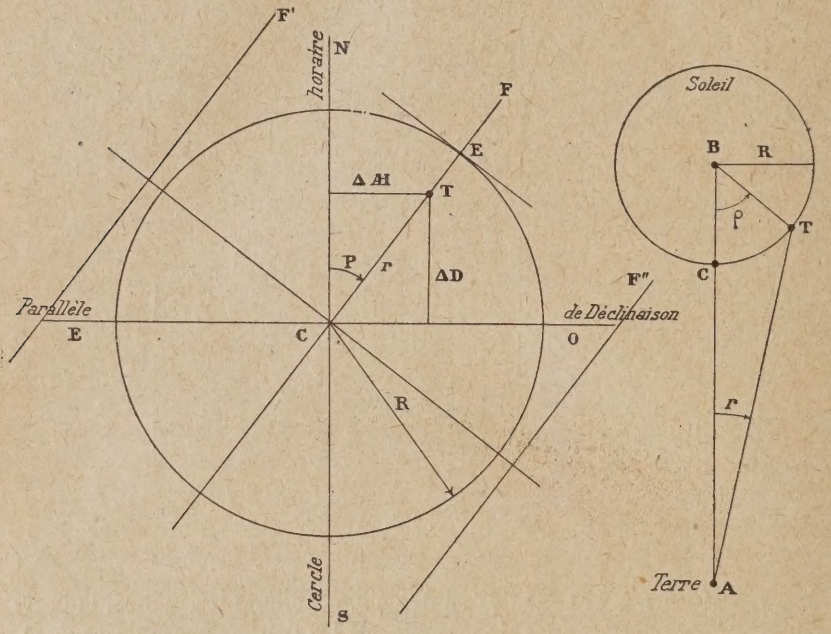


Fig. 126.

mesure la distance angulaire ET du point T au bord le plus proche, ce qui revient à mesurer la distance $r = \overline{CT}$, du point T au centre du disque.

2. — Calculons la distance angulaire $CBT = \rho$ de la tache vue du centre du Soleil.

Dans le triangle ATB on a :

$$\frac{\sin(r+\rho)}{\overline{AB}} = \frac{\sin r}{\overline{BT}}, \qquad \sin(r+\rho) = r : \frac{\overline{BT}}{\overline{AB}} = \frac{r}{R},$$

R est le demi-diamètre apparent du Soleil au moment de l'observation ; l'angle r (toujours inférieur à 16′) peut être confondu avec son sinus. D'où la formule :

$$\rho = \text{arc sin}\frac{r}{R} - r.$$

Fixons les idées sur la précision des mesures.

a) La distance solaire $\overline{AB}$ est de 23 439 rayons terrestres équatoriaux ; le rayon du Soleil vaut environ 109 rayons équatoriaux.

Au voisinage du centre C du disque, on a donc sensiblement :

$$109\rho = 23\,330r, \qquad \rho = 214r.$$

Si r vaut une seconde, ρ en vaut $214'' = 3'\,34''$.

Une erreur d'une seconde d'arc sur r est multipliée par 214 sur ρ.

On retrouve le même résultat en partant de la formule :

$$\rho = \arcsin\frac{r}{R} - r = \frac{r}{R} - r.$$

Prenons : $R = 959''$, $r = 1''$; $\dfrac{r}{R} = \dfrac{1}{959} = 0{,}001043$.

En secondes : $r : R = 3'\,34''$ $\rho = 3'\,33''$

b) Calculons l'influence d'une erreur d'une seconde sur r au bord du disque. On a :

$$\frac{r}{R} = \frac{958}{959} = 1 - 0{,}001043 = 0{,}998967,$$

qui est le sinus de 87° 24'. On a d'ailleurs $r = 16'$.

D'où $\rho = 87°\,8'$.

L'erreur est de près de 3°.

Or les taches sont toujours de formes variables et mal limitées. La précision d'une seconde sur leur pointé est problématique. Le lecteur voit avec quelles erreurs les coordonnées héliocentriques sont certainement déterminées.

3° — Au lieu d'un équatorial on peut utiliser une lunette méridienne.

On détermine le nombre de secondes t qui s'écoulent entre le passage de la tache et celui du centre (déterminé par la moyenne des temps de passage des bords).

La différence $\Delta\text{Æ}$ des ascensions droites (en secondes d'arc) est :

$$\Delta\text{Æ} = 15t.\cos D;$$

D est la déclinaison du centre : $\Delta\text{Æ}$ est négatif dans la figure 126.

On mesure au micromètre la différence ΔD de déclinaison.

On a évidemment :

$$\Delta D.\operatorname{tg} P = \Delta\text{Æ} = 15t.\cos D, \qquad r\sin P = 15t.\cos D.$$

L'une ou l'autre méthodes donnent en définitive les coordonnées équatoriales par rapport au centre du Soleil : l'angle de position P, la distance marquée r sur la figure 126.

153. Coordonnées écliptiques du centre d'une tache.

1° — Soit ω l'obliquité de l'écliptique sur l'équateur terrestre, soit L la longitude solaire. L'angle φ que fait l'écliptique avec le cercle horaire, pour la longitude $\overline{\gamma C} = L$, est donnée par la formule :

$$\cos L = \operatorname{cotg}\omega.\operatorname{cotg}\varphi; \qquad \text{d'où :} \qquad \operatorname{tg} G = \operatorname{tg}\omega.\cos L,$$

en appelant G le complément de φ.

Projetons sur le plan tangent à la sphère céleste, ce que permettent les dimensions restreintes du Soleil. On a immédiatement :

$$y = r\cos(G+P), \qquad x = r\sin(G+P).$$

y est la latitude géocentrique de la tache (celle du centre du Soleil est nulle par définition); x est l'excès de longitude géocentrique de la tache sur la longitude géocentrique du centre du Soleil.

Dans la figure 127, x est négatif.

2° — Passons aux coordonnées héliocentriques.

Soit L et l la longitude et la latitude héliocentriques.

Prenons pour origines des longitudes le plan normal à l'écliptique

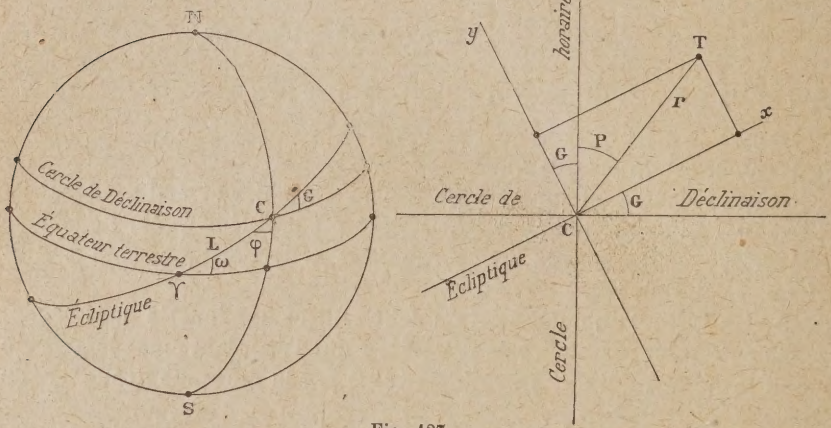


Fig. 127.

qui passe *actuellement* par la Terre; c'est le plan ySz de la figure 128.

Posons comme plus haut $R = \overline{SE}$; c'est le rayon apparent actuel du Soleil.

Les formules habituelles de transformation des coordonnées cartésiennes en coordonnées sphériques donnent :

$$y = R\sin l, \qquad x = R\cos l.\sin L.$$

D'où l et L quand on connaît x, y, R.

Pour ramener à une époque toujours la même, on corrige la longitude L ci-dessus calculée de l'angle α (fig. 134) dont le Soleil a tourné, du fait de son mouvement sur l'écliptique, depuis l'époque choisie jusqu'au temps de l'observation. Ce qui revient à prendre pour origine des longitudes héliocentriques un plan de direction invariable. Cette correction n'est pas négligeable puisque la demi-période apparente (voir plus loin) est de 13 jours et demi environ, pendant lesquels l'angle α varie d'à peu près 13° 30′.

Les longitudes héliocentriques sont ordinairement rapportées à un plan qui passe par la normale à l'écliptique menée par le centre du Soleil, et par la direction du point γ (autrement dit, par l'intersection de l'équateur terrestre et de l'écliptique, ligne des nœuds de l'équateur terrestre). Mais ici, on peut rapporter les longitudes des taches à un plan fixe quelconque, faisant avec le précédent un angle toujours le même. L'angle dont le plan yOz de la figure 128 (plan passant par la Terre) tourne par rapport à ce plan fixe, est précisément égal à la variation de la longitude solaire dans l'intervalle des observations.

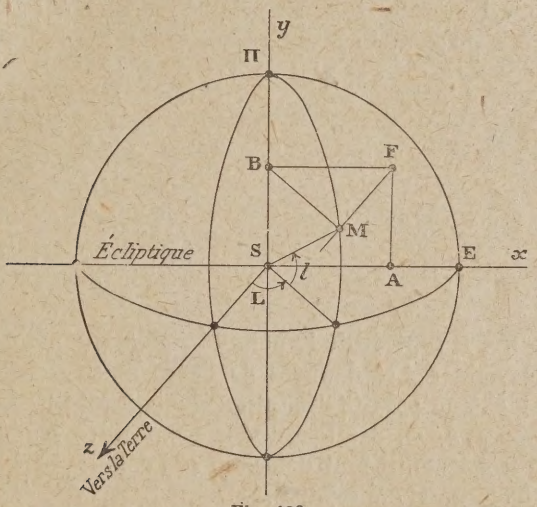


Fig. 128.

En définitive nous calculons les positions occupées par une tache sur la surface solaire en prenant pour plans de référence l'écliptique et un plan de direction invariable passant par le centre du Soleil et normal à l'écliptique. Pour cela nous nous servons comme intermédiaire de la projection de la tache sur le disque solaire, rapportée aux traces sur ce disque de l'écliptique et du plan normal à l'écliptique qui passe actuellement par les centres du Soleil et de la Terre.

154. Pôles de la rotation solaire.

1° — Supposons déterminées les longitudes et les latitudes héliocentriques de trois points d'un petit cercle solaire. En réalité ce sont trois positions aussi distantes que possible de la même tache, par rapport à trois axes rectangulaires de direction invariable, passant par le centre du Soleil. Deux de ces axes sont dans l'écliptique; l'un d'eux est dirigé vers le point γ. Le troisième axe est normal à l'écliptique.

A supposer que le point tourne autour d'une droite de direction invariable, cette droite passe par les pôles du petit cercle déterminé par les

trois positions : les pôles de ce petit cercle seront les pôles de rotation du globe solaire.

En définitive l'étude de la rotation solaire revient à la recherche des pôles du petit cercle déterminé par trois positions aussi distantes que possible d'une tache, positions rapportées à des axes fixes. C'est à l'expérience de vérifier si l'on trouve toujours ainsi la même ligne des pôles quand on opère successivement sur un grand nombre de taches.

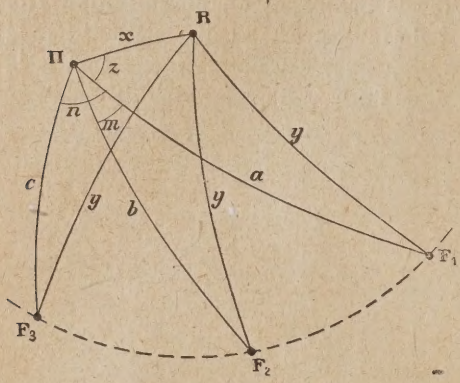


Fig. 129.

2° — Nous sommes ramenés au problème suivant.

Soit trois positions F_1, F_2, F_3, du centre d'une tache déterminées comme il vient d'être dit : trouver un point R de la sphère à égale distance de ces trois points.

Dans la figure, Π représente le pôle de l'écliptique, R est le pôle de rotation à déterminer. Les données de l'expérience sont les distances a, b, c, de la tache au pôle de l'écliptique (colatitudes héliocentriques), et les différences n, m, des longitudes héliocentriques de deux des positions à la troisième. Il faut déterminer la colatitude x du pôle R et sa longitude héliocentrique relative.

Les formules qui résolvent le problème sont :

$$\begin{aligned} \cos y &= \cos x \,.\, \cos a + \sin x \,.\, \sin a \,.\, \cos z, \\ \cos y &= \cos x \,.\, \cos b + \sin x \,.\, \sin b \,.\, \cos(z+m), \\ \cos y &= \cos x \,.\, \cos c + \sin x \,.\, \sin c \,.\, \cos(z+n). \end{aligned} \qquad (1)$$

qui contiennent trois inconnues y, x, z.

Posons $\cos a - \cos b = A$, $\cos a - \cos c = B$.

On a :

$$\operatorname{tg} z = \frac{A(\sin a - \sin c \,.\, \cos n) - B(\sin a - \cos b \,.\, \cos m)}{B \sin b \,.\, \sin m - A \sin c \,.\, \sin n)}.$$

Ayant z, on tire x de la formule :

$$\operatorname{tg} x = -\frac{A}{\sin a \,.\, \cos z - \sin b \,.\, \cos(z+m)};$$

on tire enfin y de l'une des formules (1).

Les temps les plus avantageux pour l'observation sont au voisinage du 9 décembre et du 9 juin. Les trajectoires sont quasi rectilignes; leur inclinaison sur l'écliptique donne l'inclinaison de l'équatenr solaire.

3° — Lalande qui a laissé de très intéressants mémoires sur la

question, trouvait beaucoup plus rapide et plus sûr de procéder à l'inverse. Il prenait arbitrairement pour les pôles de rotation une certaine position. Puis il calculait la distance à cette position des différentes positions de la tache dont il avait préalablement calculé les longitudes et latitudes héliocentriques. Il devait trouver pour toutes les positions de la tache la même distance polaire; ce qui n'avait pas lieu. Au moyen d'interpolations systématiques analogues à celles du § 92 il corrigeait alors ses hypothèses jusqu'à obtenir la même distance. Dans son premier mémoire je cueille cette phrase que nos étonnants professeurs feraient bien de méditer : « Cette méthode a l'avantage d'éviter toute incertitude sur les signes et toute occasion d'erreur dans l'application des formules; de faire voir, par le calcul même, ce qu'il peut y avoir de discordance ou d'erreur sur chaque observation et de quelle manière elle influe sur le résultat. Enfin elle n'est pas aussi longue que les méthodes directes, malgré le tâtonnement qu'elle renferme. »

Devant ce bon sens bien français que va dire la collection d'idiots qui dirigent notre Université? que vont dire nos astronomes à la manque et nos mathématiciens embochés? que vont dire tous les imbéciles qui ne rêvent que méthodes mécaniques, que travaux de manœuvres, soucieux qu'ils sont de ne pas fatiguer leur cervelle en déliquescence?

Dans la méthode de Lalande, on applique naturellement la formule :

$$\cos y = \cos x . \cos a + \sin x . \sin a . \cos z.$$

a est la distance de la tache au pôle Π de l'écliptique (colatitude); z est la différence des longitudes du pôle de rotation R et de la tache (connue en conséquence du choix du pôle R), x est la distance du pôle de rotation R au pôle de l'écliptique (connue pour la même raison).

y est la distance de la tache au pôle de rotation.

Si le choix du pôle R est convenable, on trouve le même y pour les diverses positions de la tache.

155. Orientation du disque solaire suivant l'heure.

1° — Avant d'aller plus loin discutons un amusant petit problème.

Nous rapportons instinctivement les orientations à la verticale; du reste si nous ne possédons pas d'équatorial, c'est toujours la verticale qui nous sert de repère.

Supposons que le globe solaire ne tourne pas, que le Soleil nous présente toujours la même face sur laquelle est un repère : comment ce repère est-il placé par rapport à la trace du vertical passant par le centre du disque, suivant les heures, plus précisément suivant les angles horaires Ħ du centre du Soleil?

La solution du problème est au *4°* du § 12 (voir fig. 11).

On donne comme paramètres la déclinaison D de l'astre et la latitude λ du lieu d'observation. On demande, en fonction de la distance zéni-

thale z ou de l'angle horaire H, l'angle S que font entre eux le vertical et le plan horaire passant par l'astre. On a :

$$\sin\lambda = \sin D.\cos z + \cos D.\sin z.\cos S,$$
$$\operatorname{tg}\lambda.\cos D = \sin D.\cos H + \sin H.\operatorname{cotg} S.$$

S mesure bien la rotation cherchée. En effet le changement d'orien-

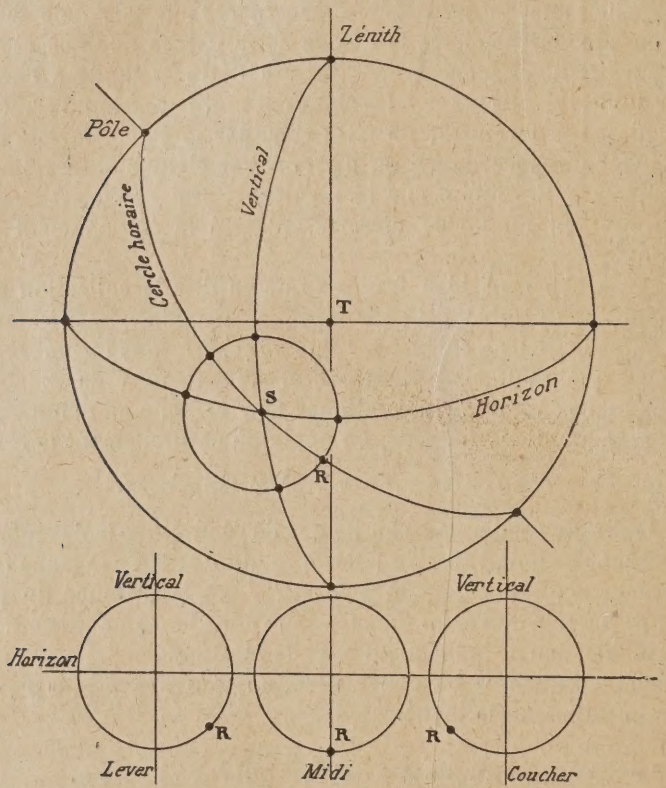


Fig. 130.

tation résulte seulement de la rotation terrestre; le repère qui se trouve à un instant dans le plan horaire passant par le centre du Soleil, reste dans ce plan.

2° — Cherchons la rotation totale du repère entre le lever (ou le coucher) de l'astre et son passage au méridien.

Pour le passage au méridien, on a évidemment $S = 0$.

Le lever et le coucher sont définis par la condition $z = 90°$. D'où :

$$\cos S = \frac{\sin\lambda}{\cos D}.$$

Calculons pour Paris ($\lambda = 48° 50'$), pour les solstices et équinoxes.

Aux équinoxes $D = 0$, $\cos S = \pm \sin \lambda$:

$$S = 41° 10'$$

Aux solstices $D = 23° 27'$, $\cos D = 0{,}918$

$$\sin \lambda = 0{,}753, \quad \cos S = 0{,}820, \quad S = 34° 49'.$$

Au pôle, S est identiquement nul. C'est évident et résulte de la formule. Au pôle la déclinaison et la distance zénithale sont complémentaires.

La formule :

$$\sin \lambda = \sin D . \cos z + \cos D . \sin z . \cos S,$$

devient : $1 = \sin^2 D + \cos^2 D . \cos S$, $\cos S = 1$, $S = 0$.

A l'équateur $\lambda = 0$, la rotation totale diurne est de 180°. On a :

$$\cos S = 0, \quad S = \pm 90°.$$

En effet au lever de l'astre, le vertical est normal au plan horaire.

3° — Calculons S pour 6 heures du matin ou du soir. On a $H = 90°$,

$$\operatorname{cotg} S = \operatorname{tg} \lambda . \cos D.$$

Pour Paris, aux équinoxes on a :

$$D = 0, \quad \operatorname{cotg} S = \operatorname{tg} \lambda ; \quad S = 41° 10' ;$$

c'est la valeur trouvée plus haut, ce qui est évident, l'angle horaire $H = 90°$ correspondant alors aux couchers et aux levers.

Aux solstices, on a :

$$\operatorname{cotg} S = 0.918 . \operatorname{tg} \lambda = 0{,}398 \quad S = 43° 37'$$

3° — Reste à déterminer dans quel sens tourne le repère.

Supposons qu'à midi il soit sur le bord inférieur du disque dans le vertical passant par le centre du Soleil. Au lever du Soleil, il nous paraît à droite du vertical, au coucher il nous paraît à gauche (fig. 130, en bas). C'est ce qui résulte de la figure 130, en haut, qui se rapporte au coucher. Le lecteur n'oubliera pas qu'elle représente la sphère céleste vue du dehors, que par suite l'observateur doit se placer au point T pour juger des sens. Cela revient à retourner la figure 130, en bas.

La rotation du lever au coucher est au maximum de 82° 20' pour la latitude de Paris.

4° — Le plus généralement aujourd'hui, pour l'étude des taches, on utilise une lunette non parallactique avec laquelle on fait des clichés. Comme repère on utilise un fil vertical. Pour ramener dans un azimut invariable la trace du plan horaire qui passe par le centre du Soleil, il faut tourner le cliché de l'angle S dans le sens convenable.

Pour les clichés pris avant midi, la rotation est dans le sens des aiguilles d'une montre; pour les clichés pris après midi, elle est en sens

inverse. Il est avantageux de calculer à l'avance l'angle S pour le lieu de l'observation et une série de déclinaisons et d'angles horaires.

Nous retrouverons le même problème à propos de l'orientation de la ligne des cornes de la Lune.

156. **Trajectoires instantanées.**

1° — Posons que la direction de l'axe de rotation est fixe dans l'espace. Les trajectoires réelles des taches sont des petits cercles que nous voyons en projection. Parmi ces petits cercles se trouve *le grand cercle équatorial solaire*. Les *nœuds* sont les points de la surface solaire où l'équateur solaire coupe l'écliptique. La ligne des nœuds (intersection de l'équateur et de l'écliptique) a une direction invariable, puisque

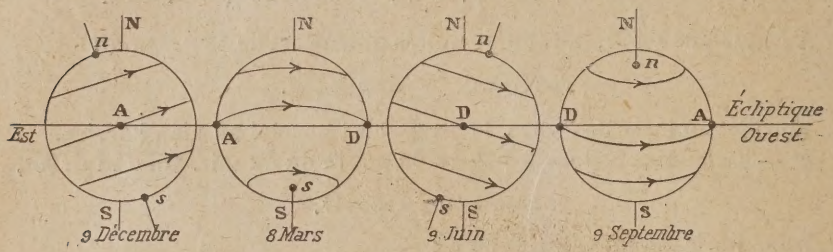


Fig. 131.

nous admettons que la direction de l'axe de rotation solaire est immuable.

Le nœud ascendant A est le point où une tache équatoriale (à supposer qu'il en existe) traverse l'écliptique du sud au nord; le nœud descendant D est le point où une tache équatoriale traverse l'écliptique du nord au sud.

La position de la ligne des nœuds est fixée par sa longitude héliocentrique; pour la déterminer nous devons chercher à quel instant l'un des nœuds se projette pour nous sur le centre du disque solaire. Il est évident qu'alors la longitude héliocentrique du nœud diffère de 180° de la longitude géocentrique du Soleil.

2° — Décrivons d'abord les formes *instantanées* des parallèles solaires vus en projection, c'est-à-dire ce que serait la trajectoire d'une tache *qui tournerait infiniment vite.*

Le 9 décembre (longitude solaire géocentrique 256° environ), les parallèles se présentent comme des lignes droites parallèles. Les taches (à supposer leur vitesse infinie) apparaîtraient sur le bord oriental du disque et le traverseraient suivant des lignes droites parallèles *montantes vers le pôle boréal de l'écliptique* (ce que représente la figure 131). La ligne des nœuds de l'équateur solaire passe par la Terre. Nous voyons donc le nœud ascendant A se projeter sur le centre du disque solaire.

Le 8 mars (longitude solaire 346°), les parallèles se projettent suivant des ellipses de grands axes parallèles à l'écliptique. Elles tournent leur convexité vers le nord. Le petit axe des ellipses est environ les 13 centièmes du grand axe. Les ellipses sont décrites dans le sens est-ouest (comme du reste toutes les trajectoires). Les nœuds sont en A et D sur les bords du disque.

Le 9 juin (longitude solaire 76°), les parallèles se projettent encore suivant des lignes droites parallèles; les taches (à supposer leur vitesse infinie) iraient de l'est à l'ouest sur des lignes droites *descendantes vers*

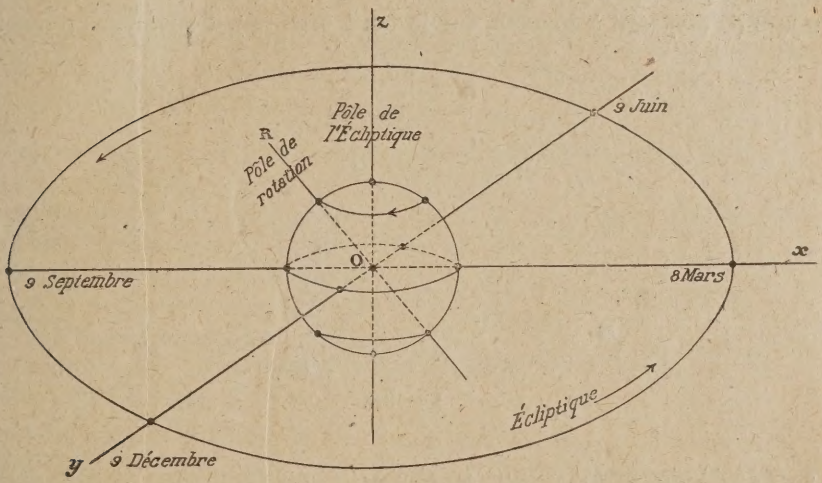


Fig. 132.

le pôle austral de l'écliptique. Nous voyons le nœud descendant D au centre du disque.

Enfin le 9 septembre (longitude solaire 166°), les parallèles se projettent suivant des ellipses de grands axes parallèles à l'écliptique. Elles tournent leur convexité vers le sud. Les nœuds sont en D et A sur les bords du disque.

Dans l'intervalle de ces dates les phénomènes varient d'une manière continue.

3° — Les phénomènes précédents s'expliquent en admettant que l'axe de rotation solaire a une direction invariable et fait un angle de 7° 30′ avec la normale à l'écliptique. Comme nous tournons autour du Soleil, dans le sens direct, cet axe semble tourner avec une vitesse angulaire égale en sens inverse autour de la normale Oz à l'écliptique.

La figure 132 représente schématiquement les résultats.

Dans le mouvement réel nous tournons sur l'écliptique (plan xOy) dans le sens des flèches, l'axe de rotation solaire restant censément dans le tableau, pris pour plan xOz. L'angle ROz est de 7° environ.

Le 8 mars et le 9 septembre nous passons dans le plan xOz.

Le 9 décembre et le 9 juin, nous passons dans le plan yOz.

Le lecteur comparera les figures 131 et 132.

Le pôle nord de la rotation solaire est donc visible au-dessus de l'écliptique du 9 juin (il apparaît à droite, sur le bord occidental), au 9 décembre (il disparaît à gauche, sur le bord oriental). Dans l'intervalle il semble décrire sur le disque solaire une ellipse qu'il parcourt de droite à gauche.

Le pôle sud de la rotation solaire est visible au-dessous de l'écliptique du 9 décembre (il apparaît à droite, sur le bord occidental), au 9 juin (il disparaît à gauche, sur le bord oriental). Dans l'intervalle il

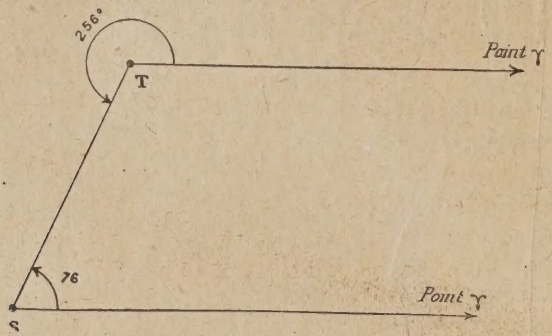


Fig. 133.

semble décrire sur le disque solaire la même ellipse que le pôle nord faisait précédemment, et dans le même sens.

A la vérité rien ne le marque sur le disque solaire, parce que les taches sont très rares pour les latitudes solaires supérieures à 35°; elles n'apparaissent jamais près des pôles de rotation.

4° — La ligne des nœuds est l'intersection de l'équateur solaire et de l'écliptique. Un repère placé sur l'équateur passe par le nœud ascendant quand il traverse l'écliptique du sud au nord. Il passe par le nœud descendant quand il traverse l'écliptique du nord au sud.

Nous voyons le nœud ascendant se projeter sur le centre du Soleil le 9 décembre, quand la longitude solaire *géocentrique* est de 256° environ.

De là résulte que la longitude *héliocentrique* du nœud ascendant est :

$$256 - 180 = 76°.$$

C'est ce que montre la figure 133. Les deux espèces de longitudes sont comptées dans le même sens (direct), à partir de la même direction (point γ, intersection de l'équateur terrestre et de l'écliptique).

Elles diffèrent donc de 180°.

Pour que le Soleil arrive à l'équinoxe de printemps, il faut qu'il parcoure *en apparence* $360 - 256 = 104$ degrés dans le sens direct. Sa lon-

gitude *géocentrique* est alors 0° par définition; la longitude *héliocentrique* de la Terre est 180°.

Nous avons dit que le petit axe de l'ellipse est environ les 13 centièmes du grand axe. On a : $0{,}13 = \sin(7° 30')$,
ce qui donne l'angle de l'axe de rotation solaire avec la normale à l'écliptique.

Au reste les paramètres (longitude du nœud ascendant, inclinaison de l'équateur sur l'écliptique) sont mal déterminés. Cela tient à ce que les taches *dérivent* toujours plus ou moins de leur trajectoire théorique. Naturellement on applique la méthode des moindres carrés à un grand nombre d'expériences, ce qui est manifestement stupide, un tripatouillage mathématique n'ayant pas la puissance de rendre régulier un phénomène qui ne l'est pas.

157. Influence du mouvement annuel sur la trajectoire apparente des taches.

Nous savons que la vitesse de rotation de la couche superficielle solaire, vitesse variable avec la latitude, est de l'ordre de 25 jours à l'équateur.

Une tache reste donc visible un temps assez grand pour que sa trajectoire apparente ne soit plus l'ellipse instantanée, projection d'un cercle, que nous venons de déterminer. Étudions le phénomène.

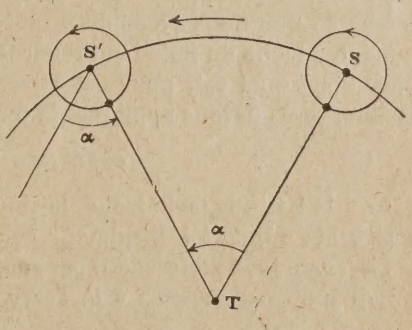


Fig. 134.

1° — Durée de la rotation apparente. Taches équatoriales.

Le Soleil tourne dans le sens direct (sens inverse des aiguilles d'une montre pour l'observateur placé sur l'écliptique, la tête vers le nord). Les points de la surface se déplacent donc pour nous de l'est à l'ouest, dans le sens des flèches de la figure 131.

Le temps nécessaire pour qu'un point de la surface reprenne la même position sur le disque solaire, est plus grand que la période de rotation complète qui correspond à sa latitude. Cela tient au déplacement relatif de la Terre et du Soleil en raison du mouvement annuel.

Au voisinage de l'équateur, on trouve 27 jours environ pour période *apparente* τ'.

A partir de ce résultat, cherchons la période *vraie* τ.

Le raisonnement qui suit se retrouve à chaque instant en Astronomie.

Pour simplifier posons que l'axe de la rotation solaire est normal à l'écliptique : nous savons qu'il s'en faut de peu.

La période annuelle du Soleil sur sa trajectoire SS' (que nous pouvons faire circulaire à la précision des questions traitées) est :

$T = 365,25$ jours.

Pour revenir au même point apparent du disque, un point de la surface solaire doit décrire autour de l'axe de rotation solaire l'arc $2\pi + \alpha$. Le temps τ' nécessaire à ce parcours est égal à l'angle parcouru divisé par la vitesse angulaire correspondante :

$$(2\pi + \alpha) : \frac{2\pi}{\tau} = \alpha : \frac{2\pi}{T} = \tau', \qquad \frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau'} + \frac{1}{T}.$$

D'où : $\frac{1}{\tau} = \frac{1}{27} + \frac{1}{365} = 0,037 + 0,003 = 0,04, \quad \tau = 25$ jours.

2° — Durée de rotation. Taches non équatoriales.

Ce calcul approché, bon pour les taches quasi équatoriales, est insuffisant pour les taches dont les latitudes solaires sont grandes.

C'est évident puisque pour une tache polaire (à supposer qu'il en existe) la durée de rotation apparente serait annuelle.

Pour calculer la période de rotation apparente, transportons à ce problème ce que nous avons dit du lever et du coucher d'un astre. Imaginons une tache du Soleil qui regarderait la Terre se lever et se coucher; cherchons quel est, pour cet astre, l'arc pendant lequel la Terre est visible. Nous devons appliquer la formule du § 100.

$$\cos \mathcal{H} = -\operatorname{tg}\lambda \,.\, \operatorname{tg} D.$$

λ est la latitude de la tache, latitude solaire; D est la déclinaison terrestre par rapport à l'équateur solaire.

La Terre joue maintenant par rapport au Soleil le rôle qu'au § 100 le Soleil joue par rapport à la Terre. On a :

$$\operatorname{tg} D = \operatorname{tg}\omega \,.\, \sin\Delta, \qquad \cos \mathcal{H} = -\operatorname{tg}\lambda \,.\, \operatorname{tg}\omega \,.\, \sin\Delta.$$

ω est l'obliquité de l'équateur solaire sur l'écliptique, soit à peu près 7° 30'. Δ est la distance de la Terre au nœud de l'équateur solaire; c'est encore la différence de longitude héliocentrique du nœud et de la Terre. La formule :

$$\cos \mathcal{H} = -\operatorname{tg}\lambda \,.\, \operatorname{tg}\omega \,.\, \sin\Delta,$$

permet donc de calculer ce qu'au § 13 nous appelons *l'angle semi-diurne* du lever et du coucher de la Terre pour un observateur placé sur une tache solaire. Il dépend de la latitude λ de la tache et de la position de la Terre par rapport au Soleil déterminé par l'angle Δ.

Les anciens astronomes introduisaient sous le nom de *différence ascensionnelle* la quantité $\mathcal{H} - 90 = \mathcal{A}$. D'où :

$$\sin \mathcal{A} = \operatorname{tg}\lambda \,.\, \operatorname{tg}\omega \,.\, \sin D.$$

Tant en raison de la petitesse de ω que du fait que la latitude des

tâches facilement observable reste inférieure à 45°, l'angle $\mathcal{A}$ est généralement assez petit pour qu'on puisse poser :

$$\mathcal{A} = \operatorname{tg}\lambda \,.\, \operatorname{tg}\omega \,.\, \sin D.$$

soit en degrés : $\mathcal{A} = (57^\circ 17') \operatorname{tg}\lambda \,.\, \operatorname{tg}\omega \,.\, \sin\Delta.$

Connaissant la date d'apparition d'une tache définie par sa latitude solaire λ, on peut calculer la distance héliocentrique Δ de la Terre au nœud de l'équateur solaire; on a donc l'excès $\mathcal{A}_1$ sur 90° de l'arc de visibilité de la Terre pour un observateur placé sur la tache. Recommençant le même calcul pour la disparition, on trouve un second excès $\mathcal{A}_2$. L'arc de visibilité est donc $180 + \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$. Connaissant le temps τ'' pendant lequel la tache a été visible, on peut calculer la période apparente τ' par la relation :

$$\frac{180 + \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2}{\tau''} = \frac{180}{\tau'}.$$

Connaissant τ' on calcule la période réelle τ par la formule ci-dessus donnée.

Pour fixer les idées sur l'ordre de grandeur de la correction, supposons la Terre à peu près à 90° du nœud.

Prenons une tache ayant $\lambda = 20^\circ$ de latitude. On a :

$$\operatorname{tg}\lambda \,.\, \operatorname{tg}\omega \,.\, \sin\Delta = 0{,}364 \times 0{,}132 = 0{,}048, \qquad \mathcal{A} = 2^\circ 46'.$$

L'arc de visibilité n'est plus 180° mais 185° 32'.

3° — TRAJECTOIRES RÉELLES.

La vitesse des taches le long de leurs trajectoires est très variable, comme il résulte de ce qu'on les voit en projection. La vitesse uniforme doit être multipliée par le sinus de l'angle que fait avec le plan de projection son vecteur représentatif. Elle est donc nulle quand la tache apparaît au bord oriental et disparaît au bord occidental; elle est maxima quand la tache se projette sur la projection de l'axe de rotation.

Corrélativement la même tache apparaît extrêmement mince, comme vue de champ, lorsqu'elle est voisine du bord; elle semble s'élargir à mesure qu'elle se rapproche du milieu de sa course apparente. Elle décroît ensuite pour disparaître comme un simple trait. Tout porte à croire que les taches sont des dépressions.

Les trajectoires *apparentes* ne sont pas les trajectoires *instantanées*; ce sont des ellipses déformées en raison du déplacement relatif de la Terre et du Soleil. En raison du mouvement du pôle de rotation solaire sur le disque, la trajectoire réelle est constituée par des arcs d'une série d'ellipses dont les centres ne coïncident pas.

Je sortirais du cadre de cet ouvrage en étudiant la constitution des taches et les théories par lesquelles on cherche à expliquer les variations de la vitesse avec la latitude. Je dirai seulement quelques mots de la constitution générale solaire, pour fixer les idées du lecteur.

158. **Constitution du Soleil.**

1° — Le Soleil est une masse incandescente solide ou liquide *donnant un spectre continu*, entourée par une atmosphère de vapeurs qui, par leur absorption, produisent dans le spectre des raies noires, en supprimant les radiations qu'elles émettent elles-mêmes. Comme elles absorbent plus qu'elles n'émettent, l'effet global se traduit par des vides dans le spectre continu. On a catalogué plus de 20 000 raies noires.

En identifiant ces raies aux spectres de raies *brillantes* données par les corps que nous connaissons portés à l'état de vapeur, on conclut que nos métaux et quelques métalloïdes (hydrogène, silicium, carbone,...) entrent dans la matière solaire. En définitive si notre globe était à la température du Soleil, il donnerait précisément le spectre solaire à un observateur éloigné. Au reste on a toujours admis entre le Soleil et les planètes une communauté d'origine, par suite une communauté de constitution.

2° — Réalisons une image réelle du disque solaire ; étudions les spectres de ses diverses parties en plaçant la fente du spectroscope en diverses régions de l'image réelle. Ces spectres ne sont pas absolument identiques, mais les différences s'expliquent par le principe de Döppler-Fizeau (§ 65). Le bord oriental s'approche de nous, le bord occidental s'en éloigne.

Pour fixer les idées, donnons au Soleil un rayon de 695·500 kilomètres, c'est-à-dire une circonférence équatoriale 4·367·740 kilomètres.

Admettons pour la durée de révolution sidérale :

$$25{,}35 \text{ jours} = 2{\cdot}190{\cdot}140 \text{ secondes.}$$

Nous trouvons une vitesse linéaire équatoriale presque exactement de 2 kilomètres par seconde. La différence des vitesses du bord oriental et du bord occidental parallèlement à la droite qui joint la Terre au Soleil, est donc de 4 kilomètres. A la précision des mesures spectroscopiques, c'est bien ce que l'expérience indique.

Conformément à ce que nous disons ci-dessus, il semble que la période de rotation solaire croît de 25 à 30 jours quand on passe de l'équateur aux parallèles ayant 75° de latitude.

L'avantage de la méthode spectroscopique pour la détermination de la vitesse, est de pouvoir continuer les expériences jusqu'à des latitudes élevées (75°), dans des régions où l'on ne voit pas de taches. Son inconvénient est l'absence de précision qui résulte du déplacement minime des raies spectrales.

159. **Chromosphère, couronne.**

Pour fixer les idées rappelons que le diamètre apparent moyen du Soleil est de 32 minutes.

1° — Autour du globe solaire liquide ou solide, dont la surface constitue la *photosphère*, existe une couche sphérique mince, brillante, de

couleur rose qui est la *chromosphère*. La chromosphère est naturellement invisible dans la partie qui se projette sur le disque solaire; elle apparaît donc comme un mince anneau d'une vingtaine de secondes d'épaisseur, entourant le disque solaire. Elle a été d'abord révélée par les éclipses totales de Soleil qui suppriment la lumière dans laquelle elle est ordinairement noyée.

De la chromosphère se détachent des flammes brillantes, également roses, qui sont les *protubérances*.

Autour de la chromosphère est la *couronne* qui, en projection se présente sous forme d'un anneau blanchâtre, d'éclat décroissant de la circonférence intérieure à la périphérie. Elle s'étend fort loin du Soleil : la largeur de sa partie la plus brillante est de 4 à 5 minutes; son épaisseur totale peut dépasser une trentaine de minutes, c'est-à-dire un diamètre solaire. Elle est de forme assez irrégulière; elle projette des *aigrettes*, *jets*, *banderolles*, qui forment autour du Soleil une espèce de *gloire*.

La chromosphère et la couronne constituent l'atmosphère absorbante dont les raies noires du spectre solaire imposent l'existence.

2° — Le spectre de la chromosphère est continu, mais complété par des raies fines très brillantes dues surtout à l'hydrogène; la chromosphère est constituée principalement par des gaz.

Le spectre de la couronne est également continu, mais offre des raies faibles d'origine inconnue; la couronne est constituée surtout par des particules.

Ce n'est pas ici le lieu d'exposer les résultats obtenus par l'étude de ces spectres; nous sortirions du cadre de ce volume.

PLANÈTES ET COMÈTES

CHAPITRE I

GRAVITATION UNIVERSELLE

Admettons que les corps s'attirent proportionnellement à leurs masses et en raison inverse du carré de leurs distances. Réduisons ces masses à des points; cherchons quelles doivent être leurs trajectoires dans des hypothèses simples. Elles sont certainement légitimes comme premières approximations parce que les distances mutuelles des astres sont considérables par rapport à leurs dimensions.

160. Vitesses radiale et circulaire d'un point attiré par un centre fixe.

Le point de masse m est attiré par un centre fixe de masse M, en raison inverse du carré de la distance mutuelle r, et proportionnellement au produit des masses. La force d'attraction, dirigée suivant la droite qui joint les points (*force centrale*), a pour expression :

$$F = G\frac{mM}{r^2};$$

G s'appelle la *constante de la gravitation.*

1° — MOUVEMENT CIRCULAIRE.

Pour que le point m décrive un cercle de rayon r autour du point fixe M, il faut qu'à chaque instant l'accélération géométrique g nécessaire à ce que le point décrive le cercle, égale l'attraction.

Dans les triangles semblables $m'AB$ et $Mm'm$, on a :

$$\frac{gt}{v} = \frac{\overline{mm'}}{r}, \qquad \overline{mm'} = \Omega rt, \qquad v = \Omega r,$$

Ω est la vitesse angulaire. D'où la formule classique :

$$g = \Omega^2 r.$$

Nous représenterons par Φ la vitesse linéaire *circulaire*; on a :

$$g = \Omega^2 r = \Phi_c^2 : r.$$

La condition d'équilibre est :

$$g = \frac{\Phi_c^2}{r} = \frac{GM}{r^2}, \qquad \Phi_c = \sqrt{\frac{GM}{r}}.$$

Φ_c est la vitesse que doit posséder le mobile à la distance r pour décrire un cercle autour du point attirant ; on l'appelle *vitesse circulaire*.

Si à la distance r, normalement à la droite qui le joint au point attirant M, on impose au mobile m la vitesse Φ_c, il décrit un cercle.

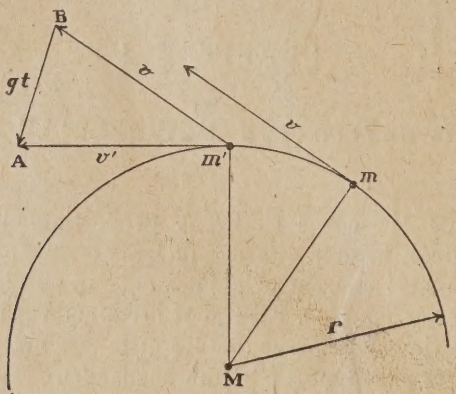


Fig. 135.

Si on lui impose une vitesse inférieure, il se rapproche du point M ; nous verrons qu'il décrit une ellipse.

Si on lui impose une vitesse supérieure, il s'éloigne du point M ; il décrit une ellipse, une parabole ou une hyperbole.

2° — MOUVEMENT RECTILIGNE.

Dire que la force sur l'unité de masse est $GM : r^2$, c'est dire qu'il existe un potentiel $GM : r$. Le travail effectué *par* la force attirante est égal à l'*accroissement* de cette quantité.

Appliquons le théorème des forces vives.

Soit V et v, les vitesses aux distances R et r. On a :

$$\frac{v^2 - V^2}{2} = GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right).$$

Deux cas intéressants sont à considérer.

a) DÉPART DE L'INFINI.

Si le point part de l'infini avec une vitesse nulle ($R = \infty$, $V = 0$), il parvient à la distance r avec la vitesse.

$$\Phi_p = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{2}\,\Phi_c.$$

La vitesse Φ_p s'appelle vitesse *parabolique* pour des raisons que nous verrons plus loin.

Elle est $\sqrt{2} = 1{,}414$ fois plus grande que la vitesse circulaire.

A une distance quatre fois, neuf,... fois plus grande du point M, la vitesse parabolique est deux, trois,... fois plus petite.

b) Départ d'un point quelconque.

Le point *m* part sans vitesse de la distance R.

On demande le temps qu'il met pour atteindre le point attirant M.

On a : $$v^2 = 2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right);$$

$$v = -\frac{dr}{dt}, \qquad dt = -\sqrt{\frac{R}{2GM}}\,\frac{r\,dr}{\sqrt{Rr - r^2}}.$$

Intégrons cette équation. On a identiquement :

$$\int \frac{r\,dr}{\sqrt{Rr - r^2}} = \int \frac{R\,dr}{2\sqrt{Rr - r^2}} - \sqrt{Rr - r^2}.$$

Intégrons entre $r = R$ et $r = 0$. Rappelons qu'on a :

$$\int \frac{dr}{\sqrt{2br - r^2}} = \arccos\frac{r - b}{b}.$$

On trouve aisément :

$$\tau = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\,\frac{R\sqrt{R}}{GM}.$$

Pour avoir une idée concrète de ce temps, comparons-le au temps T que met le mobile à parcourir le cercle de rayon *r* avec la vitesse Φ_c correspondante :

$$T = \frac{2\pi r}{\Phi_c} = \frac{2\pi R\sqrt{R}}{MG}. \qquad \text{D'où :} \qquad \tau = \frac{T}{4\sqrt{2}} = 0{,}177.\,T$$

161. Application à la Terre.

1° — La Terre décrit autour du Soleil une trajectoire plane sensiblement circulaire dont le rayon vaut 149·300·000 kilomètres.

La vitesse moyenne linéaire (*vitesse circulaire*) est environ :

$$\Phi_c = 29{\cdot}450 \text{ mètres à la seconde.}$$

D'où pour la *vitesse parabolique*, à une distance du Soleil égale à la moyenne distance terrestre :

$$\Phi_p = 42 \text{ kilomètres.}$$

Si brusquement la Terre était arrêtée sur sa trajectoire et tombait sur le Soleil, elle y arriverait en un temps égal aux 177 millièmes de l'année, soit environ 64 jours 10 heures.

2° — Calculons la vitesse qu'aurait un mobile partant de l'infini et arrivant sur la Terre, à supposer nuls les frottements.

Appliquons la formule :

$$v = \sqrt{2GM : r} ;$$

r est ici le rayon terrestre.

L'intensité de la pesanteur à la surface terrestre est $9^m,81$. D'où :

$$\frac{GM}{r^2} = 9{,}81 \text{ mètres}, \qquad v = \sqrt{19{,}62 \,.\, r}.$$

Le rayon moyen terrestre est 6 371 kilomètres $= 6{\cdot}371{\cdot}000$ mètres.

D'où $v = 11{\cdot}180$ mètres à la seconde $= 11{,}18$ kilomètres.

Inversement pour renvoyer un point à l'infini, il faut (abstraction faite des frottements) lui communiquer une vitesse d'un peu plus de 11 kilomètres.

162. **Loi des aires.**

Soit la masse m punctiforme attirée par la masse M fixe également

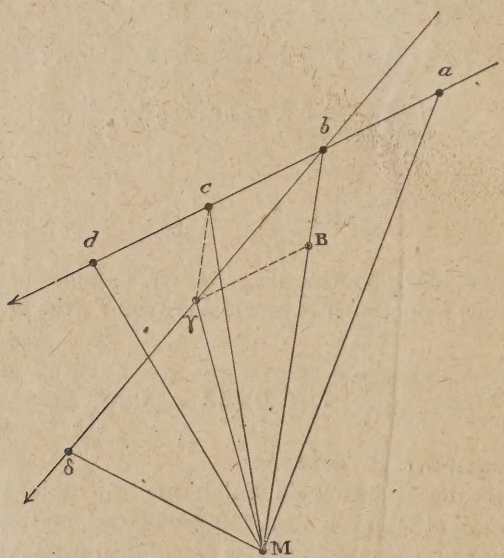


Fig. 136.

punctiforme. Quelle que soit la loi d'attraction, pourvu que la force soit dirigée suivant Mm (*force centrale*), les aires balayées par la droite Mm sont proportionnelles aux temps.

Voici la démonstration de ce théorème.

Je remarque d'abord que si l'attraction de M est nulle, le point m décrit la droite *abcd* d'un mouvement uniforme : *la proposition s'applique.* En effet les triangles *a*M*b*, *b*M*c*,... sont égaux comme ayant même base et même hauteur.

Brusquement au passage par *b*, je communique à la masse m une

vitesse supplémentaire *quelconque en grandeur mais dirigée suivant* bM. Je dis que les aires balayées pendant l'unité de temps restent les mêmes que précédemment; le coefficient de proportionnalité n'a pas changé.

En effet la vitesse résultante des vecteurs bc et bB est $b\gamma$: le point γ est sur une parallèle à bM. Donc les triangles Mbc et Mγb sont égaux.

Le mobile se déplace maintenant suivant la loi des aires le long de la droite $b\delta$, l'attraction de M restant nulle.

Je rétablis l'attraction de M. Quelle qu'elle soit, elle produit des changements de vitesse dirigés suivant Mm. Donc le théorème est démontré.

La réciproque est évidente : si la vitesse brusquement communiquée au passage par le point b n'est pas parallèle à bM, les aires des triangles bMc et bMγ ne sont plus égales.

Il résulte de la démonstration précédente que si la force exercée par M sur m est attractive, la trajectoire de m tourne sa concavité vers M; si la force est répulsive, la trajectoire est convexe vers M.

163. Trajectoires elliptiques, paraboliques, hyperboliques.

1° — Abordons le cas général du mobile lancé suivant une direction quelconque et attiré en raison inverse du carré de la distance.

Soit BB′ un arc de trajectoire. Il n'y a aucune raison pour que le mobile sorte du plan MBB′; la trajectoire est donc plane. Soit r et θ les coordonnées polaires; le théorème des aires donne la condition :

$$dS = r^2\, d\theta = C dt, \qquad (1)$$

C est une constante; C : 2 est l'aire balayée dans l'unité de temps.

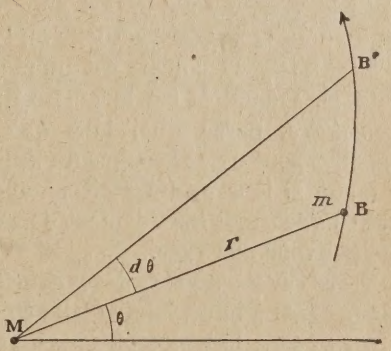


Fig. 137.

Le travail de la force F est égal à l'accroissement de la quantité $GmM : r$, c'est-à-dire à l'accroissement du potentiel GM : r, multiplié par la masse m sur laquelle agit la force.

Soit v la vitesse de m. Le théorème des forces vives donne :

$$d\,.\,\frac{mv^2}{2} = d\,\frac{GMm}{r}, \qquad v^2 = C' + \frac{2GM}{r}. \qquad (2)$$

En coordonnées polaires, on a :

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{C^2}{r^2} = C' + \frac{2GM}{r}, \qquad (3)$$

d'après les conditions (1) et (2). On tire de là :

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = C' + \frac{2GM}{r} - \frac{C^2}{r^2}, \qquad \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{C^2}{r^4}.$$

Divisant membre à membre ces deux équations, il reste :

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{C'}{C^2} r^4 + \frac{2GM}{C^2} r^3 - r^2. \qquad (4)$$

Comparons l'équation (4) aux équations différentielles des coniques (§§ 83 et suivants).

Le mobile décrit une conique : c'est une ellipse pour $C' < 0$, une parabole pour $C' = 0$, une hyperbole pour $C' > 0$.

La nature de la courbe ne dépend donc que de la vitesse v du mobile à la distance r du centre d'attraction ; la direction de la vitesse n'agit pas sur la nature de la conique.

2° — Précisons la signification de l'équation (2) à l'aide des résultats du § 160. Nous pouvons l'écrire :

$$v^2 = C' + \Phi_p^2$$

Si la vitesse actuelle est supérieure à la vitesse Φ_p (vitesse parabolique pour la distance actuelle r), la courbe est une hyperbole.

Si $v = \Phi_p$, la courbe est une *parabole* ; d'où le nom donné à cette vitesse. Quand M est la masse du Soleil, Φ_p s'appelle encore *vitesse cométaire*, parce que, tant qu'elles sont visibles, c'est-à-dire tant qu'elles sont assez proches du Soleil, les comètes voyagent à peu près comme si leur orbite était parabolique, même celles dont les trajectoires s'écartent notablement de cette courbe dans les parties que nous ne pouvons observer.

Nous savons que la vitesse cométaire vaut sensiblement 42 kilomètres pour r égal à la moyenne distance de la Terre au Soleil.

Si $v < \Phi_p$, la trajectoire est une ellipse.

La Terre possède une vitesse linéaire de moyennement de 29,5 kilomètres, inférieure par conséquent à la vitesse parabolique ou cométaire qui correspond à sa distance moyenne du Soleil.

Si nous passons du Soleil à un autre astre, la vitesse cométaire varie comme $\sqrt{M}$. La Terre ayant une masse 334·400 fois plus petite que celle du Soleil, la vitesse cométaire qui lui correspond à la même distance, est 577 plus petite ; elle vaut 73,66 mètres à la seconde.

A la distance de la Terre où est la Lune (qui est 389 fois plus proche de la Terre que le Soleil), la vitesse cométaire est 19,72 fois plus grande, soit 1 453 mètres à la seconde.

Comme terme de comparaison, rappelons que la Lune est éloignée de la Terre de 384·400 kilomètres ; elle fait un tour en $27^j\,7^h\,43^m\,11^s$ en moyenne. Sa vitesse linéaire moyenne sur son orbite est voisine de 1 017 mètres à la seconde, vitesse naturellement inférieure à la vitesse parabolique *relative à la Terre*.

3° — Identifions les équations différentielles des coniques avec l'équation (4) ci-dessus trouvée :

$$\frac{-1}{a^2(1-e^2)} = \frac{C'}{C^2}, \qquad \frac{\pm 1}{a(1-e^2)} = \frac{GM}{C^2}; \qquad \frac{1}{a} = \pm\frac{C'}{GM}.$$

L'équation (2) devient :

$$v^2 = \frac{2GM}{r} \pm \frac{GM}{a}, \qquad a = \pm\frac{r}{2}\frac{V^2}{V^2 - v^2} \qquad (5)$$

a étant toujours considéré comme positif, le signe supérieur correspond à $C' < 0$, c'est-à-dire à l'ellipse.

Les relations (5) expriment que *la vitesse en un point quelconque de l'ellipse est la même que si le mobile était parti sans vitesse du cercle de rayon 2a et était venu en sa position actuelle sous l'influence du centre d'attraction.*

Elles expriment encore que, *non seulement la nature de la conique, mais encore la grandeur du grand axe dépendent de la vitesse v à la distance r, et non de la direction de cette vitesse.*

164. Construction de la trajectoire.

Montrons que la trajectoire est complètement déterminée quand on

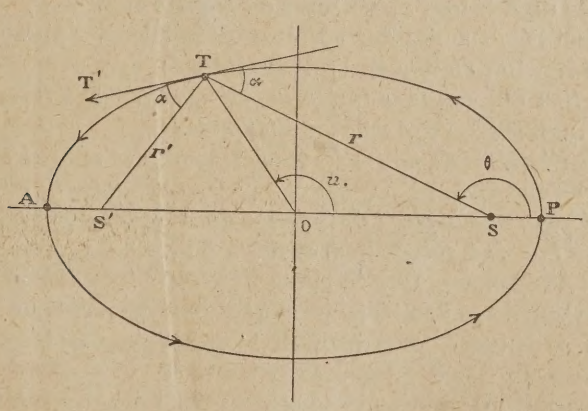


Fig. 138.

donne la vitesse en v grandeur et direction, la distance r et le paramètre GM.

La première équation (5) fournit la valeur du grand axe de l'ellipse; elle nous apprend de plus quelle est la nature de la conique.

Posons qu'il s'agit d'une ellipse.

Soit T le mobile, TT' sa vitesse, S le point attirant (Soleil).

Connaissant l'angle α, un théorème classique fournit la droite qui contient le second foyer.

Nous connaissons donc sa position S′, en vertu de l'équation :

$$r + r' = 2a.$$

Le grand axe de l'ellipse est SS′ ; d'où le périhélie P et l'aphélie A ; d'où l'excentricité : $e = \overline{SO} : a$.

L'anomalie vraie θ étant connue, on en déduit l'anomalie excentrique u par la formule (§ 84) :

$$\operatorname{tg} \frac{u}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}.$$

Connaissant l'époque t qui correspond aux anomalies θ ou u, on tire le temps τ de passage au périhélie par la formule :

$$\omega (t - \tau) = u - e \sin u.$$

Soit T la période, c'est-à-dire la durée d'une révolution.

En vertu de l'équation (1), on a :

$$2\pi ab = 2\pi a^2 \sqrt{1-e^2} = CT, \qquad GM = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}.$$

Les carrés des périodes de différents astres attirés par le même centre fixe sont comme les cubes des grands axes.

C'est la troisième loi de Képler.

165. **Lois de Képler ; hypothèse de Newton.**

1° — Voici l'énoncé des lois découvertes par Képler plus d'un siècle avant que Newton en donnât l'interprétation :

L'attraction des astres se fait proportionnellement à leurs masses et en raison inverse du carré de leurs distances.

I. *Les trajectoires de toutes les planètes sont des ellipses dont un des foyers est au Soleil.*

II. *Le rayon vecteur parti du Soleil et aboutissant à la planète, balaie des aires qui varient proportionnellement au temps.*

Ce résultat est conforme à la loi de Newton (§ 162), si l'on admet que l'action du Soleil sur une planète l'emporte énormément sur l'action des autres astres de notre système sur cette même planète ; ce qui implique que la masse du Soleil est énorme vis-à-vis de la masse des planètes. Les étoiles sont trop éloignées pour avoir une influence sensible.

III. *Les carrés des temps* T *employés pour une révolution par les différentes planètes, sont entre eux comme les cubes des grands axes des ellipses.*

Effectivement nous avons trouvé ci-dessus :

$$GM = \frac{4\pi^2 a^2}{T^2}. \qquad (1)$$

La masse du Soleil est naturellement la même pour les différentes planètes ; G est une constante absolue : donc $a^3 : T^2$ a la même valeur pour toutes les planètes, ce qui est précisément une autre forme de la loi de Képler.

2° — Voici un moyen simple de retenir la formule (1).

Appliquons-la à une trajectoire circulaire de rayon a.

Écrivons que la force d'attraction équilibre la force centrifuge. On a :

$$\frac{GM}{a^2} = \omega^2 a = \frac{4\pi^2}{T^2} a, \qquad \text{d'où :} \qquad GM =$$

ω est la vitesse angulaire $2\pi : T$.

Faisons un calcul approximatif de vérification pour la Lune.

Soit g la pesanteur à la surface de la Terre dont le rayon est R.

Sur la Lune à la distance a, elle est donc :

$$\frac{GM}{a^2} = g\frac{R^2}{a^2} = \frac{4\pi^2}{T^2} a.$$

Connaissant R, a et T, nous pouvons calculer la pesanteur à la surface de la Terre.

Les mesures trigonométriques donnent moyennement :

$$a : R = 60{,}27, \qquad R = 6{,}367 . 10^6 \text{ mètres.}$$

La durée de la révolution sidérale est

$$27^j\ 27^h\ 43^m = 39\,343 \times 60 \text{ secondes.}$$

On a donc :

$$g = \overline{60{,}27}^3 \frac{4\pi^2}{\overline{39\,343 \times 60}^2} 6{,}367 . 10^6 = 9{,}81 \text{ mètres.}$$

3° — Présentons ces considérations très simples d'une autre manière.

Cherchons quelle devrait être la vitesse d'un mobile pour tourner autour de la Terre supposée sphérique sans jamais tomber.

On néglige la résistance de l'air.

Nous devons écrire que l'accélération nécessaire pour le maintenir sur sa trajectoire circulaire de rayon R, est précisément égale à l'accélération de la pesanteur :

$$g = \omega^2 R = v^2 : R, \qquad v^2 = gR.$$

Le temps qu'il mettra à faire un tour est :

$$2\pi R : v = 2\pi R : \sqrt{gR} = 2\pi \sqrt{R : g} = 5\,039 \text{ secondes,}$$

soit 1 heure 24 minutes environ.

Appliquons maintenant la loi de Képler : elle donne la distance a : R de la Lune à la Terre évaluée en rayons terrestres. Elle est égale à :

$$\sqrt[3]{[27^j\ 27^h\ 43^m]^2 : [1^h\ 24^m]^2}.$$

On retrouve ainsi le nombre donné par l'expérience.

4° — Vitesses linéaires.

De la formule (1) nous tirons :

$$\frac{2\pi a}{T} = \sqrt{\frac{GM}{a}}.$$

La vitesse linéaire moyenne est en raison inverse de la racine carrée du grand axe de l'ellipse. A mesure que les planètes s'éloignent du Soleil, leur vitesse linéaire moyenne diminue.

166. **Mobilité du Soleil.**

1° — Le calcul précédent suppose le Soleil immobile.

Il n'en est évidemment pas ainsi : le Soleil tire sur la planète, mais la planète agit sur le Soleil.

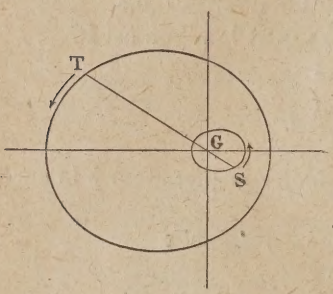


Fig. 139.

Résolvons donc le problème suivant : *Deux points matériels* T *et* S *s'attirent en raison inverse du carré de leur distance, et proportionnellement à leurs masses m et* M; *on demande le mouvement relatif par rapport au centre d'inertie commun* G *supposé fixe.*

Cette hypothèse est légitime puisque la résultante de toutes les forces appliquées au système est nulle. Supposer que le centre d'inertie est animé d'un mouvement uniforme ne change rien à la solution.

Posons :

$$\overline{GT} = \rho, \qquad \overline{GS} = \rho', \qquad TS = r.$$

On a :

$$m\rho = M\rho', \qquad r = \rho + \rho' = \rho\,\frac{m+M}{M} = \rho'\,\frac{m+M}{m}.$$

L'accélération de la Terre est :

$$G\,\frac{M}{r^2} = \frac{M^3}{(m+m)^2}\,\frac{G}{\rho^2}.$$

L'accélération du Soleil est :

$$G\,\frac{m}{r^2} = \frac{m^3}{(m+M)^2}\,\frac{G}{\rho'^2}.$$

Or ces accélérations passent par le point G qui, par hypothèse, est fixe. La théorie précédente est donc rigoureusement applicable.

Par suite la Terre décrit en un temps T une ellipse dont le point G occupe un des foyers et dont le grand axe a est donné par la formule :

$$a^3 = \frac{T^2}{4\pi^2}\,G\,\frac{M^3}{(m+M)^2}. \qquad (1)$$

Dans le même temps T, le Soleil décrit une ellipse semblable à la précédente, dont le point G occupe un des foyers et dont le grand axe a' est donné par la formule :

$$a'^3 = \frac{T^2}{4\pi^2}\,G\,\frac{m^3}{(M+m)^2}.$$

Cherchons quelle trajectoire la Terre décrit par rapport au Soleil. Il est évident que c'est une ellipse semblable aux deux précédentes, décrite dans le même temps T, et dont le Soleil occupe un des foyers. Son grand axe est :

$$a+a'=\sqrt[3]{\frac{T^2}{4\pi^2}G}\,\frac{m+M}{(m+M)^{\frac{2}{3}}}=\sqrt[3]{\frac{T^2}{4\pi^2}G}\,(m+M)^{\frac{1}{3}};$$

d'où :

$$(a+a')^3=\frac{T^2}{4\pi^2}G(m+M).$$

Comparant cette formule à celle du paragraphe précédent, on voit que tout se passe comme si le Soleil était fixe, mais comme si sa masse était $m+M$.

2° — Le calcul précédent est intéressant, parce qu'il nous apprend quelles sont les trajectoires des *étoiles doubles* lorsque les actions des autres astres sont négligeables par rapport à leurs actions mutuelles. Mais il n'était pas nécessaire pour obtenir le résultat énoncé en dernier lieu.

Réduisons en effet le Soleil et la Terre à deux points; rapportons le mouvement de la Terre à des axes mobiles, *mais de directions constantes*, passant par le centre du Soleil. Le mouvement des axes étant une simple translation, nous savons que l'accélération relative est égale à l'accélération absolue moins l'accélération d'entraînement.

Or le Soleil subit une accélération (absolue, qui va jouer le rôle d'accélération d'entraînement) dirigée dans le sens ST et égale à $m : r^2$, tandis que la Terre subit une accélération absolue dirigée dans le sens TS et égale à $M : r^2$. Si nous rapportons le mouvement de la Terre à des axes de direction invariable et passant par le Soleil, l'accélération de la Terre par rapport à ces axes (accélération relative) est égale à la différence des deux accélérations $M : r^2$ et $m : r^2$ qui sont de sens contraires. Cette résultante est donc égale à $(M+m)\,r^2$; elle est dirigée dans le sens TS.

Donc la Terre décrit autour du Soleil une ellipse dont celui-ci occupe un des foyers; tout se passe comme si le Soleil était fixe, mais comme si sa masse était augmentée de celle de la Terre.

Il résulte de là que la seconde loi de Képler n'est pas rigoureuse; la quantité $a^3 : T^2$, n'est pas la même pour toutes les planètes, elle dépend de la planète considérée. Mais le rapport $m : M$ est une si petit fraction (à peine égale à 1 : 1000 pour Jupiter, et voisine de 1 : 333 000 pour la Terre) qu'on peut le négliger à l'approximation des mesures actuelles.

167. Calcul du rapport des masses m de la Terre, M du Soleil à partir de l'intensité g de la pesanteur.

Assimilons la Terre à une sphère de rayon R composée de couches sphériques concentriques séparément homogènes.

Un théorème de Newton nous apprend que la pesanteur est la même que si toute la masse était au centre de la Terre. D'où la condition :

$$g = Gm : R^2.$$

Combinons-la avec la relation (1) du § 166 :

$$a^3 = \frac{T^2}{4\pi^2} G \frac{M^3}{m + M)^2}.$$

Posons $\alpha = R : a$; c'est ce que nous appelons plus loin la *parallaxe horizontale* du Soleil.

Négligeons m devant M. Il vient immédiatement :

$$\mu = \frac{m}{M} = \alpha^3 \frac{g}{R} \frac{T^2}{4\pi^2}, \qquad \alpha = \sqrt[3]{\frac{R}{g} \frac{4\pi^2}{T^2}} \sqrt{\mu}.$$

Calculons le coefficient de $\sqrt[3]{\mu}$.

De l'année sidérale T est la durée en secondes de temps moyen :

$$T = 86\,400 \times 365{,}2564$$

$$g = 9^m{,}81, \qquad R = 6{,}367 . 10^6 \text{ mètres.}$$

Exprimons α en secondes d'arc, ce qui revient à multiplier le second membre par : $4{,}848 . 10^{-6}$

On a :

$$\sqrt[3]{R : g} = 0{,}866 . 10^2$$

$$T = 31{,}56 . 10^6 \qquad \sqrt[3]{T^2} = 9{,}99 . 10^4$$

$$2\pi = 6{,}283, \qquad \sqrt[3]{4\pi^2} = 3{,}40.$$

D'où

$$\alpha = 609'' \sqrt[3]{\mu}.$$

Nous pouvons calculer μ si nous avons α ou inversement α si nous avons μ. Nous appliquons cette formule au paragraphe suivant et au § 169.

168. **Remarques sur quelques locutions vicieuces. Poids de la Terre vers le Soleil.**

1° — Il n'est pas rare de trouver dans les Astronomies populaires des articles intitulés : *Comment on pèse les Mondes?* J'imagine que leurs auteurs n'ignorent pas qu'ils écrivent une sottise; ils l'écrivent dans le besoin d'être sensationnels. Le plus curieux de l'affaire est que les métrologues de profession qui chipotent pour rien, tolèrent parfaitement de pareilles âneries, quand ils ne s'en rendent pas coupables.

Je suis donc forcé de rappeler des vérités élémentaires.

En soi, la Terre ne pèse ni beaucoup, ni peu; il est absurde de parler du poids de la Terre. Elle a une masse bien déterminée, répartie à chaque instant d'une manière déterminée. Sous l'action de cette masse, un kilogramme masse, placé en un lieu bien déterminé à l'intérieur ou à l'extérieur de la Terre, a une tendance à se déplacer dans une certaine direction : *il a un poids de grandeur et de direction bien déter-*

minées. Mais la Terre *comme un tout* n'a de poids ni petit ni grand : c'est une sottise de parler de son poids. Isolée dans l'espace et supposée immobile, elle n'ira ni à droite, ni à gauche, ni en haut, ni en bas : c'est l'énoncé même du principe de l'inertie.

Je ne sais si vraiment Archimède est coupable de la phrase célèbre : « Qu'on me donne un levier et un point d'appui, je soulèverai le monde » ; mais c'est une sottise mécanique dont on pourrait nous faire grâce. Il est navrant que la biographie d'un grand homme se ramène à une ânerie et une indécence. On se console en pensant que Virgile est actuellement connu de la masse des « lettrés » par les contresens de ses traducteurs : *Sunt lacrymæ rerum*.

A la vérité, sous l'action du Soleil, la Terre *pèse vers le Soleil* ; c'est dire qu'elle tend à se déplacer vers le Soleil. Mais ce poids varie en raison inverse du carré des distances ; son point d'application lui-même varie avec la distance : on ne peut donc pas dire d'une manière absolue que le poids de la Terre *vers le Soleil* est ceci ou cela. La valeur de ce poids dépend de la position de la Terre sur sa trajectoire.

2° — Pour fixer les idées, calculons la valeur moyenne du poids vers le Soleil d'un kilogramme-masse pris dans ou sur la Terre, puisqu'il ne s'agit que du poids moyen. Rien n'est plus facile, si nous connaissons la distance du Soleil à la Terre. Il nous suffit d'écrire que l'accélération moyenne due au Soleil est égale à la force centrifuge :

$$\gamma = \omega^2 a ;$$

ω est la vitesse angulaire de la Terre sur sa trajectoire annuelle :

$$\omega = \frac{2\pi}{365{,}25 \times 86\,400} .$$

Pour avoir γ en centimètres par seconde, il faut poser :

$$a = 149{\cdot}500{\cdot}000 \text{ kilomètres} = 149{,}5.10^6.10^3.10^2 \text{ centimètres},$$
$$a = 149{,}5.10^{11}.$$

D'où aisément : $\gamma = 0{,}59$ centimètre $= 5^{mm},9$.

La pesanteur g valant environ 981 centimètres, on a :

$$\frac{\gamma}{g} = \frac{0{,}59}{981} = \frac{1}{1\,660} = 0{,}000{\cdot}6.$$

Le poids du kilogramme-masse *vers le Soleil* est de 6 milligrammes poids environ.

L'accélération du Soleil sur une autre planète est à l'accélération sur la Terre en raison des inverses des carrés des distances.

On a le tableau suivant pour l'intensité de la pesanteur à la surface du Soleil et pour les accélérations à la surface des planètes dues à l'action solaire.

Soleil. . . .	268 mètres.	Jupiter . . .	0,20 millimètres.
Mercure . .	39,2 millimètres.	Saturne. . .	0,064 —
Vénus . . .	11,2 —	Uranus . . .	0,016 —
La Terre . .	5,9 —	Neptune . .	0,016 —
Mars.	2,6 —		

169. **Comparaison des masses du Soleil et des planètes.**

1° — Pour comparer à la masse M du Soleil, la masse m d'une planète *qui a un satellite*, il faut connaître les grands axes a et a' des orbites de la planète autour du Soleil, et du satellite autour de la planète, ainsi que les durées T et T′ des révolutions sur ces orbites.

Ce que nous avons dit de la planète par rapport au Soleil pouvant se répéter du satellite par rapport à la planète, on a :

$$GM = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}, \qquad Gm = \frac{4\pi^2 a'^3}{T'^2}; \qquad \frac{m}{M} = \left(\frac{a'}{a}\right)^3 \left(\frac{T}{T'}\right)^2.$$

2° — Appliquons à la Terre et à la Lune. Appelons R le rayon terrestre.

Introduisons les parallaxes horizontales moyennes du Soleil et de la Lune :

$$\alpha = R : a, \qquad \alpha' = R : a'. \qquad \text{Posons } m : M = \mu.$$

La formule s'écrit : $\mu = \left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)^3 \left(\frac{T}{T'}\right)^2$.

Les périodes sont :

$$T' = 27^j,32 \qquad T = 365^j,24 \qquad T : T' = 13,36.$$

Admettons pour parallaxes :

$$\alpha = 8'',80 \qquad \alpha' = 57'\,2'' = 3\,422'' \qquad \alpha' : \alpha = 389$$
$$1 : \mu = \overline{389}^2 : \overline{13,36}^2 = 329\,000.$$

Il existe naturellement sur μ toute l'incertitude dont α est affecté (voir plus loin, chap. v).

Associons la formule ci-dessus démontrée à la formule du § 167 :

$$\alpha = 609'' \sqrt{\mu}.$$

On trouve : $$\alpha' = \overline{609}\,(T : T')^{2:3},$$

formule extrêmement remarquable qui fournit la parallaxe de la Lune uniquement à partir de sa durée de révolution.

Posons $T : T' = 13,36 \qquad (T : T') = 2 : 35,63.$

D'où $\alpha' = 3\,449''$, au lieu du nombre exact $3\,422''$.

Nos formules ne sont pas rigoureuses : d'après le § 166, il faudrait écrire :

$$\frac{m + m'}{M + m} = \left(\frac{a'}{a}\right)^3 \left(\frac{T}{T'}\right)^2,$$

où m' est la masse du satellite.

La plupart des planètes ayant des satellites, on peut appliquer cette méthode : pour les autres planètes on utilise les perturbations; nous ne pouvons insister.

On trouve en fonction de la masse terrestre prise pour unité :

Mercure.	Vénus.	Mars.	Uranus.	Neptune.	Saturne.	Jupiter.
—	—	—	—	—	—	—
0,06	0,80	10	14	17	93	317

3° — Présentons les résultats précédents sous une forme concrète.

Supposons les trajectoires circulaires.

$GM : a^2$, est la force exercée par le Soleil sur l'unité de masse de la planète, c'est l'accélération de celle-ci.

Conformément au résultat rappelé au § 160, l'accélération est égale à $(4\pi^2 : T^2)a$, produit du carré de la vitesse angulaire par le rayon (force centrifuge). C'est, par définition, le double de la quantité dont la planète tombe sur le Soleil en une seconde.

Comparer les masses du Soleil et de la planète revient donc à comparer l'accélération due au Soleil, agissant sur un point quelconque de la planète, à l'accélération due à la planète, agissant sur un point quelconque de son satellite. C'est encore comparer les quantités dont en une seconde la planète tombe sur le Soleil et le satellite sur la planète.

170. **Influence de la résistance du milieu.**

Disons quelques mots de ce problème en raison de la solution paradoxale qu'il comporte.

Pour ne pas faire de l'algèbre inutile, soit un mobile de masse unité qui tourne autour d'un centre d'attraction de masse M *suivant une orbite circulaire*.

Soit ω la vitesse angulaire, v la vitesse linéaire, r le rayon de l'orbite.

L'équilibre exige qu'on ait :

$$\omega^2 r^3 = GM, \qquad v = \omega r = \sqrt{GM : r}. \tag{1}$$

L'équilibre exige donc que la vitesse linéaire v croisse à mesure que la distance r diminue.

Supposons que le milieu résiste faiblement et, par exemple, proportionnellement au carré de la vitesse.

La force à chaque instant qui s'oppose au mouvement, est ρv^2.

Pour chaque tour, son travail *négatif* est :

$$2\pi r . \rho v^2 = 2\pi\rho GM.$$

Écrivons que ce travail se retrouve dans la variation d'énergie potentielle du système et dans la variation de la force vive.

La force qui s'exerce sur le mobile est $GM : r^2$.

Pour une variation Δr de la distance, elle produit un travail $-(GM : r^2)\,\Delta r$, positif quand r décroît.

Il revient au même de dire que l'énergie potentielle est de la forme $E - GM : r$. Sa *diminution* est $-(GM : r^2)\,\Delta r$.

D'autre part l'énergie cinétique est $v^2 : 2$; sa *diminution* est $-v.\,\Delta v$.

Écrivons que l'énergie perdue par les frottements se retrouve dans la *diminution* de l'énergie potentielle et la *diminution* de l'énergie cinétique (qui à la vérité est un *accroissement*) :

$$2\pi\rho GM = -\frac{GM}{r^2}\Delta r - v\Delta v = -\frac{GM}{2r^2}\Delta r,$$

en vertu de l'équation (1).

D'où : $$-\Delta r = 4\pi\rho r^2, \quad v\Delta v = +2\pi\rho GM.$$

Ainsi l'existence d'un milieu résistant cause une diminution du rayon de l'orbite, ce qu'on pouvait prévoir; mais elle entraîne aussi une *augmentation* de la vitesse linéaire, *a fortiori* une diminution de la période. Le paradoxe est dans l'augmentation de l'énergie cinétique comme conséquence de la résistance du milieu.

Il va de soi que l'énergie potentielle diminue suffisamment pour compenser : d'une part le travail des frottements, de l'autre l'accroissement de l'énergie cinétique.

Que le lecteur fasse bien attention. L'existence du milieu résistant n'augmente pas la vitesse, c'est bien évident. Elle commence par diminuer la vitesse; mais l'équilibre dynamique devient alors impossible sur la trajectoire actuellement parcourue. Le mobile change donc de trajectoire. Sur la nouvelle trajectoire, la vitesse linéaire moyenne est plus grande que l'ancienne : voilà tout ce que dit le théorème.

A la vérité on n'a reconnu jusqu'à présent aucune trace d'une résistance de l'éther dans le mouvement des planètes et des satellites.

Plan invariable[1].

Dans ce qui précède je suppose qu'il existe seulement deux masses. Cherchons les propriétés générales des systèmes comprenant un nombre quelconque de masses.

171. Équations générales.

Écrivons les équations différentielles du mouvement de points agissants proportionnellement au produit de leurs masses et en raison inverse du carré des distances qui les séparent.

Le nombre de ces points est quelconque.

Appelons *potentiel* la quantité :

$$V = \Sigma \frac{m_i m_j}{r_{ij}},$$

1. A passer dans une première lecture.

rij est la distance des masses m_i; et m_j. On a par exemple :

$$r_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

La force que m_2 exerce sur m_1, a pour grandeur

$$m_1 m_2 : r_{12}^2;$$

elle est dirigée suivant $m_1 m_2$, dans le sens de m_1 à m_2.

Sa composante suivant l'axe Ox est donc, en grandeur et en signe :

$$X = \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \frac{x_2 - x_1}{r_{12}} = m_1 m_2 \frac{x_2 - x_1}{r_{12}^3} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}}\right).$$

De là résulte immédiatement que la force totale exercée sur m_1, a pour composantes :

$$X_1 = \frac{\partial V}{\partial x_1}, \qquad Y_1 = \frac{\partial V}{\partial y_1}, \qquad Z_1 = \frac{\partial V}{\partial z_1}$$

D'où les équations du mouvement de m_1 :

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial x_1}, \qquad m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial y_1}, \qquad m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial z_1}. \quad (1)$$

On écrira par analogie les équations relatives aux autres masses.

Rappelons quelques théorèmes généraux qui se déduisent immédiatement de la forme des équations (1), ou, ce qui revient au même, de l'hypothèse que les forces sont centrales et vont deux par deux égales et opposées.

2° — Mouvement du centre de gravité.

Les coordonnées X, Y, Z, du centre de gravité du système sont définies par les équations :

$$X \Sigma m = \Sigma mx, \qquad Y \Sigma m = \Sigma my, \qquad Z \Sigma m = \Sigma mz.$$

Différentions et substituons les quantités égales (1) ci-dessus trouvées :

$$\Sigma m . \frac{d^2 x}{dt^2} = \Sigma X, \qquad \Sigma m . \frac{d^2 Y}{dt^2} = \Sigma Y, \qquad \Sigma m . \frac{d^2 Z}{dt^2} = \Sigma Z. \quad (2)$$

D'après la nature même du problème on a :

$$\Sigma X = \Sigma Y = \Sigma Z = 0.$$

Comme exercice on vérifie ces relations sur les dérivées partielles de la fonction V; mais elles sont évidentes puisqu'à une force attractive exercée par m_1 sur m_2, correspond une force attractive égale et de sens contraire exercée par m_2 sur m_1. D'où les équations :

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2 Y}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2 Z}{dt^2} = 0,$$

qui intégrées donnent :

$$X = p + qt, \qquad Y = p' + q't, \qquad Z = p'' + q''t.$$

Le centre de gravité du système est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme.

Ainsi se trouve légitimé ce que nous disons plus haut du mouvement d'ensemble du système Solaire (§ 62).

172. Théorème sur les aires balayées.

1° — On a l'expression :

$$\Sigma m\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right)=\frac{d}{dt}\Sigma m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)=\Sigma(yZ-zY),$$

et deux analogues.

Or les forces attractives vont deux par deux, égales, de signes

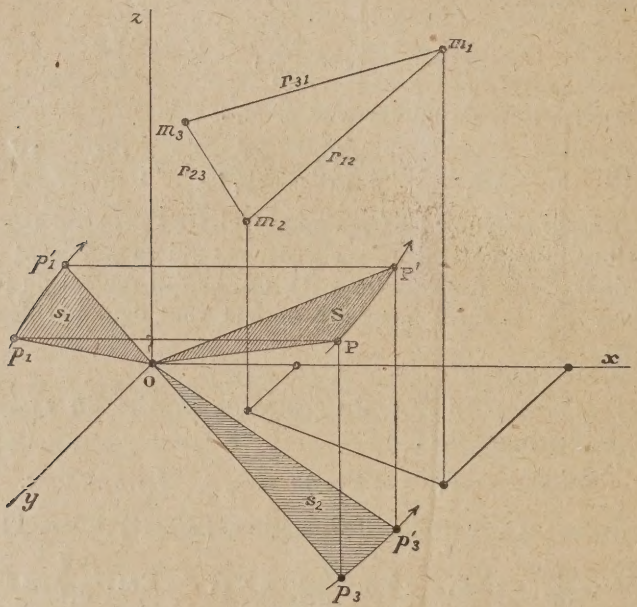


Fig. 140.

contraires et reposant sur la même droite. Donc la somme de leurs moments par rapport à un axe quelconque est nulle.

D'où l'équation :

$$\frac{d}{dt}\Sigma m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)=0,$$

et deux autres analogues qui, intégrées, fournissent le système :

$$\begin{aligned}\Sigma m(ydz-zdy)&=adt,\\ \Sigma m(zdx-xdz)&=bdt,\\ \Sigma m(xdy-ydx)&=cdt.\end{aligned}\qquad(3)$$

$ydz - zdy$, représente le double de l'aire Op_1p_1' que, dans le temps dt et sur le plan yz, balaie le vecteur Op_1 issu de l'origine O et aboutissant au point p_1 de coordonnées y, z. Les premiers membres des équations (3) représentent donc la somme des produits des masses par les aires que balaient sur les plans coordonnés les projections des vecteurs OP correspondants, allant de l'origine aux divers points P du système.

Cette somme varie proportionnellement au temps.

Comme les plans coordonnés sont quelconques, nous aboutissons à ce théorème fondamental : Quand un système se meut sous l'action de forces centrales résultant de l'attraction, la somme des produits des masses par les aires que balaient sur un plan quelconque fixe les projections des rayons vecteurs OP correspondants, allant d'un point O quelconque de ce plan aux points P du système, varie proportionnellement au temps.

2° — L'aire balayée sur un des plans coordonnés par la projection Op_1 du vecteur OP joignant l'origine O au point P du système, est évidemment la projection de l'aire S balayée dans l'espace par le vecteur OP. Soit m la masse du point P. Sur l'aire élémentaire S menons une normale que nous prenons de longueur $mSdt$. Faisons le même travail pour toutes les aires élémentaires balayées dans le temps dt par les divers rayons vecteurs OP. Composons tous les vecteurs ainsi définis en un vecteur Adt, dont les cosinus directeurs sont α, β, γ.

Nous obtenons la somme des produits des masses par les aires que balaient sur un plan quelconque les projections des vecteurs OP sur ce plan, en projetant le vecteur Adt sur la normale à ce plan.

En particulier les quantités adt, bdt, cdt, qui correspondent aux plans normaux à Ox, Oy, Oz, sont :

$$adt = A\alpha \,.\, dt, \qquad bdt = A\beta \,.\, dt, \qquad cdt = A\gamma \,.\, dt;$$

d'où :

$$a^2 + b^2 + c^2 = A^2.$$

3° — Évidemment la projection est maxima pour le plan Π normal au vecteur A : le plan Π correspond donc au maximum du produit des masses par les aires que balaient les projections des vecteurs correspondants.

Inversement supposons connues les quantités adt, bdt, cdt, relatives aux plans coordonnés ; les cosinus directeurs de la normale au plan Π sont :

$$\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \qquad \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \qquad \gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

α, β, γ, sont invariables : le plan Π reste donc toujours parallèle à lui-même, malgré les modifications qui interviennent dans le système d'où son nom de *plan invariable ou du maximum des aires.*

Pour tout plan normal au plan Π la somme des produits des masses

par les aires que balaient les projections des rayons vecteurs OP correspondants, est constamment nulle.

Si par exemple on prend pour plan II le plan yOz normal à Ox, on a : $b = c = 0$.

173. Théorème sur les forces vives.

Multiplions les équations (1) respectivement par dx_1, dy_1, dz_1.

Opérons de même pour les autres équations du système.

Additionnons toutes les équations obtenues.

Appelons v_1, v_2,... les vitesses des points du système.

On vérifiera la relation évidente :

$$m_1\left(\frac{d^2x_1}{dt^2}\,dx_1+\frac{d^2y_1}{dt^2}\,dy_1+\frac{d^2z_1}{dt^2}\,dz_1\right)=d\frac{m_1v_1^2}{2}.$$

D'où :

$$\Sigma d\frac{mv^2}{2}=dV, \qquad \Sigma\frac{mv^2}{2}=V-V_0. \tag{4}$$

Les variations de la fonction V sont numériquement égales aux variations de la force vive totale du système.

Ce résultat est évident *a priori* puisque l'augmentation du potentiel qui résulte du déplacement de l'un des corps suivant une certaine direction, mesure le travail de toutes les attractions qui s'exercent sur le corps suivant cette direction.

174. Plan invariable de Laplace.

Le plan du maximum des aires, qui est strictement invariable, nous est inconnu parce que nous ignorons les moments d'inertie des planètes. Nous connaissons bien leurs masses et leurs volumes ; mais le moment d'inertie dépend aussi de la loi de variation des densités en fonction de la distance au centre de la planète. Aussi dans le calcul de son plan invariable, Laplace ne faisait-il pas intervenir les aires engendrées par la rotation des planètes et du Soleil autour de leurs centres d'inertie.

Poinsot a déclaré justement qu'en cela la théorie de Laplace est incomplète.

Laplace suppose que les planètes sont des points massifs dont chacun serait chargé de la masse entière de la planète et de ses satellites ; il ne conserve donc que les mouvements des planètes autour du Soleil.

Il trouve ainsi un plan « invariable » faisant avec l'écliptique un angle de 1° 35′ en 1750 ; la longitude du nœud ascendant était alors 102° 57′.

De cette objection de Poinsot, fort exacte en théorie, est résultée une discussion avec Pontécoulant vive et intéressante (les savants français avaient alors des idées et des convictions ; leur république n'était pas celle *des camarades*). Pontécoulant remarque d'abord que le plan du maximum des aires et le plan de Laplace diffèrent nécessairement très

peu. En définitive, dit-il « la théorie du système du monde n'est qu'un grand problème d'approximation; c'est pour cela qu'il se refuse aux méthodes synthétiques et qu'il rentre dans le domaine de l'analyse »; ce qui est juste en un sens, mais était surtout une botte à l'égard de Poinsot. D'où Pontécoulant conclut que c'est trop d'avoir raison en théorie, si en pratique les deux modes de calcul conduisent au même résultat, ce qui est, *en ces matières*, la seule chose à considérer.

Poinsot ayant fait observer que la ligne d'intersection du plan « invariable » de Laplace et du vrai plan du maximum des aires se déplace nécessairement beaucoup, du fait que l'axe de la Terre n'a pas une direction immuable, Pontécoulant réplique que ça n'a pas d'importance, deux plans parallèles se coupant dans telle direction qu'on désire; l'intersection de deux plans *quasi parallèles* peut tourner d'un angle énorme sans pour cela qu'*en pratique* les deux plans n'en restent pas moins *parallèles*.

L'intérêt de cette discution est donc supérieur à la question du plan invariable, dont en définitive on ne se sert pas. Elle pose nettement la limite des exigences que les théoriciens doivent avoir pour les sciences appliquées, telles que l'Astronomie. Il est inutile d'être plus précis que les expériences ou les observations, surtout quand cette précision rend impossible l'application de la théorie même dont on s'occupe, ce qui est le cas pour le plan théorique du maximum des aires.

175. Généralisation des théorèmes précédents.

Cherchons ce que deviennent ces théorèmes quand l'origine est animée d'un mouvement de translation *rectiligne et uniforme*.

1° — Prenons donc une origine mobile de coordonnées ξ, η, ζ.

Rapportons les points du système à des axes de direction invariable passant par cette origine mobile; les nouvelles coordonnées sont x', y', z'.

On a : $x=\xi+x'$, $y=\eta+y'$, $z=\zeta+z'$,

avec les conditions :

$$\xi=ft, \quad \eta=f't, \quad \zeta=f''t, \qquad (1)$$

Elles expriment que le mouvement de l'origine est rectiligne et uniforme; elle coïncide avec l'origine fixe au temps 0.

Les relations (1) donnent immédiatement :

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}=\frac{d^2\eta}{dt^2}=\frac{d^2\zeta}{dt^2}=0; \qquad \xi d\eta-\eta d\xi=0,$$

et deux équations analogues.

De là résultent les équations :

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d^2x'}{dt^2}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d^2y'}{dt^2}, \qquad \frac{d^2z}{dt^2}=\frac{d^2z'}{dt^2}.$$

Soit X, Y, Z, les composantes de la force appliquée au point m de coordonnées x', y', z'; on a comme avec l'origine fixe :

$$m\frac{d^2x'}{dt^2}=X, \qquad m\frac{d^2y'}{dt^2}=Y, \qquad m\frac{d^2z}{dt^2}=Z.$$

Or que les axes soient fixes ou entraînés d'un mouvement rectiligne et uniforme, il est clair qu'à chaque instant, dans le système de points agissants que nous considérons, la somme des composantes suivant un axe quelconque est nulle, la somme des moments des forces par rapport à un axe quelconque est également nulle.

Les théorèmes des §§ 172 et 173 subsistent donc.

En particulier nous avons vu que pour le système uniquement soumis à des forces intérieures centrales, le centre de gravité se meut d'un mouvement rectiligne et uniforme. Le théorème des aires subsiste donc quand on prend ce centre pour origine mobile des coordonnées.

2° — Passons au théorème des forces vives.

La vitesse vraie v d'un point et sa vitesse apparente v' sont définies par les équations :

$$v^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2, \qquad v'^2=\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz'}{dt}\right)^2.$$

La différence est :

$$\Delta^2=v^2-v'^2=\varphi^2+2\left(f\frac{dx'}{dt}+f'\frac{dy'}{dt}+f''\frac{dz'}{dt}\right),$$

en posant $\varphi^2=f^2+f'^2+f''^2$; c'est le carré de la vitesse constante de l'origine mobile.

D'où : $$d(m\Delta^2)=2\left(fm\frac{d^2x'}{dt^2}+f'm\frac{d^2y'}{dt^2}+f''m\frac{d^2z'}{dt^2}\right).$$

En vertu des relations ci-dessus démontrées, il vient :

$$\Sigma d(m\Delta^2)=0, \qquad d\Sigma\frac{mv^2}{2}=d\Sigma\frac{mv'^2}{2}.$$

Ainsi à chaque instant la variation de la force vive réelle est égale à la variation de la force vive apparente.

D'autre part le potentiel V ne dépend que des positions relatives des points agissants; donc peu importe qu'on ajoute respectivement la même quantité à leurs x, y, z.

Rapprochons ces deux résultats; nous concluons que l'équation (4) subsiste appliquée aux vitesses apparentes et aux coordonnées x', y', z'.

176. Transformation des équations dans l'hypothèse d'un corps de masse prédominante. Fonction perturbatrice.

1° — Quand un des corps du système a une masse prédominante, il est commode de le prendre pour origine des coordonnées.

Soient ξ, η, ζ, les coordonnées de notre nouvelle origine mobile, dont la masse est m. Les coordonnées des autres masses m_1, m_2,... sont donc :

$$\xi + x_1,\ \eta + y_1,\ \zeta + z_1; \qquad \xi + x_2,\ \eta + y_2,\ \zeta + z_2; \ldots.$$

Posons : $r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, \qquad r_2^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2;$

$$r_{12}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2.$$

Des hypothèses sur la nature des forces agissantes, résultent immédiatement les équations du mouvement du corps m :

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \Sigma \frac{m_1 x_1}{r_1^3}, \qquad \frac{d^2\eta}{dt^2} = \Sigma \frac{m_1 y_1}{r_1^3}, \qquad \frac{d^2\zeta}{dt^2} = \Sigma \frac{m_1 z_1}{r_1^3}.$$

Posons : $$V = \Sigma \frac{m_1 m_2}{r_{12}}.$$

Les équations du mouvement du corps m_1 sont :

$$\frac{d^2(\xi + x_1)}{dt^2} - = \frac{m x_1}{r_1^3} + \frac{1}{m} \frac{\partial V}{\partial x_1},$$

et deux autres analogues.

En vertu des conditions ci-dessus, elles s'écrivent :

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{m x_1}{r_1^3} + \Sigma \frac{m_1 x_1}{r_1^3} = \frac{1}{m_1} \frac{\partial V}{\partial x_1},$$

et deux autres analogues.

2° — Fonction perturbatrice.

Supposons l'existence d'une masse principale m, d'une masse agie m_1 et d'autres masses beaucoup plus petites m_2, m_3,... produisant des perturbations. Posons :

$$m + m_1 = \mu, \qquad R = \Sigma m_2 \left(\frac{1}{r_{12}} - \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{r_2^3} \right).$$

On vérifiera que les équations du mouvement de m_1 sont :

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{\mu x_1}{r_1^3} = \frac{\partial R}{\partial x_1}.$$

On a deux équations analogues en y_1 et z_2.

Si les masses m et m_1 étaient seules, on aurait simplement :

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \mu \frac{x_1}{r_1^3} = 0.$$

L'effet des masses perturbatrices m_2, m_3,... (s'exprime en ajoutant dans les seconds membres des équations du mouvement, respectivement les dérivées partielles d'une fonction R dite *perturbatrice*.

Le grand avantage qu'on trouve à expliciter la fonction perturbatrice, est la possibilité de la développer en une série de termes périodiques, les intégrations sont immédiates.

CHAPITRE II

MOUVEMENT DES PLANÈTES

177. Position du plan de l'orbite, position de l'ellipse parcourue.

1° — Suivant ma méthode habituelle, je partirai du résultat tel que l'ont fourni des siècles de tâtonnements; je montrerai comment on le vérifie. Je transcris les lois de Képler.

I. Les planètes parcourent (approximativement) des trajectoires planes, elliptiques, dont le Soleil occupe un des foyers.

Le sommet de l'ellipse le plus voisin du Soleil est le *périhélie*; le sommet le plus éloigné est l'*aphélie*.

II. Les planètes se meuvent sur leurs trajectoires dans le sens direct suivant la loi des aires.

III. Le rapport $a^3 : T^2$ du cube des grands axes des ellipses (moyennes distances au Soleil) au carré de la durée du parcours complet est une constante.

Nous prendrons pour plan de référence le plan de la trajectoire de l'une de ces planètes, la plus importante pour nous, la Terre. Nous savons que ce plan, *l'écliptique*, est quasi fixe par rapport aux étoiles.

2° — Pour définir le plan de la trajectoire d'une autre planète, il faut donner la *ligne des nœuds* et *l'inclinaison*.

La ligne des nœuds SN est l'intersection du plan de l'orbite et de l'écliptique; elle passe par le Soleil S. Pour fixer sa position, on prend pour origine la ligne des équinoxes *du côté du point vernal*; on prend la ligne des nœuds *du côté du nœud ascendant*, c'est-à-dire du point N où la planète A passe de la face sud à la face nord de l'écliptique.

L'inclinaison est un angle très petit pour toutes les planètes; il est donc déterminé sans ambiguïté. Les planètes tournent toutes dans le même sens (sens direct). L'inclinaison est l'angle du plan de l'orbite avec le plan de l'écliptique; les demi-plans qui définissent l'angle, sont pris, à partir des nœuds dans le sens direct, sens du mouvement pour les deux astres, Terre et planète.

La position de l'astre A sur sa trajectoire est donnée par l'anomalie θ comptée à partir du périhélie P dans le sens direct.

Le périhélie est lui-même défini par l'angle θ_0 avec la ligne des nœuds, angle compté lui aussi dans le sens direct.

L'angle du vecteur SA avec la ligne des nœuds est donc $\theta + \theta_0$.

A la place de l'angle θ_0, on peut donner la longitude héliocentrique

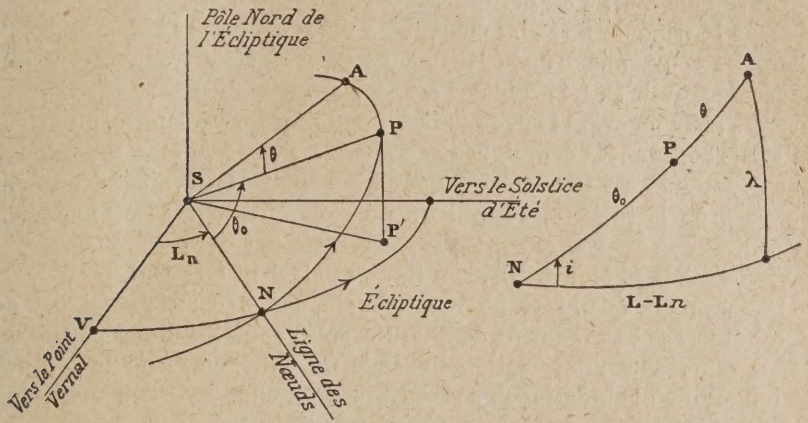


Fig. 141.

du périhélie comptée à partir du point vernal jusqu'à la projection P' du périhélie sur l'écliptique.

178. **Coordonnées écliptiques.**

1° — Coordonnées écliptiques géocentriques.

Soit deux étoiles α, β, dont on connaît les coordonnées écliptiques

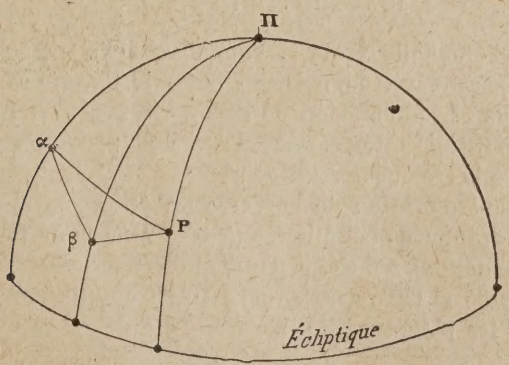


Fig. 142.

géocentriques (§ 17) longitude et latitude; Π est le pôle de l'écliptique.

Pour trouver les coordonnées de l'astre P, on mesure les distances αP, βP, avec un micromètre monté sur une lunette parallactique, ou

tout autre instrument. On connaît les arcs $\overline{\Pi\alpha}$, $\overline{\Pi\beta}$, complément des latitudes des étoiles, ainsi que l'angle $\alpha\Pi\beta$ différence de leurs longitudes. On calcule $\alpha\beta$, et l'angle $\alpha\beta H$.

Dans le triangle $\alpha\beta P$, on connaît les trois côtés.

On calcule $\alpha\beta P$; d'où par différence $\Pi\beta P$.

Dans le triangle $\Pi\beta P$, on connaît les côtés $\alpha\beta$, βP et l'angle compris; d'où $P\Pi$ complément de la latitude de P, et $\beta\Pi P$ différence des longitudes de β et de P. Le problème est résolu.

C'est ainsi qu'avant l'introduction des lunettes méridiennes, on calculait les coordonnées écliptiques géocentriques des planètes.

La méthode est très précise quand les étoiles de comparaison sont voisines de la planète, surtout quand elles sont parmi les fondamentales.

Associé à la photographie, son emploi redevient fréquent.

Pour savoir quand et où une planète passe dans l'écliptique, on détermine ses coordonnées écliptiques pour deux positions encadrant le passage. Par interpolation linéaire, on a le temps où la latitude s'annule; d'où la longitude géocentrique du nœud.

2° — LONGITUDE ET LATITUDE HÉLIOCENTRIQUES.

On appelle longitude et latitude héliocentriques les coordonnées écliptiques sphériques habituelles dites *géocentriques* (§ 18), mais pour lesquelles le Soleil est pris comme origine des coordonnées. Elles sont représentées sur la petite figure 141 à droite; L_n est la longitude de la ligne des nœuds, L la longitude de l'astre A.

De ce que la trajectoire est plane résultent les formules :

$$\sin\lambda = \sin i \,.\, \sin(\theta + \theta_0), \qquad \operatorname{tg}(L - L_n) = \cos i \,.\, \cos(\theta + \theta_0),$$
$$\operatorname{tg}\lambda = \operatorname{tg} i \,.\, \sin(L - L_n).$$

Connaissant l'anomalie vraie θ, connaissant l'angle θ_0 du périhélie avec le nœud ascendant, connaissant enfin la longitude de L_n de la ligne des nœuds et l'inclinaison de l'orbite, nous pouvons calculer la longitude et la latitude héliocentriques de l'astre; elles doivent satisfaire identiquement à la troisième relation.

Le changement d'origine de la Terre au Soleil ne modifie pas les valeurs des coordonnées écliptiques (à 180° près pour la longitude si l'astre est très éloigné), s'il s'agit d'une étoile.

Elle les modifie si l'astre est proche; c'est ce que nous préciserons plus loin pour les planètes (§ 182).

179. Conjonctions et oppositions.

On dit qu'un astre est, par rapport à la Terre, en *conjonction* ou en *opposition*, quand le Soleil, la Terre et l'astre sont dans un même plan normal à l'écliptique.

Prenons pour tableau l'écliptique; représentons schématiquement par des cercles les projections des trajectoires sur l'écliptique.

La trajectoire de l'astre A est extérieure à celle de la Terre. Il est en *conjonction* en A′, du même côté que le Soleil par rapport à la Terre; il est en *opposition* en A, de l'autre côté.

La trajectoire de l'astre B est intérieure à celle de la Terre; il ne peut être en opposition. On distingue la *conjonction inférieure* (sa projection B passe entre la Terre et le Soleil), et la *conjonction supérieure* (la projection B′ passe au delà du Soleil).

Les conjonctions et les oppositions ont une importance capitale

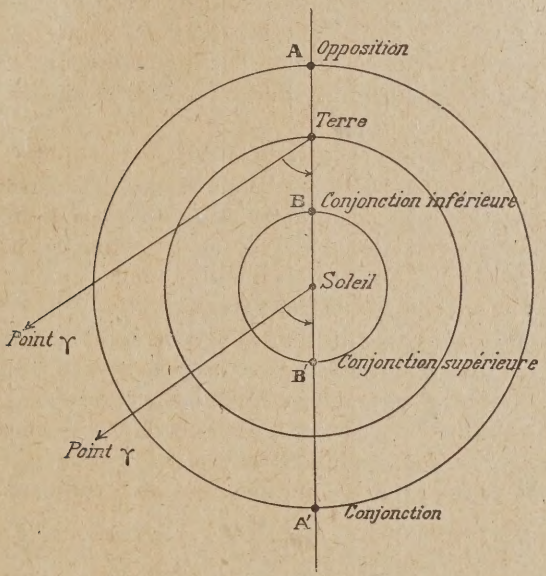


Fig. 143.

puisque, sans rien savoir des distances relatives, on est assuré que la longitude géocentrique de la planète diffère de sa longitude héliocentrique de 0° ou de 180°.

Les longitudes géocentriques et héliocentriques sont égales pour les astres A, B′, A′; elles diffèrent de 180° pour l'astre B.

Pour calculer le temps de l'opposition d'une planète, on détermine (par la mesure des ascensions droites et déclinaisons) un certain nombre de longitudes géocentriques voisines de l'opposition (§ 18); on calcule pour les mêmes temps les longitudes géocentriques du Soleil. Par interpolation linéaire ou graphique, on cherche le temps pour lequel la longitude de la planète et celle du Soleil diffèrent de 180°. On a par le fait la longitude héliocentrique de l'opposition. C'est ainsi qu'ont été déterminés les éléments des oppositions que nous utiliserons plus loin.

Même méthode pour les conjonctions. On cherche le temps pour lequel les longitudes sont égales.

180. Détermination de la ligne des nœuds.

1° — J'emprunte mes chiffres à l'abbé La Caille; comme ils ne sont que pour fixer les idées, je supprime les secondes.

Le 14 mai 1747, à $10^h\,51^m$ de temps vrai, Mars passa dans l'écliptique : nous avons dit plus haut comment le lieu et l'heure du passage sont

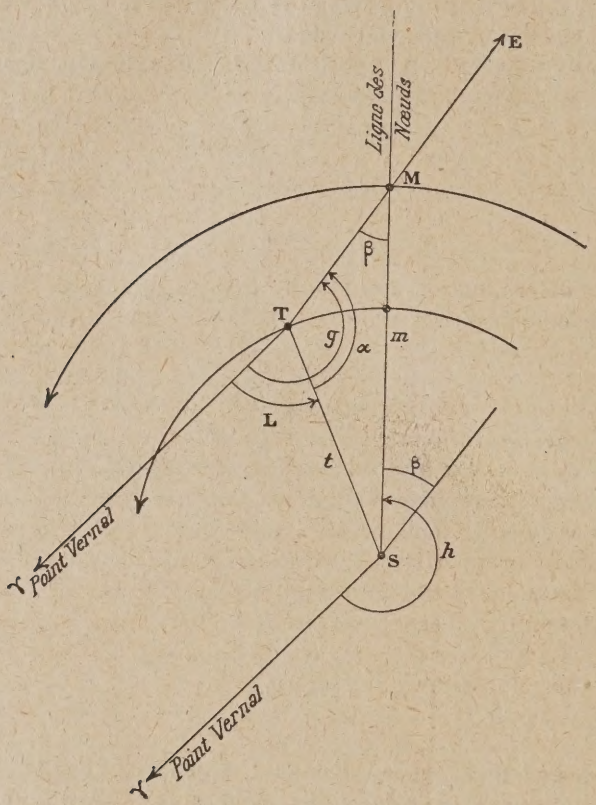


Fig. 144.

déterminés. L'observation ne se fait pas juste à cette heure, mais on l'y ramène par interpolation.

Mars est par définition sur la ligne des nœuds SM de son orbite : les trois astres Soleil S, Terre T, Mars M sont dans le plan de l'écliptique. Il s'agit de déterminer la direction de la droite MS, menée de la planète au Soleil; la direction TM par rapport à la Terre est essentiellement variable et n'a rien d'intéressant.

Or l'observation donne seulement la direction TM. Elle nous apprend qu'à l'instant où Mars est dans l'écliptique, elle se projette sur une certaine étoile E. Autrement dit sa longitude *géocentrique* a une certaine valeur qui était $g = 216° 15'$.

Au même instant la longitude *géocentrique* du Soleil était $L = 53° 38'$. D'où pour l'*angle d'élongation* : $\alpha = 162° 37'$.

2° — Soit t et m les rayons vecteurs menés du Soleil aux planètes :

$$m \sin \beta = t \sin \alpha.$$

Le rapport $m : t$ est variable d'un instant à l'autre puisque les deux astres décrivent des ellipses.

Pour parfaire un calcul approché, prenons le rapport des grands axes des orbites qui se déduit de la troisième loi de Képler :

$$m : t = 1{,}524, \qquad \beta = 11° 12'.$$

D'où enfin pour la longitude *héliocentrique* de la ligne des nœuds de Mars :

$$h = g + \beta = 227° 27'.$$

Dans cette détermination, il s'agit du nœud *descendant*.

La longitude héliocentrique du nœud *ascendant* est donc :

$$\theta = 47° 27'$$

Aujourd'hui cette longitude est $48° 47'$.

Les problèmes relatifs aux planètes présentent tous la même difficulté : *d'après le lieu de la sphère céleste sur lequel elles se projettent vues de la Terre, déterminer le lieu sur lequel elles se projettent vues du Soleil.* Les lois de Képler, très simples, sont *héliocentriques*; c'est au Soleil qu'il faut rapporter les trajectoires des planètes.

3° — Les lignes des nœuds de Mercure et de Vénus, dont les orbites sont comprises entre la Terre et le Soleil, se déterminent immédiatement lors des passages de ces planètes sur le Soleil. Quand leur projection sur l'écliptique coïncide avec le centre du Soleil, on a :

$$L = g, \qquad \alpha = \beta = 0, \qquad h = g + 180°.$$

Par exemple en 1697, la longitude héliocentrique du nœud ascendant de Mercure déterminé par son passage sur le Soleil était de $44° 41'$; elle est actuellement de $47° 9'$. L'augmentation séculaire est de $75'$. Mais n'oublions pas que la ligne des équinoxes qui sert d'origine à ces angles, rétrograde de $50'',26$ par an, soit de $84'$ par siècle. Conséquemment par rapport à un équinoxe fixe, la ligne des nœuds de Mercure, loin de se déplacer dans le sens direct, *rétrograde* de $9'$ environ par siècle.

181. Inclinaison du plan de l'orbite.

Connaissant la longitude héliocentrique h de la ligne des nœuds, voici la méthode la plus simple pour déterminer l'inclinaison de l'orbite.

On attend que le Soleil soit précisément dans la ligne des nœuds c'est-à-dire que sa longitude *géocentrique* L soit égale à $h \pm 180°$.

On détermine la latitude l de la planète A.

Dans le triangle rectangle ABS, on a :

$$\operatorname{tg} l = \sin \alpha . \operatorname{tg} i ;$$

α est l'angle d'élongation STB compté sur l'écliptique; c'est la différence des longitudes du Soleil et de l'astre.

Par exemple, le 12 janvier 1747, La Caille trouve pour Saturne la

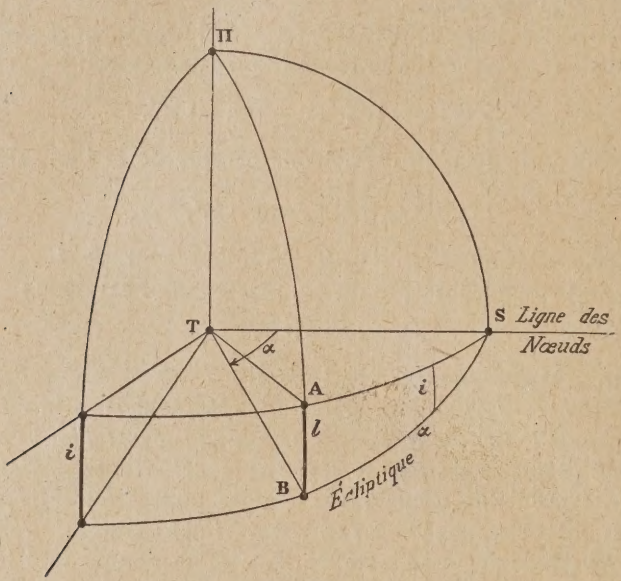


Fig. 145.

longitude 206° 13′ et la latitude boréale 2°29′18″. Le Soleil était dans un des nœuds de l'orbite de Saturne; sa longitude était 219° 47′.

L'angle α valait donc : $\alpha = 85° 34'$.

On trouve : $i = 2° 29' 45''$.

Les conditions sont très favorables : l'angle α est voisin de 90°; la latitude est voisine de son maximum qui est précisément i.

182. Transformation des coordonnées écliptiques géocentriques en coordonnées héliocentriques.

1° — Maintenant que les cas particuliers précédents ont fixé les idées du lecteur, attaquons le problème général de la détermination des coordonnées héliocentriques des planètes, les seules intéressantes.

Au cercle méridien nous déterminons la déclinaison et l'ascension droite de l'astre *vu d'un point de la surface terrestre*, Une correction facile sur laquelle nous reviendrons (§ 217), donne la déclinaison et l'ascension droite de l'astre *vu du centre de la Terre*. A partir de ces

coordonnées, nous savons calculer les coordonnées écliptiques *géocentriques*; les formules sont celles du § 18; nous pouvons donc considérer les coordonnées écliptiques géocentriques comme le résultat des observations méridiennes.

Pour les comparer aux lois de Képler, il faut calculer les coordonnées polaires sur le plan de l'orbite (distance au Soleil, anomalie).

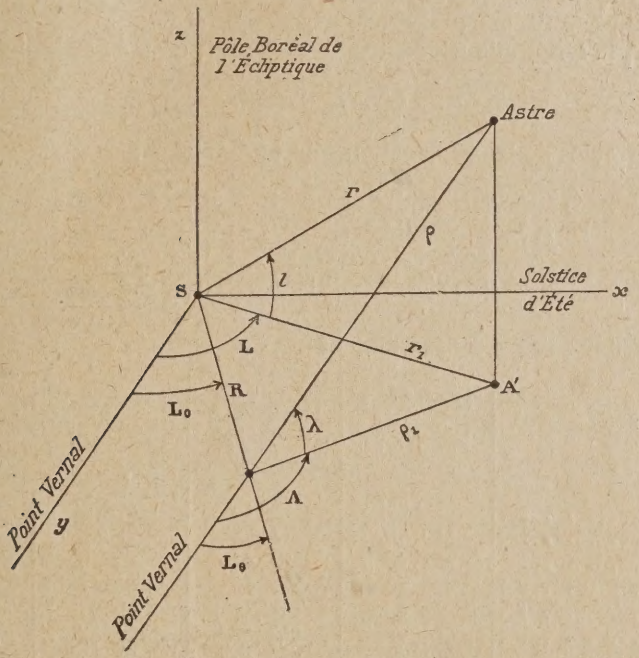


Fig. 146.

On passe par l'intermédiaire des coordonnées écliptiques *héliocentriques*.

D'où la nécessité des formules de transformation.

Le calcul ne présente aucune difficulté; mais les formules contiennent les distances de la planète au Soleil, c'est-à-dire précisément les quantités à déterminer. La troisième loi de Képler fournit le rapport des grands axes des ellipses; elle ne fournit ni les excentricités, ni la position des ellipses dans le plan de l'orbite.

Bref le problème n'est soluble que par une série d'approximations.

2° — FORMULES DE TRANSFORMATION DES COORDONNÉES HÉLIOCENTRIQUES EN COORDONNÉES GÉOCENTRIQUES.

Prenons trois axes de coordonnées rectangulaires partant du centre du Soleil et dirigés : les deux premiers, dans l'écliptique, vers le point vernal et le solstice d'été; le troisième vers le pôle boréal de l'écliptique.

La longitude et la latitude *héliocentriques* L et l de l'astre A, sont comptées : la première dans l'écliptique, dans le sens direct, à partir de l'axe Sy; la seconde à partir de la projection SA′ du rayon vecteur SA, dans un plan passant par Sz.

La longitude et la latitude *géocentriques* Λ et λ sont comptées : la première dans le sens direct, à partir d'une parallèle à l'axe Sy menée par la Terre T; la seconde, dans le plan TA′A normal à l'écliptique.

L_0 est la longitude héliocentrique de la Terre.

Soit L'_0 la longitude géocentrique du Soleil; on a évidemment :

$$L'_0 = L_0 + 180^\circ.$$

Les formules de transformation sont immédiates :

$$r_1 = r\cos l, \qquad \rho_1 = \rho\cos\lambda; \qquad \rho_1 \operatorname{tg}\lambda = r_1 \operatorname{tg} l.$$
$$\rho_1 \cos(\Lambda - L_0) = r_1 \cos(L - L_0) - R,$$
$$\rho_1 \sin(\Lambda - L_0) = r_1 \sin(L - L_0);$$
$$\rho_1^2 = r_1^2 + R^2 - 2Rr_1 \cos(L - L_0).$$

183. Éléments au 1er janvier 1900.

NOMS	LONGITUDES DES PÉRIHÉLIES	LONGITUDES MOYENNES	LONGITUDES DES NŒUDS ASCENDANTS	INCLINAISONS
Mercure	75° 54′	182° 14′	47° 9′	7° 0′
Vénus	130 8	344 22	75 48	3 24
Terre	101 13	100 41	0 0′	0 0
Mars	334 13	294 16	48 47	1 51
Jupiter	12 43	238 8	99 27	1 19
Saturne	91 6	266 36	112 47	2 30
Uranus	171 33	244 13	73 29	0 46
Neptune	46 44	84 28	130 41	1 47

184. Éléments des planètes.

NOMS	MOYENS MOUVEMENTS DIURNES	RÉVOLUTIONS SIDÉRALES		DISTANCES MOYENNES	EXCENTRICITÉS
		En années sidérales.	En années juliennes et en jours.		
Mercure	14 732″,42	0an,2408	87j,97	0,3871	0,2056
Vénus	5 767 ,67	0 ,6152	224 ,70	0,7233	0,0068
La Terre	3 548 ,20	1 ,0000	1an 0,006	1,0000	0,0168
Mars	1 886 ,52	1 ,8808	1 321,73	1,5237	0,0933
Jupiter	299 ,13	11 ,8620	11 314,84	5,2028	0,0483
Saturne	120 ,45	29 ,4572	29 166,97	9,5389	0,0561
Uranus	42 ,23	84 ,0202	84 7,39	19,1833	0,0463
Neptune	21 ,53	164 ,7669	164 280,11	30,0551	0,0090

NOMS	DIAMÈTRE ÉQUATORIAL A LA DISTANCE 1	DIAMÈTRE RÉEL	VOLUMES	MASSES		DENSITÉ
				Soleil = 1.	Terre = 1.	
				1 :		
Mercure. . . .	6″,6	0,38	0,053	430·000	0,061	6,32
Vénus	17 ,6	1,00	0,995	412·000	0,787	4,35
Terre.	17 ,6	1,00	1,000	324·400	1	5,53
Mars	9 ,3	0,53	0,150	3·093·500	0,105	3,83
Jupiter	196 ,0	11,14	1 306	1 047	310	1,30
Saturne. . . .	164 ,8	9,36	734	3 530	92	0,69
Uranus	75 ,0	4,26	71	24 000	13,5	1,05
Neptune . . .	67 ,3	3,82	51	19 700	16,5	1,62
Soleil.	32′ 3 ,6	109, 3	1·310·160	1	324·400	1,36
Lune	4 ,8	0,27	0,02	26·000·000	0,013	3,38

Durée de l'année tropique terrestre 365,2422. Année julienne = 365,25
La parallaxe solaire est supposée de 8″,80.
La distance moyenne est égale au grand axe de l'orbite $(a-e)+(a+e)=2a$.

185. Durée des révolutions moyennes sidérales et synodiques. Un des éléments les plus importants de la théorie des planètes est leur moyen mouvement. Voici un exemple emprunté à Cassini.

1° — RÉVOLUTION SIDÉRALE.

Pour ne pas introduire des éléments inconnus, on se sert des conjonctions (§ 179).

Le 7 novembre 1631, Cassini trouve qu'à $7^h\,50^m$ du matin, Mercure est en conjonction avec une longitude héliocentrique de 44° 41′ 35″.

Le 9 novembre 1723, à $5^h\,29^m$ du soir, nouvelle conjonction pour une longitude héliocentrique de 46° 47′ 20″.

L'intervalle est de 92 années dont 22 bissextiles plus $2^j\,9^h\,39^m$, soit $33\,604^j\,9^h\,39^m = 33\,604{,}402$ jours.

Dans cet intervalle Mercure fait 382 révolutions plus 2° 5′ 45″.

Divisant le nombre de jours par le nombre de révolutions on trouve $87^j{,}96$.

Sommes-nous assurés d'avoir le mouvement moyen véritable? autrement dit, ce mouvement moyen déterminé pour un siècle, se retrouverait-il le même pour un autre siècle? Évidemment oui, à une précision de l'ordre du centième de jour; évidemment non, à une précision plus grande. Cela à cause du déplacement de l'orbite de Mercure dans son plan. Il faut tenir compte du mouvement du périhélie.

2° — RÉVOLUTION SYNODIQUE.

Tandis que la *révolution sidérale* est le retour de l'astre (vu du Soleil) sur la même étoile, la *révolution synodique* est l'intervalle de temps qui sépare deux oppositions ou deux conjonctions successives *de même nom*.

Calculons-la pour Mercure à partir de la révolution sidérale $87^j,96$ trouvée ci-dessus, et de la révolution sidérale terrestre moyenne 365,256.

Les astres allant dans le même sens, pour rattraper la Terre après une révolution sidérale, Mercure doit encore parcourir une certaine fraction de tour α. Soit τ la durée de la période synodique. On a :

$$\tau = \alpha \times 365{,}256, \qquad \tau = (1+\alpha)\,87{,}96.$$

$$\tau\left(\frac{1}{87{,}96} - \frac{1}{365{,}256}\right) = 1, \qquad \tau = 115^j,88.$$

Il est clair qu'en raison de l'équation au centre (§ 89), deux révolutions synodiques consécutives sont loin d'être égales. La durée que

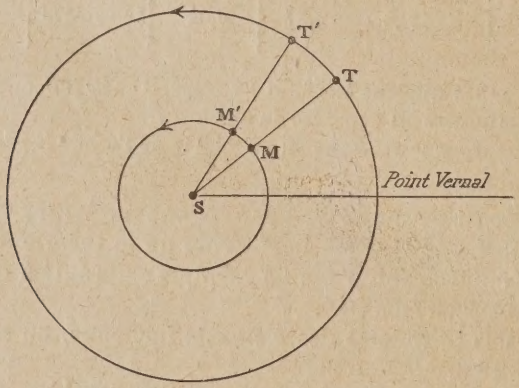


Fig. 147.

nous venons de calculer, est la moyenne d'un très grand nombre de révolutions synodiques, nombre suffisant pour que la Terre et Mercure, lors de leurs conjonctions, occupent des positions symétriquement distribuées sur leurs trajectoires.

D'une manière plus générale, soit T_0 et T les durées des révolutions sidérales de la Terre et de la planète. Pour les planètes inférieures, c'est la planète qui rattrape la Terre. On a :

$$\tau = \alpha T_0 = (1+\alpha)\,T, \qquad \frac{1}{\tau} = \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}.$$

Pour les planètes supérieures, c'est la Terre qui rattrape la planète On a :

$$\tau = \alpha T = (1+\alpha)\,T_0, \qquad \frac{1}{\tau} = \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}.$$

Le lecteur comparera ces formules à celles que nous avons déjà rencontrées aux §§ 136 et 157.

186. **Moyen mouvement en longitudes. Epoques.**

1° — Nous connaissons donc la variation de longitude qu'éprouve *moyennement* une planète dans une année commune de 365 jours de temps moyen. Nous connaissons par suite sa longitude *moyenne* pour un instant quelconque de temps moyen, longitude comptée à partir de l'équinoxe moyen actuel, sur l'écliptique actuel.

Cette longitude *moyenne* est le point de départ de tous les calculs astronomiques; on lui ajoute une *équation* pour obtenir la longitude *vraie* à un instant quelconque.

La longitude moyenne définit la *planète moyenne*.

Par exemple, la *Connaissance des Temps* donne pour Vénus :

$$L = 344^\circ\,21'\,33'',60 + 210{\cdot}669{\cdot}166'',172\,t + 1'',1289\,t^2.$$

L est la longitude moyenne de la planète rapportée à l'équinoxe moyen du temps t. Ce temps est compté à partir du 1er janvier 1900 en siècles de 36 525 jours (soit 100 années juliennes).

Nous reviendrons sur la signification du terme en t^2.

Le tableau du § 184 donne le moyen mouvement en longitude.

Pour Vénus on a, par jour de temps moyen : 5 767″,67.

Le lecteur vérifiera qu'on retrouve *à peu près* le coefficient de t en multipliant ce nombre par 36525; *à peu près seulement* en raison du terme en t^2.

On appelle *époque des moyens mouvements* pour le temps t, la valeur de la longitude moyenne pour ce temps. Connaissant l'*époque* au 1er janvier 1900, il suffit d'appliquer la formule pour obtenir l'époque à tel autre premier janvier qu'on voudra, après ou avant celui de 1900; on tient évidemment compte des années bissextiles. Dans les traités d'Astronomie actuels, suivant leur date de publication, les longitudes sont rapportées au 1er janvier 1750, 1800, 1850 ou 1900.

2° — Reste la question du lâcher de l'astre moyen, c'est-à-dire la détermination du terme constant de la longitude moyenne. Ce terme n'a qu'une importance médiocre. On convient que l'astre moyen et l'astre vrai passeront au périhélie ensemble *à une certaine date*. Il est évidemment avantageux que l'astre moyen et l'astre vrai oscillent l'un autour de l'autre, en s'éloignant peu l'un de l'autre, et autant que possible de manière que les avances compensent les retards. Cela revient à faire en sorte que l'*équation* ne contienne que des termes périodiques par rapport au temps (comparer au § 132).

Lalande dit que le jour où la planète est dans son apside, sa longitude vraie et sa longitude moyenne sont exactement la même chose.

Prise au pied de la lettre cette proposition est incorrecte puisqu'elle suppose que toutes les inégalités ont pour périodes des multiples de la période anomalistique de la planète. En toute rigueur il se peut qu'après être partis simultanément du périhélie, l'astre vrai et l'astre moyen n'y reviennent jamais ensemble.

3° — Ici quelques remarques sont nécessaires pour éviter bien des obscurités dans l'esprit du lecteur.

Il se demande d'abord pourquoi on a choisi l'écliptique pour définir la planète moyenne, et non l'orbite même de cette planète. Il est évident qu'il n'y a pas symétrie absolue dans la façon dont sont traitées la Terre et les autres planètes. La justification de cette manière de procéder est d'abord qu'elle est plus simple, par ce que plus uniforme, ensuite qu'elle est légitimée par les très petites inclinaisons sur l'écliptique des plans orbitaux des planètes les plus importantes.

Bien entendu, on définit aussi une *Terre moyenne*.

Voici sa longitude moyenne pour l'époque 1er janvier 1900 :

$$L = 100^\circ\,40'\,34'',01 + 129\cdot602\cdot768'',95t + 1'',1073t^2.$$

4° — Autre difficulté.

Que fait dans ce système le Soleil moyen défini au § 121?

Il n'intervient absolument pas.

Le Soleil moyen que nous utilisons pour définir le jour de temps moyen, est *moyen en ascensions droites*, tandis que les planètes moyennes sont *moyennes en longitudes*.

Nous retrouvons donc les deux *Soleils moyens* dont parlent les Cosmographies élémentaires, au grand désespoir des malheureux gosses qui n'y peuvent rien comprendre, pas plus que leurs professeurs du reste.

Le Soleil *moyen* (ou la Terre moyenne, ce qui revient au même) *en ascensions droites* est nécessaire quand il s'agit de phénomènes liés à la rotation de la Terre ; le Soleil moyen *en longitudes* est nécessaire quand il s'agit de calculer les perturbations sur lesquelles la rotation de la Terre n'intervient pas. Le Soleil moyen en ascensions droites n'a d'intérêt que pour nous, à cause des jours et des nuits.

A priori il n'existe donc aucune relation entre nos deux Soleils moyens. On convient de les faire passer en même temps aux équinoxes ; c'est possible en choisissant convenablement les constantes des formules donnant la longitude moyenne et l'ascension droite moyenne en fonction de temps. Il résulte d'ailleurs de leurs définitions que si les deux Soleils moyens passent une fois simultanément par l'équinoxe, ils y passeront toujours.

187. Accélération des moyens mouvements.

1° — Si les moyens mouvements étaient rigoureusement uniformes, la longitude moyenne s'exprimerait par une formule linéaire :

$$L = L_0 + at.$$

Nous venons de voir qu'il est nécessaire d'utiliser la formule :

$$L = L_0 + at + bt^2.$$

Il y a *accélération* du moyen mouvement.

Pour fixer les idées reprenons la formule ci-dessus donnée pour la Terre; la vitesse moyenne est approximativement en secondes d'arc par siècle :

$$129\cdot600\cdot000 + 2'',2t.$$

Elle croît donc par siècle dans le rapport

$$\varphi = 22 : (1\,296 . 10^6).$$

D'autre part une année julienne contient :

$$365,25 \times 86\,400 = 31\cdot557\cdot600 \text{ secondes de temps moyen.}$$

Si la vitesse croît de φ, le nombre de secondes de temps moyen contenu dans une année décroît par siècle de :

$$31,5 . 10^6 \times \varphi = (31,5 \times 22) : 1\,296 = 0^s,53.$$

C'est précisément le nombre du § 125.

L'année tropique moyenne diminue de $0^s,53$ par siècle.

Par année, elle diminue donc de $0^s,0053$.

Calculons l'avance totale par siècle. On a :

$$v = v_0 - gn, \qquad e = v_0 t - \frac{gn^2}{2},$$

où n est le nombre d'années.

g par année vaut $0^s,0053$. L'avance totale par siècle est donc de 26 secondes. Au bout d'un siècle, la Terre moyenne arrive au point quelle devrait occuper sur sa trajectoire, 26 secondes avant l'époque qui résulterait d'un moyen mouvement uniforme.

2° — Ralentissement de la rotation terrestre.

La question maintenant se pose de savoir si c'est le mouvement moyen de la planète qui s'accélère, ou si, tout au contraire, ce n'est pas l'unité de temps qui augmente à notre insu. Un mobile en effet semble aller plus vite soit que réellement sa vitesse croisse, soit que nous la mesurions avec un chronomètre dont nous apprécions mal la période, en l'espèce, un chronomètre qui retarde.

Précisons ces considérations.

Un mobile se meut d'un mouvement uniforme. Si l'on évalue son déplacement au moyen d'un étalon immuable de temps, il faut poser :

$$L = L_0 + ax.$$

Mais utilisons un chronomètre dont la durée du battement croît régulièrement. Elle vaut :

$$1 + 2\alpha n;$$

α est un nombre petit; n est le nombre des battements.

Entre l'origine des temps et le temps qui correspond au n^e battement, il s'est écoulé le temps :

$$x = 1 + (1 + 2\alpha) + (1 + 4\alpha) + \ldots \qquad (1 + 2\alpha n) = n + \alpha n^2,$$

puisque α est petit. Le mobile s'est déplacé de :

$$L = L_0 + an + a\alpha n^2,$$

Ainsi du fait que pour mesurer le déplacement du mobile, on utilise un chronomètre qui retarde, s'introduit un terme en n^2 (n est le nombre des battements du chronomètre) dont le coefficient est proportionnel à la vitesse réelle du mobile. En définitive si le mouvement de rotation terrestre n'est pas constant, tous les mouvements célestes *uniformes* s'expriment au moyen d'une formule parabolique *dont le coefficient est d'autant plus grand que le mouvement est plus rapide.*

D'où le problème : *le mouvement de rotation terrestre est-il immuable?*

Il existe une cause de ralentissement qui est le frottement dû aux marées. Naturellement on ne peut évaluer le ralentissement qu'il produit que d'une manière grossièrement approchée. Mais la Terre se refroidit, par suite se contracte : d'où une diminution de jour. *Il se peut que les deux effets de sens contraires s'annulent et qu'en définitive le jour sidéral soit pratiquement constant, même pour une longue série de siècles.* C'est ce que nous admettrons.

3° — Au surplus il résulte de cette analyse que les termes en t^2 des formules donnant les longitudes moyennes n'ont pas pour origine principale la variation du jour sidéral. Ils ont en effet à peu près tous le même coefficient, malgré les différences énormes des durées de révolution pour les diverses planètes. Voici ces coefficients tels qu'on les trouve dans la *Connaissance des temps* (mais arrondis).

Mercure.	Vénus.	La Terre.	Mars.
1″,13	1″,13	1″,11	1″,13
Jupiter.	**Uranus.**	**Saturne.**	**Neptune.**
1″,20	1″,17	1″,14	1″,15.

Ils proviennent en effet simplement du mouvement de l'origine des longitudes qui est la ligne des équinoxes : ils ne tiennent ni à une accélération véritable des mouvements, ni à une variation de la durée de rotation de la Terre, variation qui doit être insignifiante.

En définitive les années *sidérales* sont à peu près invariables; ce sont les années *tropiques* qui varient, en raison de la variation de l'origine des longitudes.

188. Loi de Titius Bode.

La connaissance de la révolution sidérale a une importance énorme, puisque la troisième loi de Képler permet d'en tirer les distances relatives des planètes au Soleil, c'est-à-dire de construire un système *semblable* au système réel. Il suffira de mesurer en kilomètres une de ces distances pour que toutes les autres soient connues.

Les distances des grosses planètes au Soleil sont assez bien représentées par la loi suivante, dite de Bode :

$$\rho = 4 + 3 \times 2^n. \qquad (1)$$

Pour la Terre on fait $n = 2$, ce qui donne 10 pour sa distance.
Voici le tableau comparatif des distances observées et calculées.

	Vénus.	Terre.	Mars.	Jupiter.	Saturne.	Uranus.
Distances calculées.	7	10	16	52	100	196
— observées.	0,72	1,00	1,52	5,20	9,55	19,61

La loi ne marche pas pour Mercure dont la distance est 0,39 ; il faudrait poser $n = -\infty$ dans la formule (1). Pour Neptune, elle donne la distance 38,6 au lieu de 30,1 ; la différence est énorme.

Il est de règle de trouver prodigieux ce qui arrive pour la distance 28 qui correspond à $n = 3$. Aucune grosse planète ne se trouve au voisinage de l'endroit indiqué par la loi de Bode : mais c'est justement là que l'on a découvert les 700 et quelques petites planètes dont nous parlons plus loin (§ 208).

189. Généralités sur les planètes inférieures.

1° — On appelle *planètes inférieures* celles dont les distances moyennes au Soleil sont plus petites que la distance moyenne de la Terre au Soleil. Mercure et Vénus, visibles à l'œil nu, sont dans ce cas.

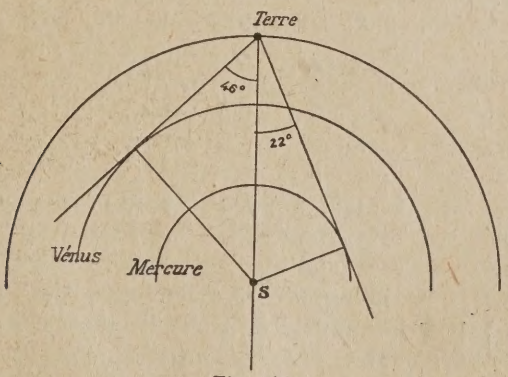


Fig. 148.

Si leurs trajectoires étaient circulaires et de rayons 0,38 et 0,72 (le rayon moyen de la trajectoire terrestre étant pris pour unité), leurs distances angulaires maxima au Soleil (*élongations maxima*) seraient (fig. 148) :

$$\text{arc sin } 0{,}38 = 22°, \qquad \text{arc sin } 0{,}72 = 46°.$$

En fait la trajectoire de Mercure est d'une ellipticité notable ; consé-

quemment quand le rayon TS est normal à son grand axe et quand simultanément Mercure est à son aphélie, l'élongation atteint 28°.

L'élongation oscillant entre $\pm 46°$ pour Vénus, $\pm 28°$ pour Mercure, ces planètes ne sont visibles à l'œil nu que le soir après le coucher du Soleil (leur élongation est orientale), et le matin avant son lever (leur élongation est occidentale).

2° — Mercure et Vénus présentent des phases comme la Lune et pour la même raison. Elles sont lumineuses et *pleines* lors de leurs conjonctions supérieures; elles sont obscures lors de leurs conjonctions inférieures. Quand alors leur latitude est suffisamment petite pour qu'elles se projettent sur le disque solaire, elles s'y détachent comme un petit cercle sombre. Entre les conjonctions, on ne voit que la partie de l'astre éclairée par les rayons solaires, qui est géométriquement visible.

3° — Le diamètre apparent de Mercure varie de 4″,6 à 12″. Si les trajectoires étaient circulaires, la distance de la Terre à Mercure aurait pour limites $1 - 0{,}38 = 0{,}62$ et $1 + 0{,}38 = 1{,}38$; le diamètre apparent varierait de 1 à un peu plus de 2. Mais les limites de variation sont rendues plus grandes par l'ellipticité notable de la trajectoire de Mercure. Soit a et c les quantités ci-dessus définies relatives à la Terre, soit a' et c' les mêmes quantités relatives à Mercure; les distances varient entre :

$$(a - c) - (a' + c') \quad \text{et} \quad (a + c) + (a' + c').$$

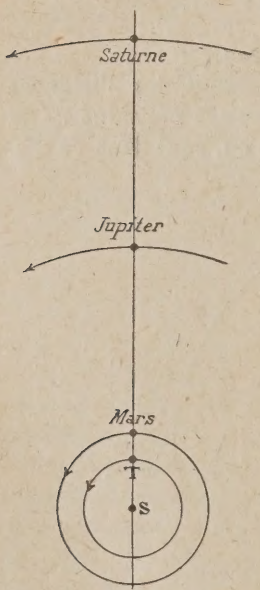


Fig. 149.

Les variations du diamètre apparent de Vénus sont considérables. Dans l'hypothèse des trajectoires circulaires, les limites seraient comme $1 - 0{,}72 = 28$ et $1 + 0{,}72 = 1{,}72$.

Le rapport est $172 : 28 = 6$ environ.

190. Généralités sur les planètes supérieures.

Pour les planètes *supérieures* les distances moyennes au Soleil sont plus grandes que l'unité. Les planètes supérieures visibles à l'œil nu sont Mars, Jupiter et Saturne; les grosses planètes télescopiques sont Uranus et Neptune. Entre Mars et Jupiter, nous savons qu'il existe un anneau constitué par plus de 700 petites planètes télescopiques.

Les planètes supérieures peuvent venir en opposition (§ 179).

Elles sont dites *en quadrature*, lorsque la longitude géocentrique de la planète diffère de 90° de celle du Soleil.

Les planètes supérieures n'ont pas de phases. Mars est vu rond et lumineux en opposition comme en conjonction. C'est seulement en qua-

drature que sa rondeur est un peu altérée, son hémisphère éclairé n'étant pas entièrement tourné vers nous.

Le phénomène est insensible pour les planètes les plus éloignées.

191. Mouvement direct. Station. Rétrogradation.

1° — Résolvons *in abstracto* le problème suivant : Deux points T et M décrivent des circonférences concentriques de rayons 1 et r, avec des vitesses angulaires qui sont dans le rapport de 1 à φ; on demande com-

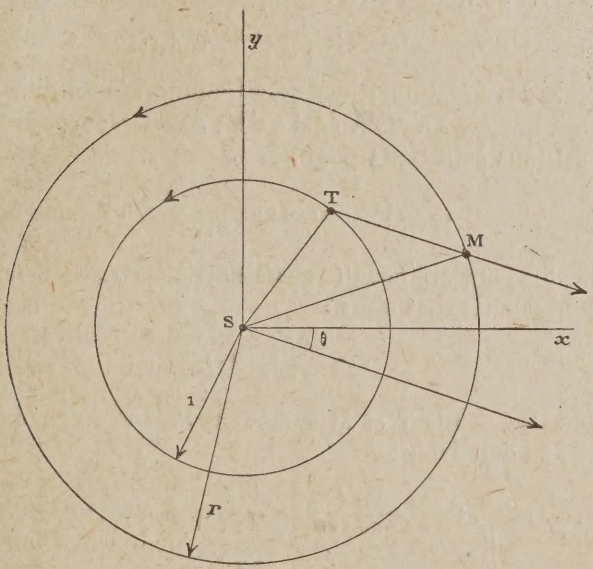


Fig. 150.

ment varie la direction de la droite qui les joint. En fait les points sont la Terre et une planète; la *direction* de la droite TM est déterminée par la trace de cette droite sur la sphère céleste dont nous pouvons considérer le rayon comme infini. La *position* de cette droite est quelconque; sa variation de position ne change pas la position de sa trace.

Pour un choix convenable de l'unité de temps, les coordonnées des points sont :

$$x = \cos t, \qquad y = \sin t;$$
$$x' = r\cos\varphi t, \qquad y' = r\sin\varphi t.$$

On a :

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sin t - r\sin\varphi t}{\cos t - r\cos\varphi t}.$$

D'où en différentiant :

$$\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1 + r^2\varphi - r(1+\varphi)\cos(\varphi - 1)t}{\cos t - r\cos\varphi t)^2}.$$

$d\theta$ s'annule pour les valeurs du temps qui satisfont à l'équation :

$$\cos(\varphi - 1)t = \frac{1 + r^2\varphi}{r(1+\varphi)}. \qquad (1)$$

La condition pour que les racines soient réelles est :

$$1 + r^2\varphi < r(1+\varphi); \qquad \text{ce qui donne :} \qquad 1 + r(r\varphi) < r + (r\varphi)$$
$$r\varphi > 1 \quad \text{pour} \quad r < 1; \qquad r\varphi < 1 \quad \text{pour} \quad r > 1.$$

D'après la loi de Képler on a :

$$\varphi^2 r^3 = 1, \qquad \varphi^2 r^2 = 1 : r.$$

Les racines de l'équation (1) sont donc toujours réelles, puisqu'en raison de la loi de Képler, φr étant égal à $\sqrt{1 : r}$, est plus grand que 1 pour $r < 1$; il est plus petit que 1 pour $r > 1$.

Posons : $$(\varphi - 1)t_0 = \arccos\frac{1 + r^2\varphi}{r(1+\varphi)},$$

t_0 étant le plus petit arc positif satisfaisant à cette relalion.

Les racines de (1) sont alors :

$$t = \frac{2k\pi}{\varphi - 1} \pm t_0. \qquad (2)$$

Pour que les points T et M soient sur la même droite passant par l'origine S, on doit avoir :

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'}; \qquad \frac{\cos t}{\cos\varphi t} = \frac{\sin t}{\sin\varphi t}, \qquad \sin(\varphi - 1)t = 0.$$

D'où : $$t = \frac{k\pi}{\varphi - 1}. \qquad (3)$$

2° — Pour fixer les idées et préciser le sens des termes que nous employons, construisons la solution pour $r = 0{,}4$, $\varphi = 4$.

Le point T (Terre) tourne donc 4 fois moins vite que le point M (Mercure).

Sur les circonférences de rayons 1 et 0,4 j'ai numéroté de 1 à 24 les points correspondants.

Pour représenter la direction de la droite qui passe par les points 1, 1, par exemple, je mène par l'origine S (Soleil) une droite parallèle 1, 1, et je marque un point (point de direction) sur une circonférence.

En fait, pour éviter la confusion, les points sont marqués sur trois circonférences concentriques.

Pour faciliter le langage, j'emploie une année conventionnelle de 360 jours qui sera la période de rotation de l'astre T (Terre) : il fait donc 1° par jour. Le lecteur vérifiera qu'on a très sensiblement $\varphi^2 r^3 = 1$; les nombres satisfont à la loi de Képler ; ils correspondent approximativement à la Terre et à Mercure.

Lorsque les points T et M sont disposés comme (0,0) ou (8,8), il y a *conjonction inférieure*; s'ils sont disposés comme (4,4) ou (12,12), il y a *conjonction supérieure*. Les conjonctions sont les racines de l'équa-

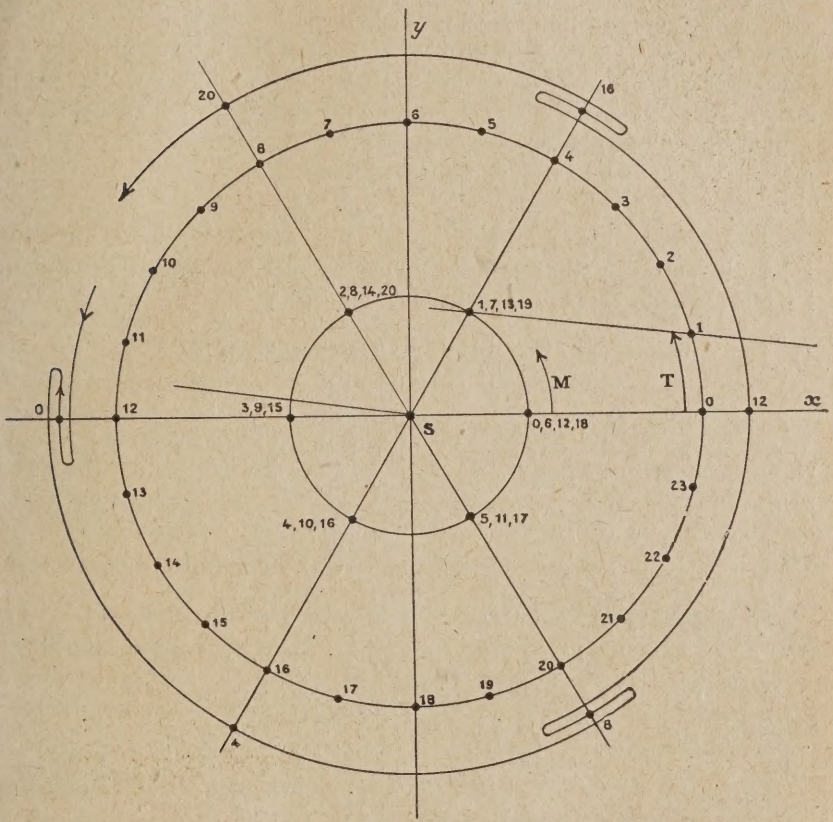


Fig. 151.

tion (3); sur la trajectoire terrestre, elles ont lieu de 60 en 60°, alternativement d'une espèce et de l'autre.

Les sens de rotation de T et de M sont *directs*; il y a *rétrogradation* quand le point de direction se déplace en sens inverse.

3° — Passons à la discussion numérique.

On a : $(1+r^2\varphi) : r(1+\varphi) = 0{,}82$, arc cos $0{,}82 = 35°$.

D'où : $t_0 = 12$ jours environ, $t = k \,.\, 120$ j. ± 12 j.

Telle est l'équation donnant les arrêts du point de direction ($d\theta = 0$).

A partir du temps 0, le point de direction rétrograde d'abord pendant 12 jours.

La valeur angulaire de la rétrogradation est donnée par la formule :

$$\operatorname{tg}\theta = (\sin 12° - 0{,}4 \sin 48°) : (\cos 12° - 0{,}4 \cos 48°).$$

On trouve un peu plus de 7°.

Le mouvement devient direct; il reste direct pendant un temps facile à calculer. En effet le point de direction passe de 1 à 8 en 120 jours sur lesquels il y a 2 rétrogrations de 12 jours : d'où 96 jours de mouvement direct. Après quoi vient une rétrogradation de 24 jours, et ainsi de suite.

Tout cela d'une simplicité enfantine.

Pour Vénus on aurait dans notre approximation

$$\varphi = 1{,}63, \qquad r = 0{,}723.$$

La distance des centres entre deux conjonctions inférieures vaut : $1 : (1 - \varphi) = 1{,}59$ fois la circonférence, soit 572°.

$$(1 + r^2\varphi) : r(1 + \varphi) = 0{,}974 \qquad \text{arc cos } 0{,}074 = 13°$$

$$t_0 = 13° : (\varphi - 1) = 20 \text{ jours}.$$

L'astre a donc un mouvement direct pendant 532 jours, suivi d'une rétrogradation de 40 jours. C'est à peu de chose près les nombres réels. En utilisant la vraie longueur de l'année (que nous prenons ici de 360 jours) on trouve des nombres encore plus voisins des nombres vrais.

192. **Mouvements apparents réels (planètes inférieures).**

1° — Les calculs précédents sont schématiques parce que nous sup-

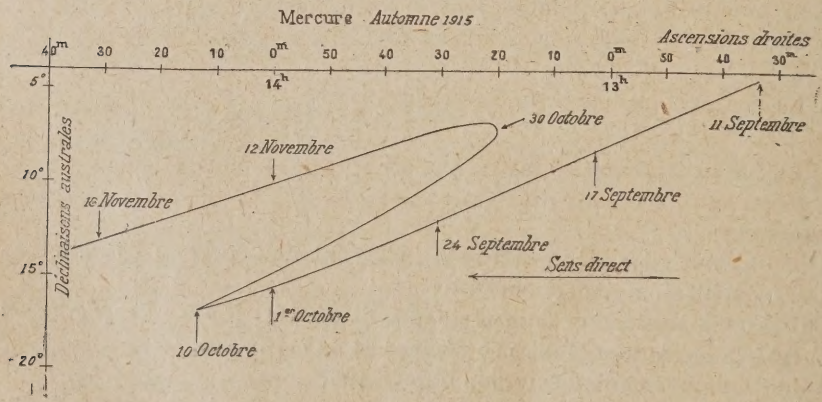


Fig. 152.

posons que les astres se meuvent dans le même plan, suivant des trajectoires circulaires et avec des vitesses uniformes : aucune de ces hypothèses n'est vérifiée. Les phénomènes réels sont plus compliqués, *tout en conservant la même allure.*

D'abord les astres ne se déplaçant pas dans le même plan, les parcours rétrogrades et directs ne se superposent pas. La figure 152 montre le déplacement apparent de Mercure dans le champ des étoiles pendant l'automne 1915. La trajectoire peut être bouclée.

Pendant l'année 1915, Mercure rétrograde

du 11 février au 5 mars	22 jours
13 juin au 8 juillet	25 —
10 octobre au 30 octobre	20 —
Moyenne	22 jours.

Entre le 11 février, le 13 juin et le 10 octobre sont compris respectivement 122 et 119 jours; moyenne 120 jours.

En moyenne nous retrouvons approximativement les nombres donnés par la théorie simplifiée.

2° — Nous avons vu que le milieu de la rétrogradation doit coïncider (au moins à peu près) avec la conjonction inférieure.

La *Connaissance des Temps* donne la longitude géocentrique du Soleil et la longitude héliocentrique de Mercure.

Pour la conjonction inférieure, elles diffèrent de 180°.

Effectivement je lis :

21 février 1915, longitude géocentrique du Soleil. . .		331° 47′ 2″
21 — longitude héliocentrique de Mercure.		150 45 46
23 — — — .		160 13 56.
La conjonction a donc lieu le 21 février.		
27 juin 1915, longitude géocentrique du Soleil. . . .		94° 44′ 14″
25 — longitude héliocentrique de Mercure. .		89 40 20
27 — — — .		95 18 12.
La conjonction a donc lieu le 26 juin.		

193. **Mouvements apparents réels (planètes supérieures).**

Reprenons la théorie du § 191 en supposant qu'il s'agit d'une planète supérieure.

1° — Pour Neptune dont la période est énorme, tout se passe à peu près comme si la planète était fixe; la période synodique est en effet de 367^j,5, très voisine de l'année sidérale terrestre.

En conséquence, il y a mouvement direct à peu près la moitié de l'année, mouvement rétrograde le reste du temps.

Effectivement pour 1915, l'ascension droite de Neptune est $8^h\,6^m\,39^s$ au 1er janvier.

Elle décroît jusqu'au 8 avril où elle devient $7^h\,58^m\,37^s$; la Terre est en A.

Elle croît alors jusqu'au 5 novembre où elle atteint $8^h\,19^m\,32^s$; la Terre est en B.

Elle décroît ensuite pour devenir $8^h\ 16^m\ 11$ au 1^{er} janvier 1916.

Le milieu de la rétrogradation correspond approximativement à l'opposition pour laquelle la longitude héliocentrique de l'astre diffère de 180° de la longitude géocentrique du Soleil. Le milieu de l'arc direct

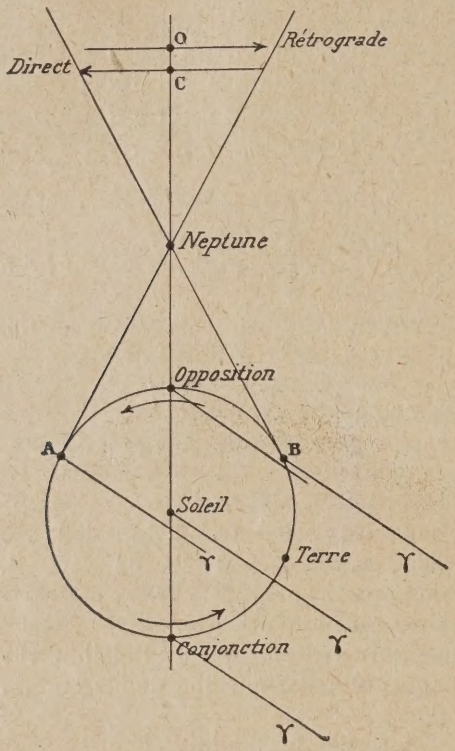


Fig. 153.

correspond approximativement à la conjonction pour laquelle la longitude héliocentrique de l'astre est égale à la longitude géocentrique du Soleil. C'est ce qui arrive le 24 juillet pour lequel on a :

Longitude géocentrique du Soleil.	120° 29′ 16″
Longitude héliocentrique de Neptune	120 10 46

N'oublions pas que cette longitude dans toute l'année 1915 ne varie que de :

118° 56′ 29″ à 121° 9′ 5″.

Si Neptune était fixe, sa distance au Soleil étant 30 fois celle de la Terre, l'arc direct et l'arc rétrograde seraient égaux entre eux et à 4° environ. Comme Neptune avance de 2° environ par an, l'arc direct est porté à 5° ; l'arc rétrograde est réduit à 3°.

Je laisse au lecteur le soin de mettre des décimales.

2° — A mesure que l'on considère une planète plus rapprochée de la Terre l'arc de rétrogadation augmente; la durée de la rétrogradation diminue.

	ARC	DURÉE	RÉVOLUTION SYNODIQUE
Saturne	6 à 7°	136 à 140 jours.	378 jours.
Jupiter	10°	118 à 122 —	399 —
Mars.	10 à 19°	57 à 79 —	780 —

194. Détermination de l'orbite d'une planète.

1° — La troisième loi de Képler fournit le grand axe de l'orbite à partir de la durée de la révolution.

Reste à déterminer le périhélie et l'excentricité.

Quand il s'agit des mouvements du Soleil ou de la Lune qui sont ou qu'on peut considérer comme géocentriques, les observations faites à des temps quelconques peuvent servir. Il n'en est pas de même pour les planètes dont le mouvement est héliocentrique; pour ne rien introduire d'inconnu, on ne doit utiliser que les observations en conjonction ou en opposition, pour lesquelles les longitudes héliocentriques ou géocentriques sont égales ou diffèrent de 180°.

J'emprunte les nombres suivants à Cassini. Il détermina les oppositions de Saturne pendant une période entière, soit près de 30 ans.

En conjonction Saturne est ou invisible ou difficilement visible.

Voici les oppositions utilisées :

1	16 mars	1686.	$10^h\ 28^m$	longitude héliocentrique	176° 47′ 6″
2	29 —	1687.	11 11	—	—	189 25 26
3	9 juin	1693.	19 32	—	—	259 54 41
4	21 —	1694.	19 30	—	—	271 6 40
5	3 septembre	1700.	3 14	—	—	340 57 40
6	6 —	1701.	2 0	—	—	353 21 16
7	11 mars	1715.	16 55	—	—	171 3 14
8	23 —	1716.	19 4	—	—	183 48 1

Suivons maintenant son raisonnement. Les oppositions sont numérotées; la figure 154 les représente à peu près à leur vraie place.

2° — Cassini commence par déterminer le moyen mouvement annuel en longitude héliocentrique; il utilise pour cela les observations anciennes dont l'une remonte à 288 ans avant J.-C.

Pour une année commune de 365 jours, il trouve 12° 13′ 24″.

C'est le point de départ obligé de tous les calculs (§ 120).

Entre 1 et 2 se sont écoulés 378 jours 43 minutes. Le vrai mouvement

a été 12° 38′ 20″. Mais pour ce même intervalle de temps, une règle de trois donne pour moyen mouvement 12° 39′ 34″, nombre qui ne diffère du mouvement vrai que de 1′ 14″, soit un sept cent cinquantième.

Donc en $S_1 S_2$, Saturne est tout près du lieu de son orbite pour lequel

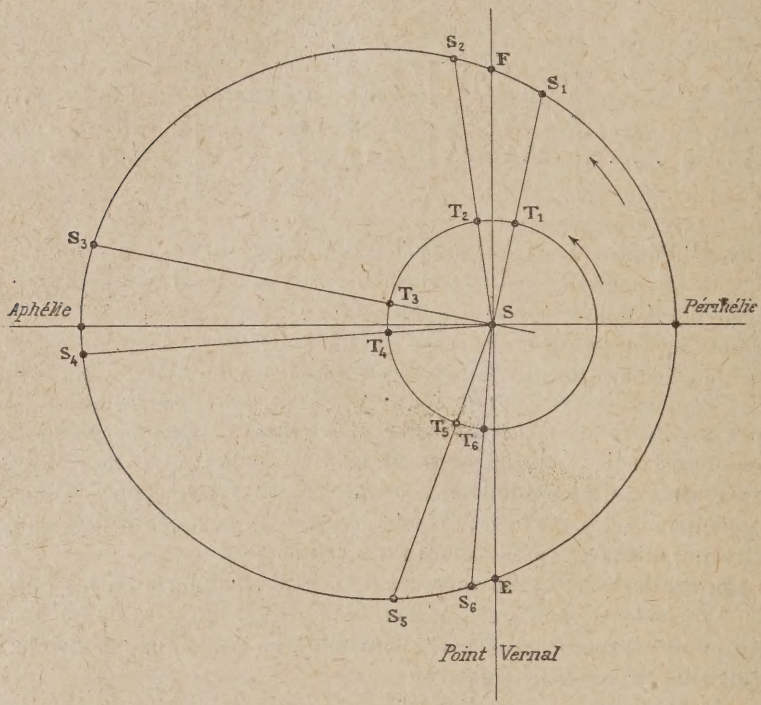


Fig. 154.

son mouvement est moyen; il est donc tout près d'être à 90° de la ligne des apsides de son orbite (§ 90).

Une remarque fondamentale est ici nécessaire.

Si la loi des aires s'applique à une courbe, les rayons vecteurs étant issus d'un point S du plan de cette courbe, elle s'applique à la projection orthogonale de cette courbe sur un plan P quelconque pour les vecteurs issus de la projection du point S sur le plan P. Conséquemment la loi des aires s'applique à l'ellipse qui est la projection sur l'écliptique de l'ellipse décrite par la planète dans le plan de son orbite. Mais le point S n'est plus foyer de l'orbite projetée, la ligne des apsides de cette orbite projetée n'est pas la projection de la ligne des apsides de l'orbite réelle. Toutefois il s'en faut de peu, l'inclinaison du plan de l'orbite de Saturne n'étant que de 2° 30′ dont le cosinus est 0,9990.

Ce qui nous permet de raisonner sur les longitudes comme en toute rigueur nous devrions raisonner sur les anomalies.

Pour fixer les idées, la *Connaissance des temps* donne 91° 6′ pour longitude du périhélie, soit 181° 6′ pour longitude du point F.

3° — A partir du point F, la vitesse angulaire de Saturne vraie est plus petite que celle de Saturne moyen ; Saturne vrai retarde sur Saturne moyen.

Pour éviter une difficulté très réelle, que le lecteur ne confonde pas les expressions « être en retard sur » et « retarder sur ». Le premier signifie que les deux astres ne coïncident pas, que l'un est derrière l'autre. La seconde signifie que l'un va moins vite que l'autre. Ainsi en F, Saturne moyen est en retard sur Saturne vrai alors que les vitesses sont les mêmes. En P les astres coïncident, mais Saturne vrai retarde sur Saturne moyen.

Le retard croît pendant *6 signes* environ, soit 180° (§ 89).

Pour connaître la valeur de *l'équation*, utilisons donc les oppositions 5 et 6. Nous connaissons les temps qui séparent les observations, et les déplacements qui leur correspondent. Nous pouvons calculer les déplacements qu'aurait l'astre moyen pour les mêmes intervalles de temps. Voici la comparaison des mouvements vrais et moyens.

Entre 1 et 5	mouv. vrai .	164° 10′ 34″	mouv. moyen .	176° 56′ 34″
Entre 1 et 6	—	176 34 10	—	189 36 0″
La première comparaison donne comme différence				12° 46′ 0″
La seconde	—		—	13 1 50″
En comparant 2 et 6, Cassini trouve comme différence. . .				13° 0′ 34″
Cassini conclut que la plus grande équation est.				6° 30′ 55″

En effet c'est au périhélie et à l'aphélie que l'équation est nulle, que Saturne vrai passe en même temps que Saturne moyen (abstraction faite des perturbations). En F Saturne moyen est en retard sur Saturne vrai, l'équation est positive. Saturne moyen allant alors plus vite que Saturne vrai (en vertu de la loi des aires), ils arrivent ensemble en A. Saturne moyen avançant toujours, l'équation est maxima et négative au voisinage de E. Après quoi Saturne moyen retarde sur Saturne vrai de manière qu'ils arrivent ensemble au périhélie : l'équation s'annule.

4° — Pour déterminer l'aphélie, Cassini compare les oppositions 1 et 3. La variation de longitude est 83° 7′ 35″. Le mouvement de Saturne moyen dans cet intervalle est 88° 29′ 27″. La différence est 5° 21′ 52″.

Elle est plus petite de 1° 9′ 3″ que la plus grande équation ci-dessus déterminée. Donc en S_3 Saturne n'est pas encore à l'aphélie.

Cassini utilise alors l'opposition 4. Il trouve pour mouvement vrai 94° 19′ 34″, pour mouvement moyen 101° 6′ 51″; la différence est 6° 47′ 17″. Elle est maintenant plus grande que la plus grande équation de 16′ 22″.

Cassini interpole et trouve pour le lieu de l'aphélie 268° 58′.

Nous avons aujourd'hui 271° 6′.

Il détermine le temps de passage à l'aphélie : 11 avril 1694 à $11^h\,32^m$.

On peut reprocher à ces calculs d'être faits avec les longitudes et non pas avec les distances angulaires à la ligne des nœuds, c'est-à-dire, à une constante près, avec les anomalies vraies. Mais l'erreur est petite; elle n'a pas d'importance au point de vue qui nous occupe.

5° — Excentricité.

Appliquons la formule : $\theta = \omega t + 2e \sin \omega t$, (1)

qui donne l'*anomalie vraie* θ en fonction de l'*anomalie* moyenne ωt.

L'équation est $2e \sin \omega t$; la plus grande équation est $2e$. On a donc :

$$2e = 6° 30' 55'' = 0{,}1137 \text{ en radian.}$$

D'où : $$e = 0{,}0568.$$

On admet aujourd'hui 0,0559; mais la formule (1) n'est qu'approchée.

J'imagine le lecteur assez intelligent pour trouver tout cela admirable de simplicité. Il laissera volontiers la précision aux membres du Bureau des longitudes; il se contentera aisément de comprendre l'ensemble des phénomènes, en quoi il est très supérieur à la plupart de nos astronomes officiels. S'il en doute, qu'il lise leurs ouvrages!

195. Diamètres apparents.

Les diamètres apparents des planètes sont déterminés soit avec un héliomètre, soit avec un micromètre à fils. On s'est longtemps buté contre le phénomène d'*irradiation* dont je discute la réalité dans mon Cours sur la *Vision*,...

L'irradiation n'existe qu'en apparence; elle tient à la mauvaise définition de l'image quand l'ouverture de l'instrument d'optique est insuffisante; d'autant que pour rendre les mesures possibles on doit forcer le grossissement. A mesure que les instruments utilisés sont plus parfaits, les diverses méthodes tendent à donner les mêmes résultats. Toutefois c'est à peine si le chiffre des dixièmes de seconde est certain.

On utilise des lunettes ayant des objectifs d'un mètre d'ouverture avec des grossissements de l'ordre de 1000.

CHAPITRE III

PARTICULARITÉS DES DIVERSES PLANÈTES

Mercure et Vénus.

Nous traiterons ensemble ces deux planètes, ce que nous avons à dire de l'une s'appliquant à peu de chose près à l'autre.

196. **Rotation.**

Le problème de la rotation des deux planètes inférieures est encore aujourd'hui sans solution certaine. On leur a assigné des durées de rotation diverses, parce que les taches qui permettent leur mesure sont faibles, mal déterminées, changeantes : ce sont probablement des nuages; il est douteux que les taches appartiennent à la surface solide de la planète.

Dans ces dernières années on semble admettre que Mercure et Vénus présentent toujours la même face au Soleil, comme la Lune fait pour la Terre. La durée de la rotation autour de l'axe propre, serait donc égale à la durée de rotation moyenne autour du Soleil :

87,97 jours pour Mercure, 224,70 jours pour Vénus.

197. **Phases.**

1° — Les planètes sont des corps opaques qui diffusent la lumière reçue du Soleil; elles ne sont pas lumineuses par elles-mêmes. On donne le nom d'*albedo* (voir mon Cours sur la *Vision*,...) au rapport de la quantité totale de lumière diffusée à la quantité totale de lumière reçue. Suivant la planète l'albedo varie de 0,15 à 0,88.

Par exemple pour Mercure l'albedo vaut 0,16, pour Vénus 0,88.

Cette dernière planète diffuse donc extraordinairement, à peu près comme la craie ou la céruse.

Pour que la surface d'une planète nous apparaisse, il faut évidemment qu'elle soit éclairée. A la supposer sphérique, le Soleil en éclaire constamment un hémisphère.

Le lecteur se reportera au § 298 où je reprends le même problème à propos de la Lune. Voici la solution du reste facile à retrouver.

S est le Soleil, T est la Terre, V est le centre de Vénus dont le disque est infiniment grossi par rapport aux distances relatives.

Le Soleil éclaire l'hémisphère limité par le grand cercle AA′; la Terre ne voit que l'hémisphère limité par le grand cercle BB′. N'apparaît donc de Vénus que la surface qui se projette éclairée sur le plan BB′.

Elle est évidemment limitée par la moitié du grand cercle de contour

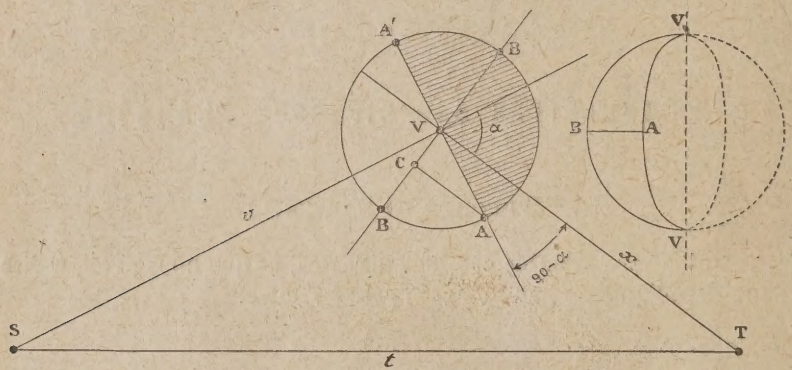


Fig. 153.

apparent VBV (voir figure 153 à droite) et par une ellipse tangente à ce grand cercle aux points V.

On a : $\overline{BA} = R[1 - \cos(\alpha + \varepsilon)] = R(1 + \cos P)$,

en posant $P = SVT$.

2° — Conséquemment voici les phénomènes.

Je parle de Vénus; la théorie s'applique à Mercure.

Vénus s'éloigne au plus du Soleil d'un angle compris entre 44° 57′ et 47° 48′; la valeur de cet angle dépend des positions que la Terre et Vénus occupent sur leurs trajectoires elliptiques au moment des élongations maximas.

En supposant que Vénus et la Terre décrivent des cercles de rayons 0,72 et 1, on trouve pour élongation maxima :

$$\text{arc sin } 0{,}72 = 46° 4'.$$

Lorsque Vénus commence à apparaître le soir, après une conjonction supérieure, son disque est à peu près rond; son diamètre apparent est d'une dizaine de secondes. Sa distance angulaire au Soleil grandit peu à peu; en même temps que sa distance linéaire à la Terre diminue; son diamètre apparent grandit.

Comme sa révolution synodique (espace de temps qui sépare moyen-

nement deux oppositions) est de 584 jours, elle a sa plus grande élongation environ 146 jours après la conjonction supérieure. Nous verrons plus loin qu'elle a son éclat maximum plus tard, 69 jours environ avant la conjonction inférieure. Dans cette partie de la trajectoire, Vénus porte le nom d'*Étoile du Soir*, *Vesper*, *Étoile du Berger*.

En conjonction inférieure elle disparaît, à moins qu'elle ne se projette *en noir* sur le disque solaire. Ces *passages de Vénus* ont une grande importance; nous reviendrons dessus au chapitre v.

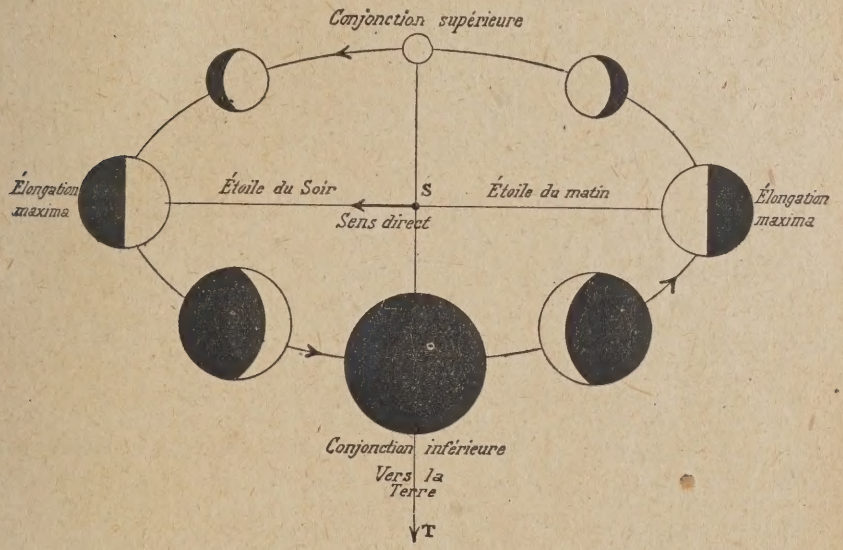


Fig. 156.

Après la conjonction inférieure, Vénus est à l'occident du Soleil; elle n'est donc généralement visible que le matin avant le lever du Soleil : elle porte le nom d'*Étoile du Matin*, de *Lucifer*.

Elle s'éloigne angulairement du Soleil (c'est-à-dire se lève de plus en plus tôt) jusqu'à ce qu'elle atteigne sa plus grande élongation. Elle se rapproche ensuite angulairement du Soleil, toujours en s'éloignant de nous. Après 584 jours elle revient en conjonction supérieure.

On distingue les phases de Vénus même avec une lunette de 60 cm. de distance focale : elles ont été découvertes dès l'invention des lunettes (Galilée).

Il est clair que Vénus rétrograde dans la partie de sa révolution synodique voisine de la conjonction inférieure. Pour chaque révolution synodique de 584 jours, la rétrogradation dure de 40 à 43 jours suivant les positions relatives de la Terre et de Vénus sur leurs orbites.

La figure 156 représente schématiquement les phénomènes; les

disques de la planète sont supposés rabattus de 90° sur le plan du tableau. On doit les supposer normaux à la ligne ST.

198. **Eclat maximum. Périodicité.**

1° — Le calcul suivant est basé sur une hypothèse inexacte, mais intéressante.

Bien que la planète ne soit pas lumineuse par elle-même, admettons que chaque élément de sa surface émette proportionnellement au pro-

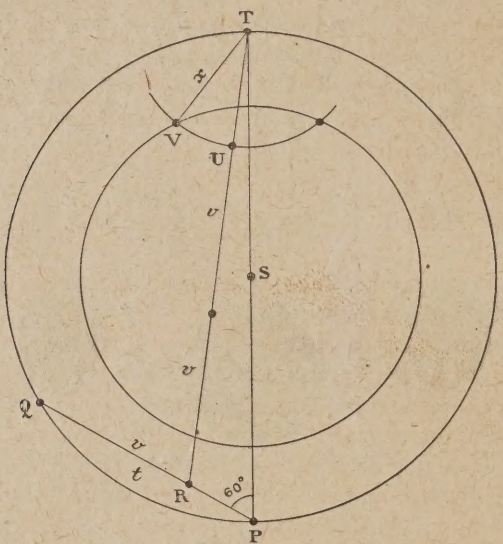


Fig. 157.

duit d'un paramètre constant E_0 par le cosinus de l'angle que fait sa normale avec la direction d'émission. C'est la loi de Lambert *appliquée à un corps lumineux par lui-même*. Il en résulte immédiatement que la lumière envoyée par un élément de surface est la même quel que soit l'angle d'émission, pourvu qu'on mesure non pas l'aire de l'élément, mais l'angle solide dans lequel se trouve l'aire. En effet pour un même angle solide, la diminution qui résulte de l'obliquité est compensée par l'augmentation de surface : *une sphère paraît donc d'un éclat uniforme, comme un disque plat.*

Je renvoie le lecteur à mon cours *Vision,...* pour l'étude des conséquences de la loi de Lambert.

2° — Ceci posé, déterminons comment varie la quantité de lumière envoyée par la planète dans ses diverses positions.

Soit (fig. 155) : $\overline{ST} = t$, $\overline{SV} = v$, $VT = x$.

Soit comme précédemment R le rayon de son disque.

L'aire éclairée visible est :

$$\pi R^2(1 - \cos\alpha).$$

On a : $$t^2 = v^2 + x^2 + 2vx + 2vx\cos\alpha.$$

L'éclairement à la distance x est :

$$\frac{\pi R^2}{x^2}(1 - \cos\alpha) = \pi R^2 \frac{v^2 + x^2 + 2vx - t^2}{2vx^3}.$$

Le maximum a lieu pour : $x = -2v + \sqrt{v^2 + 3t^2}$.

Ce calcul suppose les orbites circulaires.

3° — Voici la construction qu'Halley donne de cette formule (fig. 157).

Du point P, opposé à la Terre sur son orbite, portons en $\overline{PQ}$ le rayon t de l'orbite terrestre, puis en $\overline{QR}$ le rayon v de l'orbite de Vénus. Joignons TR. On a :

$$\overline{TR}^2 = (t - v)^2 + 4t^2 - 4(t - v)t.\cos 60° = 3t^2 + v^2.$$

Si de $\overline{TR}$ on retranche $2v$, on trouve un point U tel que $\overline{TU}$ est précisément la distance x cherchée.

Pour connaître la position correspondante de Vénus, il suffit avec T comme centre de mener l'arc de circonférence UV.

Le calcul précédent repose sur une conséquence de la loi de Lambert implicitement admise : *le disque de Vénus est d'éclat uniforme.*

Il suppose aussi que cet éclat est constant, ce qui revient à admettre que Vénus reste constamment à la même distance du Soleil.

4° — On comprend aisément le pourquoi de la solution précédente. Lorsque Vénus est en conjonction inférieure, sa distance est relativement petite : son diamètre apparent est relativement considérable : il vaut 67″. Mais le disque est obscur.

A partir de cette position la surface éclairée vue de la Terre augmente, mais simultanément la distance augmente. Lorsque Vénus est en conjonction supérieure, son disque est éclairé en totalité, mais sa distance est 5 fois plus grande qu'en conjonction inférieure à égalité de surface éclairée, Vénus nous envoie 25 fois moins de lumière qu'elle ne fait dans la première position.

La distance agit par l'inverse de son carré : il n'est donc pas étonnant que le plus grand éclat de Vénus corresponde à un croissant mince, à une position voisine de la conjonction inférieure.

Dans la position du maximum, la distance x est environ $0{,}43t$.

Il va de soi que l'ellipticité des orbites complique le phénomène; d'autre part l'application de la loi de Lambert relative à un corps lumineux par lui-même n'est sûrement pas légitime.

5° — Vénus est parfois si brillante qu'on la voit en plein jour; cela tient au lieu des orbites où se produit la conjonction inférieure au voisinage de laquelle nous venons de voir qu'a lieu le plus grand éclat.

Les excentricités des orbites sont 0,0068 pour Vénus, 0,0168 pour la Terre. Les longitudes des périhélies sont 130° 8′ pour Vénus, 101° 13′ pour la Terre; les lignes des apsides des orbites se projettent sur l'écliptique à peu de distance angulaire. L'orbite de Vénus étant très près d'être circulaire, le plus grand éclat a lieu quand la conjonction inférieure se produit au voisinage du périhélie terrestre.

Le phénomène revient tous les 8 ans. En effet on a :

$$8 \times 365{,}25 = 2\,922^{j},00 \qquad 13 \times 224{,}70 = 2\,921^{j},1$$

La nuit, Vénus est alors assez brillante pour donner des ombres comme font le Soleil et la Lune.

199. Loi de Lambert pour un corps non lumineux par lui-même.

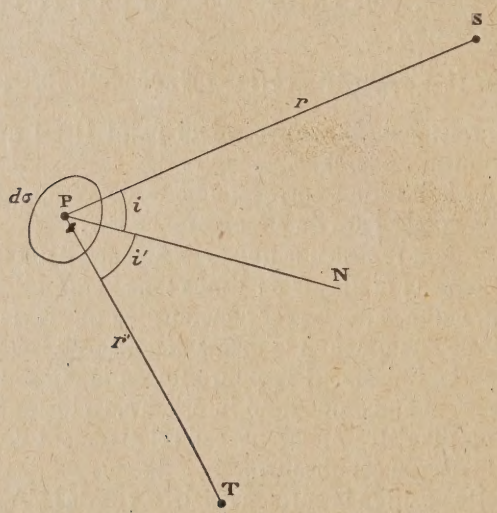


Fig. 158.

1° — Reprenons le problème dans l'hypothèse plus exacte d'un corps non lumineux par lui-même : voici ce que devient la loi de Lambert.

Les planètes sont éclairées par le Soleil. Soit i l'angle que fait, avec l'élément $d\sigma$ de la surface de la planète, la droite SP qui la joint au Soleil.

La quantité de lumière reçue est :

$$Q = S \cos i : r^2,$$

où S est une constante absolue, si l'on néglige les variations d'éclat de la surface solaire dues aux taches et autres modifications périodiques.

Dans la direction i', l'élément $d\sigma$ renvoie une quantité de lumière Q′ qui est, *d'après la loi de Lambert :*

$$Q' = \varepsilon_0 \cos i' \,.\, Q = S\,\varepsilon_0 \frac{\cos i \,.\, \cos i'}{r^2}.$$

L'éclairement sur l'unité de surface normale aux rayons, à la distance r', est par suite :

$$E = \frac{Q'}{r'^2} = \varepsilon_0 S \frac{\cos i \,.\, \cos i'}{r^2 r'^2}.$$

2° — Appliquons à une sphère.

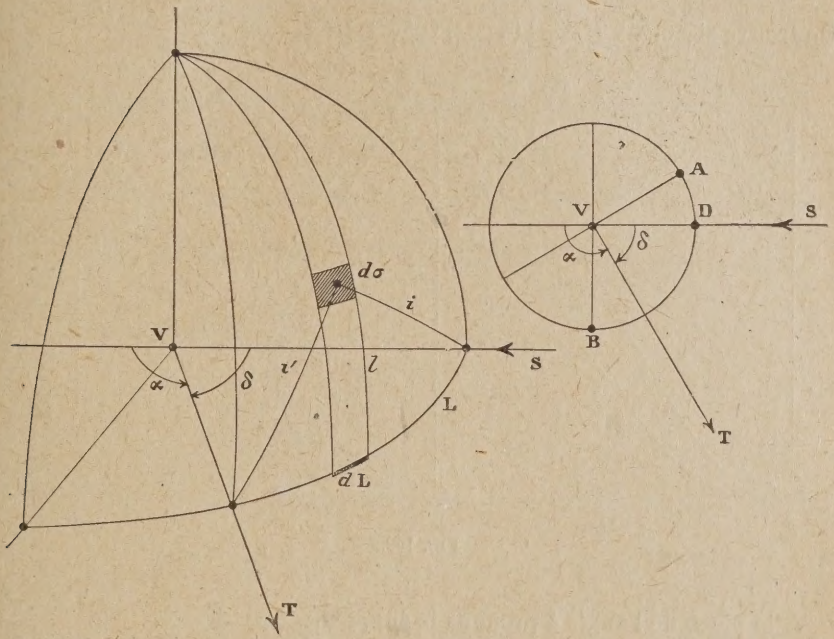


Fig. 159.

Les rayons tombent dans la direction SV et sont diffusés dans la direction VT.

L'élément $d\sigma$ de surface a pour valeur :

$$d\sigma = R^2 \cos l \,.\, dl \,.\, dL.$$

Les angles i et i' sont fournis par les relations :

$$\cos i = \cos l \,.\, \cos L, \qquad \cos i' = \cos l \,.\, \cos(\delta - L).$$

La quantité de lumière envoyée par l'élément $d\sigma$ est donc proportionnelle à :

$$\cos^3 l \,.\, \cos L \,.\, \cos(\delta - L)\, dl \,.\, dL.$$

Les variables sont séparées. Pour le fuseau compris entre les grands cercles de longitudes L et L + dL, la quantité envoyée est :

$$\cos L \,.\, \cos(\delta - L) \,.\, dL \int \cos^3 l \; dl = \frac{4}{3} \cos(\delta - L) \,.\, \cos L \,.\, dL.$$

L'intégration est faite entre $-\pi : 2$ et $+\pi : 2$.

Reste à intégrer : $\frac{4}{3}\int \cos(\delta - L).\cos L\,.\,dL,$

pour l'arc AB, c'est-à-dire entre les limites $\overline{DA}$ et BD, ou encore :

$$-(\pi : 2 - \delta) \quad \text{et} \quad \pi : 2.$$

On trouve aisément $\frac{2}{3}\left[(\pi - \delta)\cos\delta + \sin\delta\right].$

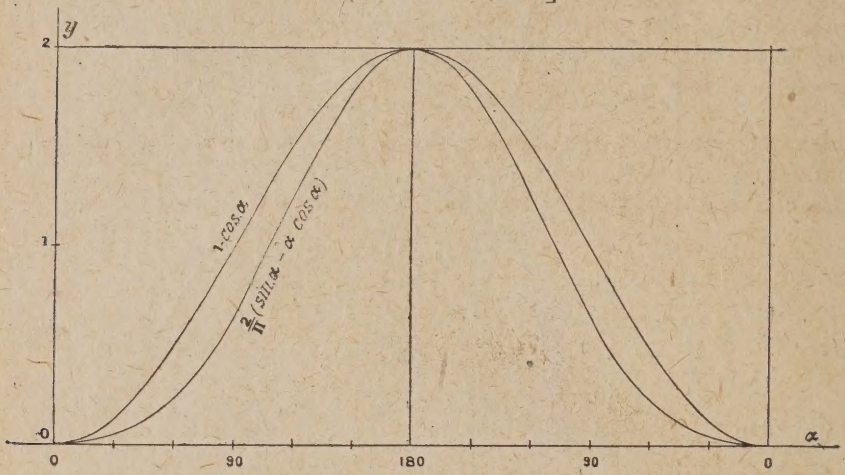


Fig. 160.

A la place de l'angle δ prenons le supplément $\alpha = \pi - \delta$.
L'expression devient :

$$\frac{2}{3}(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha).$$

En définitive l'éclairement reçu par la Terre est :

$$\frac{2}{3}\frac{\varepsilon_0 S}{v^2 x^2}(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha).$$

3° — Comparons les fonctions qui entrent dans les éclairements dans l'hypothèse du § 198 et dans l'hypothèse actuelle :

$$y = 1 - \cos\alpha, \qquad y = \frac{2}{\pi}(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha).$$

Elles sont nulles pour $\alpha = 0$. On a $y = 2$ pour $\alpha = \pi$.
La seconde est constamment au-dessous de la première.
Ainsi pour $\alpha = \pi : 2$, la première vaut 1, la seconde vaut 0,636.

$\alpha = 0$ correspond à la conjonction inférieure ;
$\alpha = \pi$ — — supérieure.

De là résulte qu'à partir de la conjonction inférieure pour laquelle

l'astre disparaît, son intensité globale croît moins vite dans l'hypothèse exacte où il diffuse la lumière reçue (en admettant la loi simple de Lambert), que dans celle où il se conduit comme lumineux par lui-même. Cela tient à ce que près de la conjonction inférieure, les régions vues sont éclairées très obliquement, par suite reçoivent moins de lumière que près de la conjonction supérieure.

Il faut donc rapprocher de celle-ci le maximum d'intensité globale.

Au reste le § 198 n'en perd pas son intérêt, la discussion devenant très compliquée avec la formule exacte et le sens de la correction étant, comme on le voit, facile à déterminer.

200. **Distribution des éclats quand l'astre est vu en phase ronde.**

En conjonction supérieure pour les planètes inférieures, en opposi-

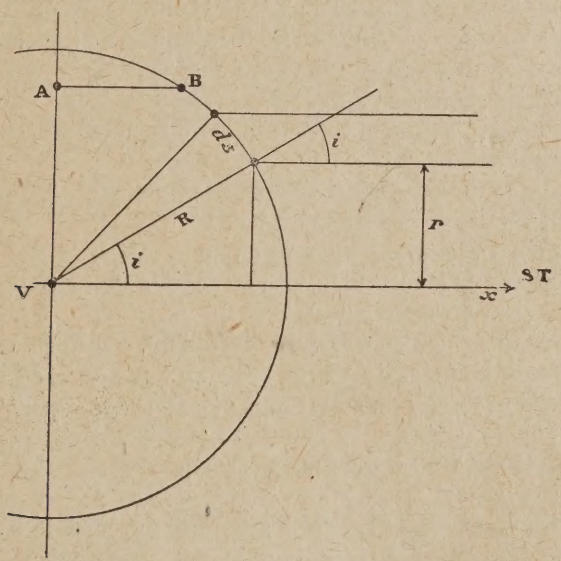


Fig. 161.

tion pour la Lune ou les planètes supérieures, l'astre est en phase ronde. On demande ce qui résulte de la loi de Lambert pour la variation de l'éclat du centre au bord par unité de surface apparente.

Si le corps était lumineux par lui-même et obéissait à la loi de Lambert, on le verrait comme un disque plat. Effectivement la quantité émise par une couronne d'aire $d\sigma$ dont les circonférences limites ont pour rayons r et $r + dr$, est proportionnelle à $d\sigma . \cos i$.

Mais on a :

$$d\sigma = 2\pi r . ds = 2\pi r \frac{dr}{\cos i}, \qquad d\sigma \cos i = 2\pi r\, dr.$$

La quantité de lumière émise est proportionnelle à la surface apparente : la sphère semble un disque plat.

Si le corps n'est plus lumineux par lui-même, la quantité de lumière qu'il reçoit par unité d'aire, est proportionnelle à $\cos i$; i et i' sont égaux, le Soleil et la Terre étant tous deux très loin sur Vx (par hypothèse). La quantité de lumière émise par unité de surface apparente est donc proportionnelle à :

$$\cos i = \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}}.$$

Elle varie comme les ordonnées $\overline{AB}$ de la circonférence.

201. **Mercure et les planètes intra-mercurielles.**

1° — Mercure cause beaucoup de souci aux astronomes. La ligne des apsides de son orbite dans le plan de cette orbite tourne plus vite qu'elle ne devrait en raison des masses de Vénus et de la Terre qui sont les planètes les plus voisines (voir le § 257 pour l'explication de cette phrase).

Assurément les masses de Vénus et de la Terre ne sont pas connues avec la dernière précision; mais le changement qu'il faudrait leur apporter pour faire cadrer la théorie et les observations, est si fort que l'expédient est inadmissible.

D'autant qu'on ne peut ainsi changer les masses des planètes sans faire par ailleurs naître des difficultés.

Comme on n'a remarqué aucune anomalie dans le mouvement des nœuds de l'orbite de Mercure, le corps troublant doit circuler à très peu près dans le plan de cette orbite (§ 255).

Il faut donc imaginer que le corps troublant est entre Mercure et le Soleil. On l'éloigne ainsi de Vénus et de la Terre, on le rapproche du Soleil : double avantage puisqu'il agit moins sur les planètes éloignées et que pour elles sa masse se confond plus exactement dans celle du Soleil. Comme nous n'en sommes pas à une hypothèse près (surtout si par nature sa fausseté est indémontrable), comme nous voulons surtout ne pas mettre en cause la loi de la gravitation qui est la base (mettons inébranlable, les adjectifs sont bon marché) de tout notre système, nous placerons entre le Soleil et Mercure un anneau de corpuscules assez petits pour échapper aux regards. Il sera dans le plan de l'orbite de Mercure.

Telle est l'hypothèse de Le Verrier que certains gogos jugent admirable.

Ils ont le tempérament louangeur. Car enfin que voulez-vous que fît Le Verrier? Mettre un astre unique? c'est embarrassant puisqu'on le verrait et qu'on ne le voit pas. Ajouter un renflement équatorial au Soleil? Évidemment cela revient au même : ce renflement n'agit comme tel que sur la planète la plus voisine, et du diable s'il serait possible de le voir à distance, la masse totale du Soleil étant hors de proportion avec la masse qu'il est nécessaire de surajouter : le Soleil n'en continuerait pas moins à nous paraître rond, aussi rond qu'il nous semble actuellement.

Donc l'anneau, ou de corpuscules invisibles, ou sous forme de renflement équatorial du Soleil, est l'hypothèse obligée; il n'y avait besoin d'aucune espèce de génie pour la trouver. Ceux qui l'admirent n'ont jamais réfléchi au rôle que joue dans l'Astronomie l'hypothèse de la gravitation et aux efforts surhumains qu'on fera pour ne jamais la lâcher. Quand l'expédient est aussi simple que de former un anneau *invisible*, par Jupiter! qui hésiterait à s'en servir?

Cet anneau agit sur Vénus, mais si peu que la gêne devient insignifiante.

2° — Dès que l'on sut que des planètes intra-mercurielles étaient demandées, on les chercha; on crut les trouver. M. Lescarbault, médecin à Orgères, annonce que le 26 mars 1859, il a vu passer sur le Soleil un disque noir. On nomme la nouvelle planète Vulcain; on détermine la durée de sa révolution sidérale, $19^j,7$. On détermine sa masse. Pour un peu on en aurait dressé la carte topographique....

Alors une foule d'observations surgissent; c'est à qui signalera le passage sur le Soleil de quelque chose de noir.

Comme il est facile de confondre une petite *tache solaire* avec une planète, les planètes intra-mercurielles abondent. Le Verrier discute les résultats et s'arrête à une planète ayant $33^j,02$ pour révolution sidérale. On calcule ses passages sur le Soleil; on en prédit une pour 1882.

Entre temps eut lieu l'éclipse totale de Soleil du 29 juillet 1878. Joie parmi les astronomes : on va pouvoir observer les planètes intra-mercurielles, puisque le Soleil dont la lumière les noie habituellement, sera supprimé par un écran!

M. Watson déclare avoir observé *deux* planètes intra-mercurielles. *C'etait une de trop*; car elles sont respectivement placées de manières si semblables par rapport à θ et ζ de l'Écrevisse que vraisemblablement M. Watson avait observé ces étoiles.

En 1882 on ne vit rien. La question en est là. Évidemment l'hypothèse de l'anneau *invisible* résout toutes les difficultés d'une manière singulièrement plus élégante que l'hypothèse d'une ou plusieurs planètes qu'on pourrait voir!

Mars.

202. Généralités.

1° — Mars est la première des planètes supérieures.

Sa distance moyenne au Soleil est 1,52, l'unité étant le demi-grand axe de notre orbite (moyenne distance de la Terre au Soleil).

Si les trajectoires des deux astres étaient circulaires, la distance de Mars à la Terre varierait donc de 0,52 dans les oppositions, à 2,52 dans les conjonctions (de 1 à 5 sensiblement).

Mais l'excentricité de l'orbite de Mars est énorme, 0,093; de sorte qu'en réalité la distance de Mars à la Terre varie de 1 à 7.

D'où les variations considérables d'éclat que présente la planète.

Quand Mars est le plus près possible de la Terre, son diamètre apparent est de 30″; à la distance 1, il est de 9″,5.

La révolution sidérale de Mars est de 687 jours; sa révolution synodique est de 780 jours. Allant moins vite que la Terre, c'est évidemment lors de ses oppositions qu'il rétrograde (fig. 153).

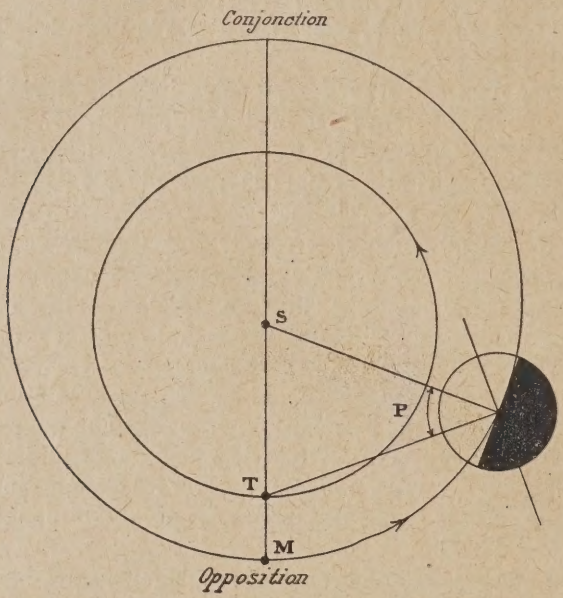


Fig. 162.

La durée des rétrogradations à chaque révolution synodique oscille entre 59 et 79 jours.

C'est pendant la rétrogradation qu'il est très lumineux et se distingue aisément des étoiles fixes. Il diminue ensuite de lumière et de grandeur jusqu'à se distinguer malaisément des étoiles.

2° — Mars n'est pas toujours en phase ronde.

D'une manière générale (§ 197) la largeur du croissant d'un astre est :

$$R(1 + \cos P).$$

L'angle P varie ici de 0 à 38° environ; 38° est le plus grand angle sous lequel de Mars on voit le rayon vecteur qui joint le Soleil à la Terre. La largeur du croissant varie donc de 2 à 1,8.

Ainsi le disque est plein en opposition et en conjonction.

Hors de ces positions, il ne l'est qu'à peu près.

La différence est faible : quand Mars s'écarte le plus d'être plein, il est comme la Lune à trois jours de son plein.

3° — Mars tourne en $24^h\ 37^m\ 33^s$ autour d'un axe qui fait $28°\ 42'$ avec le plan de l'orbite.

On remarquera qu'en opposition (l'astre passe au méridien à minuit) le diamètre apparent est maximum et la planète est en phase ronde : les circonstances de l'observation sont donc particulièrement favorables. Une tache blanche indique un des pôles de la planète : on l'attribue à un amas de neige.

203. **Eléments de Mars.**

1° — C'est sur Mars et en raison de l'excentricité considérable de son orbite, que Képler trouva ses lois. Reprenons à propos de Mars la détermination des éléments d'une planète.

Je prends pour guide l'*Astronomie* de Cassini (1740) « qui ne suppose rien de ce qu'on peut trouver par des observations immédiates ».

Pour fixer les idées, je rappelle qu'on admet aujourd'hui pour :

Année sidérale	686,98 jours moyens,
— synodique	779,94 —

Cassini utilise les opposition suivantes :

1	11 avril	1683 à	$0^h\ 10^m$,	longitude héliocentrique.		$201°\ 41'\ 30''$
2	4 janvier	1709	5 48 ,	—	.	104 18 25
3	21 avril	1715	11 0 ,	—	.	211 9 30
4	11 juin	1717	9 11 ,	—	.	260 37 15
5	5 avril	1730	7 4 ,	—	.	195 43 36

Comparons 3 et 4.

En $781^j\ 22^h\ 11^m$, Mars décrit une révolution sidérale plus $49°\ 27'\ 45''$.

D'où pour la rotation de 360° (révolution sidérale) par une règle de trois :

$$687^j\ 11^h\ 15^m.$$

Mais ce nombre ne donne pas la valeur de l'année sidérale *moyenne* parce que ni Mars ni la Terre n'avaient lors du parcours de supplément leurs vitesses moyennes. En tous cas c'est là une valeur approchée qui nous donnera sans erreur possible le nombre des révolutions entre deux oppositions plus éloignées.

2° — Cassini compare alors les oppositions 1 et 5.

L'intervalle est de $17\,160^j\ 6^h\ 54^m$, pour 25 révolutions sidérales moins $5°\ 57'\ 54''$. On obtient ainsi :

$$687^j\ 2^h.$$

Dans le même intervalle, il y eut 22 révolutions synodiques, ce qui donne à chacune d'elles la durée de 780 jours.

Nous voici déjà singulièrement près des nombres actuellement admis, et sans aucune correction impliquant la connaissance des inégalités du mouvement des deux astres.

3° — Cassini se sert alors des résultats de Ptolémée. Celui-ci observa une opposition l'an 130 de notre ère à $11^h\,48^m$ (temps de Paris) pour une longitude de 81° 22′ 50″. Cassini la compare à l'opposition 2 pour laquelle la longitude, rapportée à l'équinoxe de 1709, est de 104° 18′ 25″. Cassini remarque que dans l'intervalle des deux observations, la précession des équinoxes a augmenté les longitudes de 22° 33′, de sorte que, par rapport à l'équinoxe de Ptolémée, la longitude de l'opposition 2 est 81° 45′ 25″, *c'est-à-dire à peu près exactement celle de l'opposition de Ptolémée.* D'où résulte que non seulement le nombre des révolutions synodiques est entier, mais encore le nombre des révolutions sidérales.

Le nombre des révolutions synodiques étant exactement 739, le nombre des révolutions sidérales est presque exactement 839.

Entre les deux observations se sont écoulés, $576 \cdot 375^j\,18^h$, ce qui donne pour l'année sidérale. . . 686,98

— synodique . 779,94

qui sont précisément les nombres du *Bureau des Longitudes.*

Comme on le voit, cette précision qui paraît étonnante, résulte purement et simplement des observations de Ptolémée utilisées il y a deux siècles par Cassini.

204. Position du périhélie et excentricité.

1° — Pour fixer les idées je rapporte d'abord les nombres du *Bureau des longitudes.* La longitude du périhélie φ et la longitude du nœud ascendant sont données à la date t à partir de l'équinoxe moyen correspondant; t est compté en siècles de 36 525 jours à partir du 1er janvier 1900 (temps de Greenwich).

$$\varphi = 334° 13′ 6″,0 + 66″,254\,t.$$
$$\theta = 48\ 47\ 12\ ,1 + 27\ ,970\,t.$$

Excentricité $= e = 0{,}0934$

Inclinaison de l'orbite $= i = 1° 51′ 1″.$

On voit que φ et θ sont très peu variables; mais il ne faut pas oublier qu'ils sont rapportés à une origine qui varie de 5026″ par siècle.

2° — Pour déterminer le lieu du périhélie de Mars, Cassini utilise les trois oppositions suivantes :

1	11 décembre 1691 .	$3^h\,14^m$	longitude héliocentrique	79° 54′ 28″
2	20 février 1696 .	9 1	—	152 18 18
3	8 mai 1700 .	7 42	—	228 5 0

Le calcul devrait être fait sur le plan de l'orbite, mais l'erreur est petite, l'inclinaison étant de 1° 51′ 1″.

Nous connaissons le moyen mouvement; il est de 31′ 26″ = 1 886″ par jour moyen.

Représentons les résultats au moyen de la formule :

$$\theta - \varphi = \omega(t - \tau) + 2e \sin \omega(t - \tau).$$

φ est la longitude du périhélie; ω est le mouvement moyen diurne; t est évalué en jours.

Dans cette équation nous avons trois inconnues φ, τ, e.

Pour les déterminer nous avons besoin des trois observations.

Prenons pour temps origine $t = 0$, celui de la première opposition.

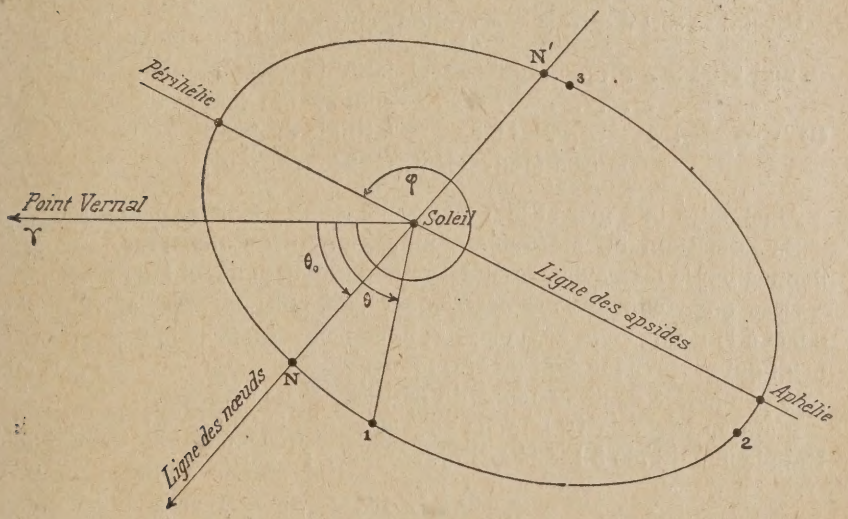


Fig. 163.

L'observation donne en jours et fractions de jours, les temps t des deux autres et les θ correspondants.

En résolvant les trois équations par approximation, Cassini trouve :

$$e = 0{,}0929, \qquad \varphi = 330° 31' 34''.$$

Cet exemple et ceux que je donne ci-dessus, prouvent le caractère élémentaire de ces considérations, quand on s'abstient de tout noyer dans un symbolisme pédagogiquement idiot. J'imagine que le lecteur est content de voir apparaître des éléments très approchés, comme résultats de calculs de la force du baccalauréat. Beaucoup d'astronomes de profession seront eux-mêmes surpris que tout cela soit aussi simple.

Qu'ils réfléchissent un instant. Il faut bien qu'il en soit ainsi, puisque Képler a découvert ses lois vers 1600, à une époque où l'on connaissait à peine les logarithmes, où les observations se faisaient avec des alidades à pinnules! Képler avait du génie, mais n'était pas sorcier; si le calcul approché des orbites exigeait des mathématiques transcen-

dantes, comment en serait-il sorti? Pourquoi ne pas montrer à nos étudiants qu'on parvient sans peine aux résultats approchés? Voulant être transcendant, pourquoi aboutir à ce joli résultat que les astronomes de profession exceptés, personne en France ne sait plus un mot d'Astronomie? Encore suis-je bon d'excepter les astronomes! j'en connais qui n'ont pu atteindre le certificat de mathématiques générales que par raccroc!

205. **Nœuds de l'orbite de Mars.**

Cassini se sert des trois observations suivantes :

2 mai 1700	$12^h\,32^m$	latitude boréale	$11'\,38''$
8 —	7 42	conjonction longitude	$228°\ 5'\ 0''$
10 —	11 53	latitude australe	$11\ 2$

moyen mouvement = 1 886″ par jour.

Ainsi entre le 2 mai et le 8 mai la planète a traversé l'écliptique.

En admettant un mouvement uniforme en latitude, l'interpolation donne pour le temps de passage (latitude nulle), le 6 mai 1700 à $14^h\,39^m$.

Mais nous connaissons exactement la longitude héliocentrique le 8 mai à l'instant de la conjonction; nous connaissons le moyen mouvement qui est presque égal au vrai mouvement puisque nous sommes en N′ à peu près à égale distance du périhélie et de l'aphélie.

Par une règle de trois nous pouvons donc calculer la longitude de Mars le 6 mai 1700 à $14^h\,39^m$. Nous trouvons :

$$227°\,12'\,13'.$$

C'est la longitude du nœud descendant N′.

D'où pour celle du nœud ascendant N :

$$47°\,12'\,13''.$$

Pour le 1er janvier 1900, on admet 48° 47′ 12″.

La différence tient en majeure partie au déplacement des nœuds, non pas à une erreur de Cassini.

206. **Inclinaison du plan de l'orbite.**

On peut employer une opposition. Lors d'une opposition, la Terre, le Soleil et la planète se trouvent dans le même plan normal à l'écliptique. Soit s et t les distances de la planète au Soleil et à la Terre, soit l et l' les latitudes héliocentrique et géocentrique. On a évidemment :

$$s \sin l = t \sin l'.$$

Lors d'une opposition le rapport $s : t$ est voisin de 3; les angles l et l' sont petits; d'où la relation approchée : $l' = 3l$.

Faisons le calcul avec plus de précision et tirons en l'inclinaison du plan de l'orbite.

La loi de Képler fournit le rapport des grands axes des orbites. Nous connaissons la position des périhélies et les excentricités; nous pouvons donc calculer pour la Terre et pour la planète le rapport exact des distances $s : t$, pour la longitude qui correspond à l'opposition utilisée.

Soit 1 la moyenne distance terrestre. Pour l'opposition du 8 août 1687 à midi (longitude 315° 54′), Cassini trouve $s = 1,386$. La distance de la Terre au Soleil était alors 1,013. L'inclinaison étant très petite, on a :

$$\frac{s}{t} = \frac{1,386}{1,386 - 1,013} = \frac{1,386}{0,373} = 3,71.$$

La latitude géocentrique était $l' = 6° 50′ 40″$; d'où $l = 1° 50′ 50″$.

D'une manière générale, la connaissance de la latitude vraie l ne

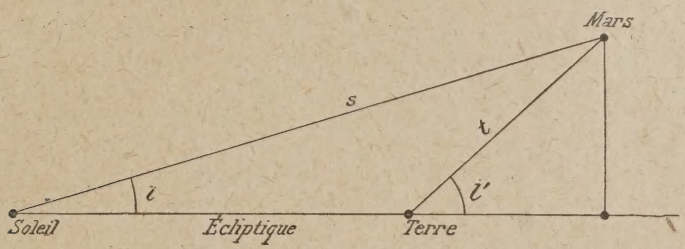


Fig. 164.

donne l'inclinaison de l'orbite i que si l'on connaît la distance en longitude à la ligne des nœuds :

$$\operatorname{tg} l = \sin \alpha \,.\, \operatorname{tg} i.$$

Mais dans l'observation actuelle α est si voisin de 90° qu'on a simplement $l = i$.

Cette observation est très favorable, et parce que Mars est très près de sa plus grande latitude l, et parce qu'il est près de son périhélie : sa distance à la Terre est voisine du minimum.

Les Petites Planètes

207. Généralités.

1° — Quelle que soit la loi : $a = \varphi(n)$, analogue à celle de Bode (§ 188) dont on se serve pour représenter *approximativement* les distances moyennes a des planètes en fonction de la sucession des nombres *entiers* n, elle montre une lacune entre Mars et Jupiter.

Une planète devrait s'y loger dont la distance serait 2,8 fois celle de la Terre au Soleil.

Képler affirmait déjà l'existence d'une planète entre Mars et Jupiter.

Au lieu d'une planète on en a trouvé 732 aux dernières nouvelles; on

les appelle *petites planètes* et on les considère comme les morceaux de la grosse qui n'existe plus.

Le tableau suivant contient quelques-unes des plus proches et des plus éloignées.

N°	Noms.	Rév. sidérale.	Distance moyenne.	Excentricité.
8	Flore	1 193 jours	2,201	0,157
18	Melpomène . . .	1 270 —	2,296	0,218
10	Hygie.	2 028 —	3,135	0,120
31	Euphrosyne . . .	2 041 —	3,149	0,223
76	Freïa	2 298 —	3,408	0,171

2° — Qu'il y ait des gens usant leur vie à chercher des planètes, à déterminer leurs éléments, à calculer leurs orbites, et cela quand on en a déjà catalogué 732, prouve que l'homme n'est pas difficile dans le choix de ses distractions. Non pas que je sois mécontent qu'on ait accompli le travail; j'éprouve même une certaine satisfaction à feuilleter la liste des petites planètes. Mais assurément je ne bougerai pas le petit doigt pour porter leur nombre de 732 à 733. « Nous sommes quatorze », disait Masséna à quelqu'un qui le félicitait d'être maréchal.

Mais puisque indéfiniment on trouvera des collectionneurs d'orbites pour accomplir ces besognes, utiles si l'on veut, profitons sans aucun scrupule de leurs « découvertes ».

Voyons quel problème pose l'existence de cet anneau d'astéroïdes.

Je veux bien le considérer comme angoissant pourvu que le lecteur sache que cette préoccupation douloureuse, toute de style astronomique, ne rend pas moins bleue la fumée de ma cigarette.

3° — Une planète amène des perturbations dans la marche des planètes voisines. Or en comparant les tables de Mars aux observations, Le Verrier conclut que la masse totale de l'anneau d'astéroïdes ne saurait dépasser le quart de celle de la Terre. Mars se conduit si régulièrement sur sa trajectoire qu'une masse plus grande de l'anneau serait inexplicable dans l'hypothèse des attractions newtoniennes (voir plus loin la nature des perturbations).

Ainsi la théorie indique une limite supérieure à la masse totale de cette poussière de planètes. Mais le nombre des astéroïdes, déjà de 732, augmente tous les ans; d'où l'angoissante question : la somme des masses de tous ces fragments ne finira-t-elle pas par devenir manifestement supérieure à la limite théorique? Auquel cas ....! auquel cas nous trouverons bien une échappatoire pour ne pas abandonner la théorie de Newton qui nous rend tant de services.

Ainsi lecteur, tremblez philosophiquement, mais ne vous bilez pas!

Il s'agit donc de déterminer la somme des volumes de nos $732 + x$ astéroïdes.

208. **Mesure des diamètres.**

1° — Comparaison des éclats.

Les diamètres sont extrêmement petits. Pour fixer les idées voici les résultats pour les quatre fragments les plus gros.

	Cérès.	Pallas.	Vesta.	Junon.
Diamètres apparents en secondes .	1″,06	0,68	0,54	0,27
Diamètres calculés en kilomètres .	960ᵏ	440	380	190

La mesure directe de tels diamètres étant très difficile et naturellement devenant impossible pour des diamètres plus petits, on a d'abord cherché les diamètres relatifs comme résultats de comparaisons photométriques. Le raisonnement était absurde, car il reposait sur l'hypothèse de l'égalité des pouvoirs diffusifs (*albedos*) et sur l'exactitude de la loi de Lambert, ce que tous les physiciens savent faux. Faire ces hypothèses revenait à poser que l'intensité de la source lumineuse était proportionnelle à la surface éclairée vue de la Terre (surface variable avec la phase, mais facilement calculable; § 197) et en raison inverse du carré des distances. Elle était donc proportionnelle au carré du rayon du fragment considéré.

Les premières expériences furent même si discordantes que leurs auteurs concluaient à l'irrégularité des fragments, soit comme forme (fragments polyédriques), soit comme propriétés diffusantes. Aujourd'hui que les expériences photométriques sont mieux faites, les résultats sont plus réguliers et ne contredisent plus l'hypothèse d'une forme quasi sphérique.

2° — Mesure directe des diamètres.

On abandonna bientôt les mesures photométriques comme pouvant donner les diamètres; on attaqua directement le problème. Tout ce qu'on trouva de plus certain est une limite supérieure des diamètres de la majorité des petites planètes. Nous avons donné ci-dessus les résultats pour les quatre astéroïdes les plus gros.

Pour fixer les idées, admettons pour la Terre le rayon moyen 6 370 kilomètres. Le cube de ce nombre est $258 \cdot 10^9$ environ.

Prenons des astres de 200 kilomètres de rayon; le cube de ce nombre est $8 \cdot 10^9$. Il en faudrait 32 000 pour faire le volume de la Terre, 8 000 pour faire le quart de ce volume.

Or la majeure partie des astéroïdes doit avoir un *diamètre* compris entre 10ᵏ et 200ᵏ : donc on peut trouver encore plusieurs milliers d'astéroïdes sans crainte de buter contre la terrible limite posée par Le Verrier.

3° — Maintenant que le lecteur comprenne l'absurdité foncière de ces raisonnements ainsi présentés; il faudrait qu'on s'habituât à quitter les phrases et à dire les choses comme elles sont.

Supposons un astre gros comme la Terre et couvert de noir de fumée :

nous ne le verrons pas, il existera pourtant. Supposons d'autre part que la densité de la matière des astéroïdes soit considérable par rapport à la densité moyenne de la Terre (5,53) : de la connaissance des volumes nous ne pouvons rien conclure au sujet de la masse.

Donc ce qui précède est un sophisme : je l'ai rapporté tel que les astronomes le donnent, pour que le lecteur apprenne à raisonner.

Rétablissons le raisonnement sur ses pieds.

Nous voulons maintenir coûte que coûte la loi des attractions newtoniennes : DONC la masse de l'anneau des astéroïdes est inférieure au quart de la masse de la Terre.

Rien dans les observations ne contredit cette conséquence ; nous devons écarter l'hypothèse de quelque gros astre à pouvoir diffusant trop petit pour qu'il soit visible, nous pouvons supposer aux densités moyennes des valeurs de l'ordre de la Terre. C'est beaucoup moins sensationnel, ça perd son caractère angoissant;... mais c'est raisonnable

209. **Eléments sur les petites planètes.**

La distance moyenne au Soleil des planètes dont nous nous occupons, varie de 2,07 à 4,30; de la troisième loi de Képler résulte que les révolutions sidérales varient de 3 ans à 8,8 ans.

L'excentricité de l'orbite peut approcher de 0,5. Elle est 0,125 en moyenne; le rapport de la plus grande distance au Soleil à la plus petite est donc de 1,3 en moyenne.

L'inclinaison du plan de l'orbite sur l'écliptique peut atteindre 35°.

Neptune.

210. **Nature des explications scientifiques.**

Pour mettre mon lecteur dans l'état d'âme voulu, je transcris une jolie page de Fontenelle; il parle à sa marquise imaginaire.

« Toute la philosophie n'est fondée que sur deux choses : sur ce qu'on a l'esprit curieux et les yeux mauvais. Car si vous aviez les yeux meilleurs, vous verriez bien si les étoiles sont des soleils qui éclairent autant de mondes, ou si elles n'en sont pas. Et si, d'un autre côté, vous étiez moins curieuse, vous ne vous soucieriez pas de le savoir, ce qui reviendrait au même. Mais on veut savoir plus qu'on ne voit! Encore, si ce qu'on voit on le voyait bien, ce serait toujours autant de connu; mais on le voit tout autrement qu'il n'est. Ainsi les vrais philosophes passent leur vie à ne pas croire ce qu'ils voient, et à tâcher de deviner ce qu'ils ne voient point; et cette condition n'est pas, ce me semble, trop à envier.

« Sur cela, je me figure toujours que la nature est un grand spectacle, qui ressemble à celui de l'Opéra. Du lieu où vous êtes à l'Opéra, vous ne voyez pas le théâtre tout à fait comme il est : on a disposé les déco-

rations et les machines pour faire de loin un effet agréable ; on cache à votre vue ces roues et ces contrepoids qui font tous les mouvements. Aussi ne vous embarrassez-vous guère de deviner comment tout cela joue.

« Il n'y a peut-être que quelque machiniste caché dans le parterre, qui s'inquiète d'un vol qui lui aura paru extraordinaire, et qui veut absolument démêler comment ce vol a été exécuté. Vous voyez bien que ce machiniste-là est assez fait comme les philosophes. Mais ce qui, à l'égard des philosophes, augmente la difficulté, c'est que dans les machines que la nature présente à nos yeux, les cordes sont parfaitement bien cachées ; elles le sont si bien, qu'on a été longtemps à deviner ce qui causait les mouvements de l'univers.

« Car représentez-vous tous les sages de l'Opéra, ces Pythagores, ces Platons, ces Aristotes, et tous ces gens dont le nom fait aujourd'hui tant de bruit à nos oreilles. Supposons qu'ils voyaient le vol de Phaéton que les vents enlèvent, qu'ils ne pouvaient découvrir les cordes, et qu'ils ne savaient point comment le derrière du théâtre était disposé. L'un deux disait : « C'est une vertu secrète qui enlève Phaéton. » L'autre : « Phaéton est composé de certains nombres qui le font « monter. » L'autre : « Phaéton a une certaine amitié pour le haut du théâtre ; il n'est pas à son aise quand il n'y est pas. » L'autre : « Phaéton « n'est pas fait pour voler ; mais il aime mieux voler que de laisser le haut « du théâtre vide » ; et cent autres rêveries que je m'étonne qui n'aient perdu de réputation toute l'antiquité.

« A la fin, Descartes et quelques autres modernes sont venus, qui ont dit : « Phaéton monte parce qu'il est tiré par des cordes, et qu'un poids « plus pesant que lui descend. » Ainsi, on ne croit plus qu'un corps se remue, s'il n'est tiré par un autre corps : on ne croit plus qu'il monte ou qu'il descende, si ce n'est par l'effet d'un contrepoids ou d'un ressort : et qui verrait la nature telle qu'elle est, ne verrait que le derrière du théâtre de l'Opéra. »

Voilà, plaisamment décrit, l'état d'âme du savant depuis Descartes. Arrivons à Neptune.

211. Inégalités d'Uranus.

La planète Uranus avait été découverte en 1781 par Herschel et étudiée par un grand nombre d'astronomes. En 1820, Bouvard entreprit de représenter les observations à l'aide d'un mouvement elliptique, en tenant compte des perturbations causées par les planètes les plus voisines, Jupiter et Saturne ; il n'y parvint pas. Les observations anciennes et modernes ne s'accordaient pas ; Bouvard (qui était malin comme un singe) conclut à l'existence probable de quelque action étrangère modifiant la marche de la planète.

Bessel pensait que la conciliation viendrait de la découverte d'une nouvelle planète dont les éléments seraient reconnus par son action sur Uranus et vérifiés par celle qu'elle exerce sur Saturne.

Le problème était donc posé comme il ne pouvait pas ne pas l'être. Si la planète Uranus avait une marche *déréglée*, *c'est-à-dire ne s'accordant pas avec les hypothèses admises, pour les conditions actuelles de leur application*, il devenait nécessaire ou d'abandonner ces hypothèses, ou de les conserver mais en modifiant les conditions de leur application. Personne ne songeait à abandonner l'hypothèse de la gravitation, ni même à modifier la loi de Newton qui expliquait au mieux la quasi-totalité des phénomènes connus; donc il fallait modifier les conditions d'application de cette loi, c'est-à-dire chercher l'astre ou les astres qui produisaient dans la marche d'Uranus les irrégularités constatées. C'est à cette alternative que se rangèrent tous les astronomes, en quoi ils obéissaient aux règles du genre.

Le problème était donc ramené aux termes suivants (et c'est ainsi que le posèrent Bouvard, Bessel, Le Verrier, Adams, et probablement plusieurs autres) : *déterminer la position d'un astre capable de causer les perturbations constatées sur Uranus.*

Poser le problème n'avait donc rien de difficile, puisque les termes mêmes de l'énoncé résultaient du refus d'abandonner la loi de gravitation, par suite de l'impossibilité de trouver pour les dérèglements d'Uranus une autre explication que l'existence d'une planète jusqu'alors inconnue; je dis *une*, parce qu'il fallait d'abord en chercher une avant d'en chercher plusieurs.

Ce problème, Le Verrier l'a résolu; il était très difficile. Mais ajoutons que sa résolution n'impliquait que des qualités extraordinaires de calculateur, cette épithète, prise dans son sens le plus relevé, restant la seule capable de désigner la sorte de génie nécessaire à cet exploit. Comme le dit Bertrand dans son éloge académique, *Le Verrier avait une exactitude consommée dans le maniement des chiffres.* Tel est le style ordinaire des savants académiciens quand ils font des grâces devant les dames! Des élégances de phoques savants!

212. **Découverte de Neptune.**

Je laisse maintenant la parole à Tisserand.

« Dans un travail lu le 1er juin 1846, Le Verrier se propose d'abord d'examiner si le mouvement elliptique, augmenté des perturbations produites par Jupiter et Saturne, est susceptible de représenter exactement les observations d'Uranus. Il arrive à montrer qu'il est entièrement impossible de représenter ces observations.... En présence de cette incompatibilité bien démontrée..., il aborde hardiment [il n'était nécessaire d'aucune hardiesse] l'hypothèse d'une planète agissant d'une manière très lente. Il montre *a priori* qu'elle doit être située au delà d'Uranus et très loin, et que sa masse doit être considérable. Se laissant guider par la loi de Bode,... il admet que le grand axe de l'orbite de la planète inconnue doit être double de celui d'Uranus. Il remarque ensuite que les orbites de Jupiter, Saturne, Uranus, sont peu inclinées

sur l'écliptique ; il admet dans une première approximation, que la planète cherchée se meut sur l'écliptique, ce qui prouve du reste la petitesse des perturbations en latitude d'Uranus ; il est aussi conduit à se poser la question suivante : *Est-il possible que les inégalités d'Uranus soient dues à l'action d'une planète située dans l'écliptique, à une distance moyenne double de celle d'Uranus? et s'il en est ainsi, où est actuellement cette planète? quelle est sa masse? quels sont les éléments de l'orbite qu'elle parcourt?* »

« Ce problème présentait des difficultés considérables. On conçoit que, les éléments de l'orbite d'une planète et sa masse étant connus, on peut déterminer les dérangements qu'elle produit sur une autre planète : c'est le problème des perturbations. Ici au contraire les dérangements d'une planète étant connus, il faut déduire les éléments de l'orbite et la masse de la planète troublante : c'est le problème des perturbations renversé. Il y a plus : on ne connaît pas les vrais éléments de l'orbite d'Uranus, de telle sorte qu'il faut déterminer aussi bien ce qui se rapporte à Uranus que ce qui a trait à la planète cherchée. Tout compte fait le problème comporte 8 inconnues que l'on doit déterminer en satisfaisant aussi bien que possible à un nombre considérable d'équations transcendantes fort compliquées. »

Voilà le grand mot lâché ; il fallait pour résoudre ce problème un calculateur aussi merveilleux que Le Verrier. Mais quand on nous parle de *hardiesse*, de *pénétration admirable*, etc., on se moque de nous. Il ne s'agit pas de dénigrer, mais de comprendre ; la découverte de Le Verrier implique des qualités éminentes, mais d'un ordre spécial ; il n'y a rien de mystérieux ni dans l'énoncé du problème (qui n'est pas de Le Verrier), ni dans la manière de le résoudre. Il s'agissait de tâtonner intelligemment : c'est ce que fit Le Verrier. Tout de même résoudre un système d'équations à 8 inconnues, ce n'est pas écrire la *Philosophie naturelle* de Newton. Ayons le sens des hiérarchies et ne soyons pas idiots, même dans nos admirations !

213. Observations de Neptune.

1° — Comme conséquence de ses calculs, Le Verrier fixe la position de la planète troublante sur l'écliptique à 10° près. Il en détermine la masse probable, et, lui supposant la densité d'Uranus, il lui assigne un diamètre apparent de 3″,3. Le 23 septembre 1846, Galle, astronome à Berlin, prévenu par Le Verrier, trouve effectivement à 1° de la position prévue une planète dont le diamètre apparent est 2″,5.

Neptune était découvert.

En même temps un astronome anglais Adams, travaillant le même problème, déterminait une planète troublante dont la position ne différait de celle de Le Verrier que de 3°. Si la priorité de la découverte est certainement à Le Verrier, que le lecteur comprenne par cette coïnci-

dence de quelle nature était le problème ; sa solution était fort loin d'être miraculeuse.

Il est bon de comparer les éléments de la planète prévue aux éléments de la planète réelle.

	Éléments prévus.	Éléments réels.
Demi-grand axe.	36,2	30,1
Révolution sidérale . . .	217 ans	165
Excentricité	0,107	0,006
Masse.	1 : 9 300	1 : 19 314

La concordance est fort loin d'être prodigieuse. N'en déplaise à Bertrand (Joseph), Le Verrier eut quelque veine que la planète réelle fût si près de la planète calculée.

2° — Et maintenant si vous voulez savoir ce qu'est l'âme des savants, avec quelle facilité ils jettent l'injure quand il s'agit de garder leur os, vous n'avez qu'à lire le mémoire d'Arago (t. XXXIII des *Comptes Rendus*, 1846, page 741) défendant son ami Le Verrier ! C'est écœurant ! Herschel, Airy, Challis sont traités comme des voleurs parce qu'ils osent dire qu'Adams avait eu la même idée que Le Verrier (après beaucoup d'autres) et était arrivé aux mêmes résultats, ou à peu près.

En lisant ces pages jaunies, mon indignation le cède pourtant à la tristesse. Il fut un temps où il paraissait injurieux aux Français que d'autres les égalassent dans l'avancement des sciences. Notre orgueil était ridicule ; aujourd'hui nous n'avons plus d'orgueil, et pour cause !

Plus tard Le Verrier paya cher son triomphe insolent de 1846 ; on lui fit durement sentir qu'il n'était qu'un calculateur de génie. D'autres calculateurs surgirent pour le frotter à contre-poil. Après le mémoire d'Arago, il est moral de lire les mémoires de Delaunay rabrouant comme il convient le terrible despote de l'Observatoire.

CHAPITRE IV

PARTICULARITÉS DES DIVERSES PLANÈTES (*suite*)

Jupiter et ses satellites.

214. Données fondamentales.

1° — Tandis que l'aplatissement du globe terrestre est sensiblement de 1 : 293, celui de Jupiter considérablement plus grand et voisin de 1 : 15.

Le diamètre apparent équatorial serait 196″, à supposer l'astre placé

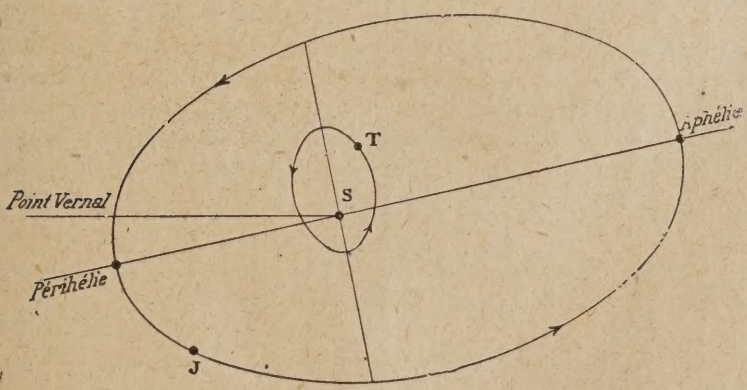


Fig. 165.

à la Terre à la distance moyenne de la Terre au Soleil (distance 1). Mais comme Jupiter moyennement à la distance 5,20 du Soleil, comme par suite ses distances maxima et minima à la Terre sont sensiblement 6 et 4, le diamètre équatorial apparent le plus grand est voisin de 50″

L'inclination de l'orbite de Jupiter sur l'écliptique est 1° 18′ 52″.

Les anciens l'avaient surnommé la *planète de l'écliptique.*

2° — La longitude de son périhélie est 11°, tandis que la longitude du périhélie de la Terre est de 100°. Les ellipses trajectoires (presque dans le même plan) sont disposées comme l'indique la figure schématique 165.

La longitude de la ligne des nœuds est mal déterminée, vue la faible inclinaison. La longitude du nœud ascendant est voisine de 99°.

Admettons pour l'excentricité $e = 0{,}0483$.

L'équation approchée du centre est donc :

$$\theta = \omega t + 0{,}0966 \sin \omega t.$$

Or $0{,}0966 = 5° 32'$; c'est la plus grande équation.

On a donc :

$$\theta = \omega t + (5°32') \sin \omega t.$$

L'origine du temps est le passage au périhélie.

215. **Rotation.**

Jupiter vu au télescope est sillonné de bandes, principalement dans

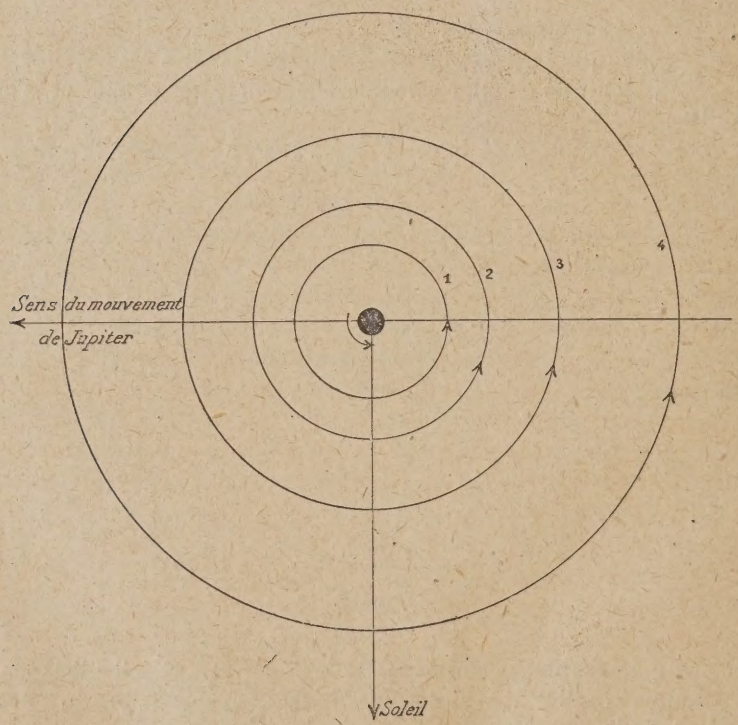


Fig. 166.

la région équatoriale. On aperçoit parfois des taches, des irrégularités dans ces bandes, ce qui dès 1665 a fait découvrir la rotation de la planète de l'est à l'ouest (sens de la flèche de la figure 160).

Tandis que la Terre fait un tour sidéral en $23^h\ 56^m\ 4^s$, Jupiter, bien que son rayon équatorial soit 11,14 fois celui de la Terre, fait un tour en $9^h\ 56^m$. Un point de l'équateur se déplace de 12,45 kilomètres par seconde, 26 fois plus qu'un point de l'équateur terrestre. Il résulte de là une force centrifuge énorme.

Chose curieuse, la durée de révolution n'est pas la même suivant qu'on la détermine sur l'équateur ou sur un parallèle : elle décroît à mesure qu'on prend un repère plus près du pôle. Conclusion : nous voyons, non la planète, mais des nuages qui suivent plus ou moins fidèlement le mouvement de la planète.

L'axe de rotation de Jupiter est quasi normal à l'écliptique; l'inclinaison de l'équateur de Jupiter sur l'écliptique est de 3° environ; elle ne peut être déterminée avec plus de précision.

216. Satellites. Paramètres.

Les quatre principaux satellites de Jupiter ont une importance historique et théorique capitale : ils ont été découverts par Galilée. Leurs mouvements sont complexes, mais leurs orbites restent quasi circulaires. Les inclinaisons des orbites sur l'équateur de Jupiter sont faibles; les inclinaisons sur l'écliptique le sont aussi.

Leurs distances moyennes à Jupiter, évaluées en prenant pour unité le demi-diamètre équatorial de la planète, sont :

5,91 9,40 14,99 26,36.

Le dernier chiffre de ces nombres est douteux, le diamètre apparent de Jupiter ne dépassant pas 50″.

Les durées de *révolutions synodiques* des satellites sont les temps qui séparent deux conjonctions ou deux oppositions successives d'un satellite avec la planète pour un observateur placé sur le Soleil.

Les *révolutions sidérales* sont les temps que les satellites mettent à tourner de 360° autour de la planète.

Voici les valeurs moyennes déduites de conjonctions très espacées, pour mieux compenser les inégalités des satellites, celles de Jupiter et les erreurs d'observation.

	Révolutions sidérales.	Révolutions synodiques.
I.	$1^j\ 18^h\ 27^m\ 33^s$	$1^j\ 18^h\ 28^m\ 36^s$
II.	3 13 13 42	3 13 17 54
III.	7 3 42 33	7 3 59 36
IV.	16 16 32 8	16 18 5 7

Conformément à la théorie de la gravitation, la troisième de Képler s'applique aux rayons des orbites et aux durées des révolutions *sidérales*. Les carrés des temps sont comme les cubes des grands axes.

Par exemple les révolutions sidérales des satellites I et IV sont :

2 547 minutes 24 042 minutes.

dont les carrés sont comme :

649 57 792

tandis que les cubes des distances sont comme :

$206 = 649 : 3{,}15$, $18\,316 = 57\,792 : 3{,}15$.

Jupiter et ses satellites forment donc un système comparable en première approximation au système formé par le Soleil et par les planètes jouant le rôle de satellites du Soleil.

Les révolutions synodiques sont un peu plus longues que les sidérales en raison du mouvement de Jupiter autour du Soleil. En regardant la figure 160, le lecteur comprendra qu'après avoir fait 360°, les satellites doivent accomplir encore un petit angle pour se retrouver en conjonction. Cet angle est très petit à cause de la grandeur de la révolution de Jupiter autour du Soleil : 11 ans et 315 jours (soit 4 332 jours, l'année ici utilisée étant l'année julienne de 365,25 jours), à cause aussi de la petitesse des périodes de révolution des satellites.

217. **Eclipses des satellites de Jupiter.**

Ces préliminaires posés revenons sur les phénomènes.

1° — Les satellites de Jupiter, comme Jupiter même, sont éclairés par le Soleil ; quand ils ne se projettent pas sur le disque de la planète, ils apparaissent donc comme de petits points brillants. Vu leur distance grande au Soleil par rapport à la distance de la Terre au Soleil, ils n'ont pas de phases sensibles : leurs disques sont toujours à peu près circulaires.

Quand ils se projettent sur la planète, ils deviennent quasiment invisibles, leur éclat étant presque égal à celui de la planète. Parfois on les distingue vaguement, ce qu'on attribue à de petites taches, à des inégalités de pouvoir diffusif.

Comme les plans de leurs orbites sont peu inclinés sur le plan de l'orbite de Jupiter, les trois premiers satellites qui sont les plus voisins de la planète, sont éclipsés à chaque révolution. Le quatrième seul passe quelquefois à côté du cône d'ombre sans y pénétrer.

En définitive nous pouvons marquer sur la trajectoire des trois premiers satellites dix points remarquables. Pour fixer les idées, je considère le premier satellite ; je donne pour lui ce qui se passe le 1er et le 2 janvier 1915. La Terre et le Soleil sont placés par rapport à Jupiter comme l'indique la figure 167. Inutile de prévenir qu'elle ne respecte pas les dimensions et les distances relatives.

A $0^h\,4^m\,50^s$ le satellite I est en Dc ; il *commence* à passer sur le *disque*. A $0^h\,58^m\,26^s$, il est en Oc ; son *ombre* commence à se projeter sur le disque et y cause une éclipse de Soleil.

A $2^h\ 22^m\ 39^s$, il est en D*f*; il *finit* de passer sur le disque : son ombre y est encore. En C il est en conjonction avec le Soleil.

A $3^h\ 15^m\ 55^s$ il est en O*f*; son *ombre finit* sa course sur le disque.

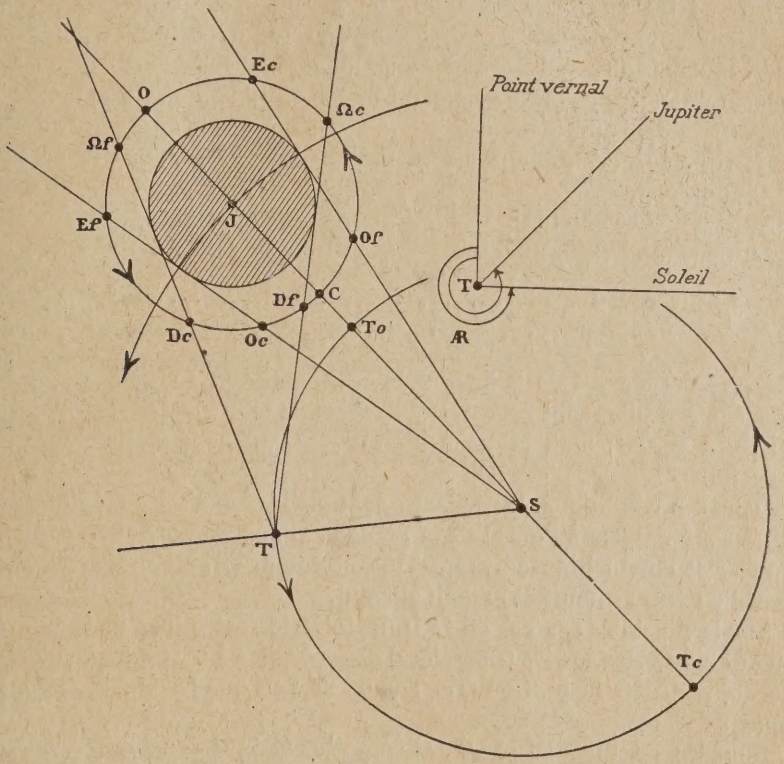


Fig. 167.

A $21^h\ 20^m\ 1^s$ *commence* son *occultation* en Ω*c*.

En E*c* *commence* son *éclipse*; en O il y a opposition, en Ω*f* finit son occultation. Mais comme l'éclipse commence pendant l'occultation, comme l'occultation finit pendant l'éclipse, la *Connaissance des Temps* ne donne pas les heures de ces points.

En E*f*, à $0^h\ 29^m\ 57^s$ du 2 janvier 1915, finit l'éclipse; le satellite I sort de l'ombre de Jupiter.

Le phénomène recommence en D*c* le 2 janvier à $18^h\ 34^m\ 58^s$.

Les points remarquables sont donc le commencement et la fin :

du passage sur le disque.	D*c*, D*f*;
de l'occultation	Ω*c*, Ω*f*;
du passage de l'ombre sur le disque.	O*c*, O*f*;
de l'éclipse (immersion, émersion).	E*c*, E*f*;

auxquels il faut joindre la conjonction C et l'opposition O.

2° — Voici diverses remarques qui fixeront les idées du lecteur.

L'instant que nous avons choisi, est compris entre une opposition de Jupiter et la conjonction suivante : la Terre est dans la portion (To, Tc) de sa trajectoire. Lors d'une opposition To, Jupiter passe au méridien à minuit; lors d'une conjonction Tc, il passe au méridien à midi. Dans les circonstances choisies, il passe au méridien, entre midi et le minuit suivant, par conséquent moins de 12 heures après le Soleil.

Effectivement la *Connaissance des Temps* nous apprend que le 1er janvier 1915, Jupiter passe au méridien à $2^h\ 59^m\ 56^s$ (temps astronomique).

Nous pouvons obtenir la configuration du système autrement.

Au 1er janvier 1915, midi moyen, nous trouvons :

Æ du Soleil	$18^h\ 44^m$
Æ de Jupiter	21 40

La différence est de 3 heures environ, soit 45°. Rappelons que les ascensions droites sont comptées du centre de la Terre vers l'est à partir du point vernal; d'où la disposition indiquée dans la petite figure 161 à droite.

Dans ces conditions, les éclipses sont visibles à l'est de la planète. Elles sont visibles à l'ouest de la planète, si l'on est entre une conjonction Tc et l'opposition suivante To, autrement dit, si Jupiter passe au méridien entre minuit et le midi suivant.

Sur la portion (To, Tc) de la trajectoire terrestre (cas de la figure), on ne voit que les sorties (*émersions*) des satellites I et II hors de l'ombre de Jupiter; sur la portion (Tc, To), on ne voit que les entrées (*immersions*).

Pour les satellites III et IV qui sont plus éloignés de Jupiter, on voit en général l'immersion et l'émersion.

Dans le cas de la figure (arc To, Tc de la trajectoire), l'ombre d'un satellite est à l'est de ce satellite. Elle est à l'ouest entre une conjonction et l'opposition suivante (arc Tc, To de la trajectoire).

218. Emploi des satellites à la détermination des longitudes terrestres.

1° — La différence des longitudes de deux lieux est égale à la différence de leurs heures locales sidérales, pour préciser. L'origine de ces heures est définie par le passage d'une certaine étoile équatoriale dans le méridien (déterminé par la méthode des hauteurs égales). Pour connaître en temps sidéral la distance horaire des origines, on observe un phénomène instantané, visible à la fois des deux lieux; on inscrit les heures locales sidérales pour lesquelles il se produit.

Par leurs fréquentes éclipses qui sont en même temps visibles de lieux très éloignés, les satellites constituent des signaux célestes instantanés dont les divers observateurs marquent les heures locales.

Une simple soustraction donne la différence des longitudes.

L'avantage de la méthode est de n'exiger aucune correction de parallaxe, de réfraction ..., puisque le phénomène observé est réel, objectif : c'est l'entrée d'un point lumineux dans un cône d'ombre. La seule condition exigée pour son emploi est de posséder des tables correctes qui donnent à l'avance les immersions ou émersions en heures du méridien origine (heures sidérales ou de temps moyen, peu importe; on passe aisément des vues aux autres).

A défaut de tables, deux observateurs, placés dans les lieux dont on veut la différence de longitudes, déterminent simultanément les heures locales du phénomène : la méthode est alors réduite à une extrême simplicité. Suivant l'expression de Cassini, le rôle du satellite est purement et simplement de cacher ou de découvrir un flambeau simultanément visible de lieux très éloignés. Si l'instant du phénomène est déterminable à 2 secondes près (ce qui donne une différence possible de 4 secondes de temps entre les heures observées en deux points terrestres), la différence des longitudes de ces points sera connue à une minute de degré près (1 852 mètres à l'équateur).

Telle est l'approximation limite de la méthode.

Les immersions se déterminent avec plus de précision que les émersions.

2° — Cette méthode inventée par Cassini I^{er}, fut appliquée d'abord en 1671 à la détermination de la différence de longitude entre Paris et l'observatoire que Tycho Brahé avait construit en 1580 à Uranibourg, dans l'île de Huene, à peu de distance et au nord de Copenhague.

En 1671 il ne restait pas une pierre de cet observatoire; il était pourtant utile d'en déterminer au mieux l'emplacement pour utiliser les observations de Tycho.

Cassini observait à Paris, l'abbé Picard et Rœmer à Uranibourg. La différence des heures des immersions oscilla entre 42 minutes 2 secondes de temps et 42 minutes 20 secondes. On s'arrêta à 42 minutes 10 secondes, qui font 10° 32′, pour la longitude est d'Uranibourg.

Pour comprendre le progrès représenté par la méthode, on saura que les précédentes déterminations à l'aide des éclipses de Lune (méthode dont le principe est le même) avaient donné : 40^m 0^s (Képler), 49^m 20^s (Longomontanus), 48^m 0^s (Bouillaud), 45^m 36^s (Riccioli).

On trouve dans la *Connaissance des Temps*, pour l'observatoire de Copenhague : longitude est 40^m 58^s qui font 10° 14′.

Mais Huene est un peu à l'est de Copenhague.

La méthode a de remarquable que son erreur absolue n'est pas plus grande pour 180° que pour 10. Médiocre pour de très petites distances, elle est excellente pour de grandes. Il n'en est pas de même des méthodes télégraphiques dont la précision diminue à mesure qu'on est forcé d'utiliser plus d'intermédiaires ou de relais. Qu'on obtienne

aujourd'hui une précision plus grande avec ces méthodes, n'enlève rien de l'intérêt historique et pédagogique de la méthode de Cassini.

3° — Nous supposons dans ce qui précède que deux astronomes observent simultanément. Outre que l'état du ciel rend parfois impossibles les observations simultanées, on ne peut immobiliser indéfiniment un astronome à l'observatoire du méridien origine. On tourne la difficulté par la construction de tables.

La *Connaissance des Temps* publie l'heure des éphémérides fondamentales des quatre satellites principaux, qu'elle décore du titre d'*anciens satellites*. A dresser ces tables, Cassini et beaucoup d'autres depuis se sont ingéniés.

Passons en revue les inégalités principales des satellites.

219. Principale inégalité des satellites.

1° — La période synodique est l'espace de temps qui sépare deux

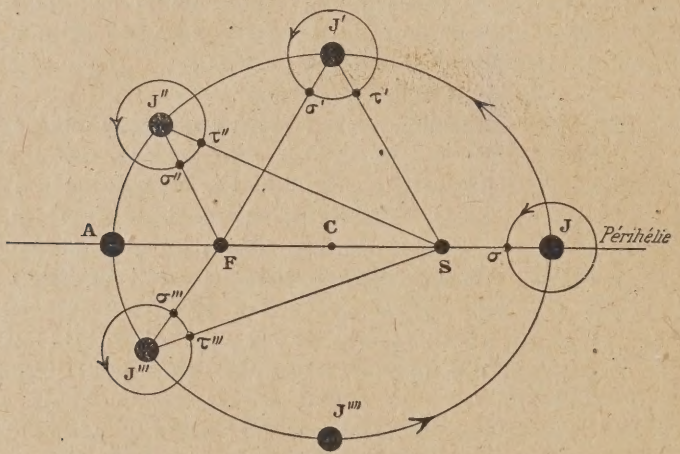


Fig. 168.

conjonctions ou deux oppositions du satellite, par rapport au Soleil et à la planète. On la détermine par les éclipses, de manière à ne pas faire intervenir l'inégalité qui provient de la parallaxe annuelle de la Terre. A supposer Jupiter immobile, l'heure de l'opposition est la moyenne des heures de l'immersion et de l'émersion. Vu la grande durée de la révolution de Jupiter (près de 12 ans), la correction résultant de son mouvement est petite et facile à effectuer.

Pour trouver la période *moyenne*, on prend un intervalle de temps assez long pour que les inégalités se compensent. On a par suite le mouvement moyen. Pour trouver les inégalités, on compare les temps obtenus à l'aide du mouvement moyen, aux temps réellement observés.

La méthode est absolument générale et obligée.

2° — La plus grande des inégalités vient de l'inégalité du mouvement de Jupiter dont la trajectoire elliptique a une excentricité notable, près de trois fois supérieure à celle de la Terre (0,0483). Pour trouver la grandeur de l'inégalité, utilisons le théorème du § 85 : vu du foyer F de sa trajectoire elliptique non occupé par le Soleil, le mouvement de Jupiter est sensiblement uniforme. Occupons-nous des conjonctions du satellite (ce qui rend la figure plus claire) bien que ce soient les oppositions qu'on détermine. Nous supposons que le mouvement du satellite est uniforme; ce qui revient au même, nous ne considérons que son moyen mouvement.

Le temps qui sépare les conjonctions successives du satellite et du foyer F, est invariable. Donc le temps qui sépare les conjonctions successives du satellite et du Soleil est variable : c'est l'inégalité en question.

Partons du périhélie J. Quand Jupiter passe en J', la conjonction du satellite avec F est en σ'; la conjonction avec S est en τ'. Donc le satellite arrive en conjonction avec le Soleil (passe en τ') *en retard* sur le temps que prévoit le calcul effectué avec la période synodique moyenne. Le retard est égal au temps que met le satellite à parcourir l'arc $\sigma'\tau'$.

On voit ainsi que, du périhélie à l'aphélie, la conjonction est en retard sur le temps prévu d'après la durée moyenne de révolution du satellite, d'une quantité qui croît à partir du périhélie, passe par son maximum à peu près à mi-chemin entre le périhélie et l'aphélie, et qui s'annule à l'aphélie.

L'inégalité devient une avance quand Jupiter passe de l'aphélie au périhélie.

Évaluons l'inégalité (§ 214).

L'angle FJ''S' vaut $0{,}0483 \times 2 = 0{,}0966 = 5° 32'$.

Le plus grand retard et la plus grande avance du satellite sur les temps calculés avec la valeur moyenne de la révolution synodique, sont égaux au temps qu'il met à parcourir 5° 32'.

Le premier satellite y emploie $39^m\ 22^s$. Les temps de ses conjonctions sont donc représentés par la formule approchée :

$$t = n\tau + (39^m\ 22^s)\sin\omega t. \qquad (1)$$

$2\pi : \omega = T$ est la durée de révolution anomalistique de Jupiter; n est le numéro d'ordre de la conjonction comptée à partir du périhélie; τ est la période moyenne synodique.

Au bout de 3 ans environ après le passage au périhélie, le temps vrai de la conjonction sera de $39^m\ 22^s$ en retard sur le temps calculé; après 9 ans environ, le temps vrai sera de $39^m\ 22^s$ en avance. L'inégalité, nulle au temps 0, redevient nulle après 6, 12, 18,... ans environ. La période vaut plus exactement 11 années juliennes + 315 jours = 4333 jours.

Pour les quatre satellites on trouve :

$39^m\ 22^s$ $\quad$ $1^h\ 19^m\ 13^s$ $\quad$ $2^h\ 39^m\ 42^s$ $\quad$ $6^h\ 12^m\ 59^s$.

3° — Il est facile de voir que la période vraie a sa valeur maxima moyenne quand l'inégalité passe par son maximum ou son minimum, en J′ ou en J^{iv}. Alors l'angle $\sigma'\tau'$ reste sensiblement constant pendant quelques jours.

De J^{iv} à J′, la révolution vraie est plus grande que la moyenne : l'inégalité passe de son minimum à son maximun. De J′ à J^{iv}, elle est inférieure à la moyenne : l'inégalité passe de son maximum à son minimum.

Plus généralement la période vraie est obtenue en différentiant l'équation (1).

$$\Delta t = \tau + \tau\omega(39^m\,22^s)\cos\omega t.$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \qquad \omega\tau = 2\pi\frac{\pi}{T} = 6{,}2832 \times \frac{1^j\,18^h\,29^m}{4\,333} = 0{,}00256$$

$(39^m\,22^s) \times 0{,}00256 = 6^s{,}05$ pour le premier satellite.

La plus grande différence de deux périodes vraies est donc de 12^s environ. C'est peu de chose ; mais l'accumulation de ces trois petites différences finit par faire 40 minutes.

Telle est la première inégalité découverte par Cassini I^{er} ; elle fournit l'excentricité de la trajectoire elliptique de Jupiter autour du Soleil.

220. Vitesse de la lumière.

1° — Quand on eut calculé la marche des satellites en ajoutant aux marches moyennes l'inégalité qui provient du mouvement elliptique de Jupiter suivant la loi des aires, l'accord entre le calcul et l'observation se trouva fort loin d'être obtenu. C'est alors que Rœmer en 1675 posa que le désaccord avait pour cause la vitesse *finie* de la lumière : nous voyons les phénomènes lumineux un temps t après qu'ils ont lieu, temps relié à la distance e où ils se produisent, par la relation :

$$e = Vt;$$

V est la vitesse de la lumière.

D'où résulte que si, d'une immersion du satellite à la suivante, Jupiter s'éloigne de la distance e, l'intervalle entre les deux immersions est augmenté de $t = e : V$.

Si Jupiter se rapproche, l'intervalle est diminué.

Nous connaissons la disposition relative des trajectoires elliptiques de la Terre et de Jupiter (fig. 159). Nous connaissons leurs excentricités, (0,0167 et 0,00483), la troisième loi de Képler fournit le rapport des grands axes. Les expériences à la surface de la Terre font connaître la vitesse de la lumière (300·000 kilomètres à la seconde).

L'étude de l'inégalité en question donnera donc la valeur en kilomètres de la distance moyenne de la Terre au Soleil (grand axe de l'orbite).

C'est ainsi que le problème se pose actuellement ; mais du temps de Rœmer l'ordre de grandeur de la vitesse de la lumière était inconnu.

2° — Pour préciser par des nombres, disons que le temps mis par la lumière à parcourir le grand axe de l'orbite terrestre est :

$$8^m\,18^s = 498 \text{ secondes},$$

temps pendant lequel la Terre se déplace d'environ 20″ sur sa trajectoire.

Supposons circulaires les trajectoires de la Terre et de Jupiter; la différence de leurs distances maxima et minima est égale à deux fois le rayon de la trajectoire terrestre, espace que la lumière met $16^m\,36^s$ à parcourir. Donc les éclipses des satellites arriveront $16^m\,36^s$ plus tard dans les conjonctions (distance TJ maxima) que dans les oppositions (distance TJ minima).

Mais l'excentricité de l'orbite de Jupiter est grande; voyons ce qui en résulte.

La moyenne distance de Jupiter (demi-grand axe de l'orbite) est $a = 5{,}20$. L'excentricité étant 0,0483, on a :

$$c = 5{,}20 \times 0{,}0483 = 0{,}25.$$

Les distances maxima et minima du Soleil sont :

$$5{,}20 + 0{,}25 = 5{,}45, \qquad 5{,}20 - 0{,}25 = 4{,}95.$$

Négligeant l'excentricité de l'orbite terrestre, nous trouvons pour les distances maxima et minima de Jupiter à la Terre : 6,45 et 3,95 dont la différence est 2,50.

Du fait de l'excentricité de l'orbite de Jupiter, l'inégalité est augmentée de $4^m\,9^s$ quand, en conjonction ou en opposition, Jupiter est aphélie, par rapport à ce qu'elle est pour Jupiter périhélie.

3° — Il est facile de poser une formule de première approximation pour l'équation en question.

Soit L et L′ les longitudes héliocentriques de la Terre et de Jupiter; soit r et r' les rayons vecteurs correspondants. La distance ρ des astres est :

$$\rho = \sqrt{r^2 + r'^2 + 2rr' \cos(L - L')}. \qquad (1)$$

$$L = L_0 + 2e \sin \omega t, \qquad L' = L'_0 + 2e' \sin \omega' t.$$

D'autre part les vecteurs rapportés aux périhélies sont donnés par les formules approchées :

$$r = 1 - e \cos \omega t, \qquad r' = 5{,}2(1 - e' \cos \omega' t).$$

Confondons le plan orbital de Jupiter et celui de la Terre.

On a au même temps :

$$r = 1 - e \cos(\omega t - L_0), \qquad r' = 5{,}2\,[1 - e' \cos(\omega' t - L'_0)].$$

L_0 et L'_0 sont les longitudes au temps pris pour origine.

Transportons dans (1). D'après le nombre admis plus haut pour distance de la Terre au Soleil, le retard est à chaque instant :

(498) ρ secondes.

Je laisse au lecteur le plaisir de chercher un développement en série en fonction des sinus et cosinus des multiples de ωt, $\omega' t$, $(\omega - \omega')t$, ce que permet la petitesse de e et de e'.

221. **Autres inégalités.**

1° — Tenons compte des inégalités provenant de l'excentricité de l'orbite de Jupiter et de la vitesse finie de la lumière : nous construisons des tables des satellites qui sont encore loin d'être parfaites. Elles le sont si peu qu'on a douté quelque temps de l'explication de Rœmer, explication que Duhamel avait proposée antérieurement et qu'il avait rejetée comme insuffisante.

Certes l'observation et le calcul concordaient pour le premier satellite. Mais, d'après sa nature, l'inégalité devait être la même pour les trois autres; or leurs autres inégalités sont assez considérables pour rendre douteux qu'il fût convenable de leur appliquer celle qui provient de l'hypothèse d'une vitesse finie pour la lumière.

Après la découverte de l'aberration par Bradley (en 1725), il devint évident que la vitesse de la lumière est finie : on reconnut le bien-fondé de l'équation de Rœmer.

Force fut donc de revenir sur les hypothèses simplistes d'abord essayées : trajectoires circulaires ayant Jupiter pour centre, parcourues d'un mouvement uniforme. La trajectoire de chaque satellite peut être elliptique; l'ellipse dont Jupiter est le foyer peut être perturbée par la proximité des autres satellites, agissant conformément à la loi de la gravitation universelle. En d'autres termes le mouvement de chaque satellite rapporté au plan de son orbite peut contenir *des équations*; le plan de l'orbite peut ne pas avoir dans l'espace une direction absolument invariable.

Pour les quatre premiers satellites on a trouvé des excentricités très petites, mais des perturbations notables. Par exemple, la marche du premier satellite est influencée par la présence du second, ce qui donne une inégalité dépendant de la différence des longitudes jovicentriques des deux astres.

Au reste la question est fort loin d'être résolue. La *Connaissance des Temps* ne donne aucune indication sur les nœuds, les inclinaisons périjoves et les excentricités : « ces éléments sont soumis à de trop grandes variations. On remarquera seulement que les inclinaisons *sur l'équateur de Jupiter* sont faibles, ainsi que les excentricités. »

222. **Durée approximative des éclipses.**

Précisons ce qui va suivre par un calcul simple de première approximation.

L'ombre que forme Jupiter derrière lui n'est pas exactement cylindrique et parfaitement délimitée; mais il s'en faut de peu. Le Soleil nous apparaît sous l'angle de 32′ 2″; Jupiter est moyennement 5,20 fois plus loin; le Soleil est donc pour lui d'un diamètre 5,20 fois plus petit : c'est quasiment un point de diamètre égal à 6′ 9″. D'autre part il est très éloigné de Jupiter par rapport à la distance de ses satellites.

Nous avons vu qu'en appelant r le demi-diamètre équatorial de la planète, les distances des satellites au centre de celle-ci sont :

$$d = 5{,}91.r,\ 9{,}40.r,\ 14{,}99.r,\ 26{,}36.r.$$

L'angle α que le satellite parcourt dans l'ombre de la planète, est donc sensiblement :

$$2r : d = 19^\circ 4',\ 12^\circ 12',\ 7^\circ 39',\ 4^\circ 21'.$$

Il est dès lors facile de calculer quel serait le temps maximum de l'éclipse, si la pénombre était rigoureusement nulle et si les satellites étaient des points géométriques.

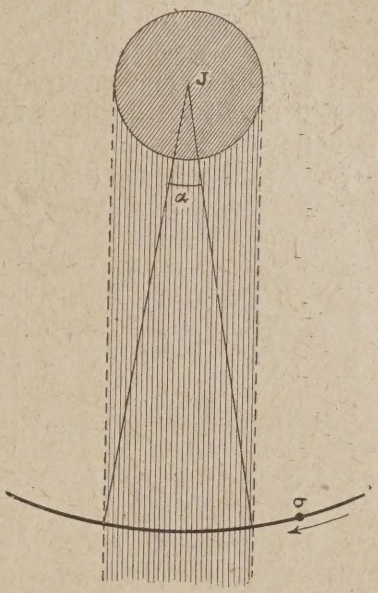


Fig. 169.

Ainsi pour le premier satellite, on trouve $2^h\ 17^m$. En réalité l'éclipse dure au maximum $2^h\ 15^m\ 50^s$. Elle est donc un peu plus courte, ce qu'explique la non-nullité des dimensions du satellite.

Pour le second satellite, la durée calculée avec les angles trouvés ci-dessus est $1^h\ 26^m\ 20^s$, tandis qu'en réalité elle est $1^h\ 25^m\ 40^s$.

Si les orbites des satellites sont excentriques les durées *maxima* des éclipses doivent varier. De leurs très faibles variations on conclut que les orbites sont quasi circulaires.

223. Détermination photométrique des éclipses.

Au lieu de déterminer l'instant où le satellite disparaît, on a proposé de déterminer l'instant où son disque est éclipsé par moitié (demi-éclat); il correspond évidemment au maximum de la variation de l'éclat.

1° — Un disque passe derrière un écran à bord rectiligne (fig. 170); ω représente l'angle marqué. Le lecteur vérifiera que le rapport de la surface découverte à la surface totale est :

$$\rho = (2\pi - 2\omega + \sin 2\omega) : 2\pi. \qquad (1)$$

Ce rapport varie de 1 quand l'écran affleure en A ($\omega = 0$), à 0 quand l'écran affleure en B ($\omega = \pi$). Il est 0,5 pour $\omega = \pi : 2$.

La loi de variation de la surface est représentée par la courbe à droite de la figure 170; elle possède un point d'inflexion pour $\omega = \pi : 2$.

Si le disque se déplace d'un mouvement uniforme, on a :

$$t = t_0 - T\cos\omega$$

2T est le temps que met l'affleurement à passer de A en B; t_0 est le temps d'affleurement au point C.

2° — Le calcul précédent suppose que le disque est d'éclat uniforme. Comme il n'est pas lumineux par lui-même, cette hypothèse est sûrement inexacte.

Posons $\overline{CE} = R$; soit r la distance au centre d'un point du disque.

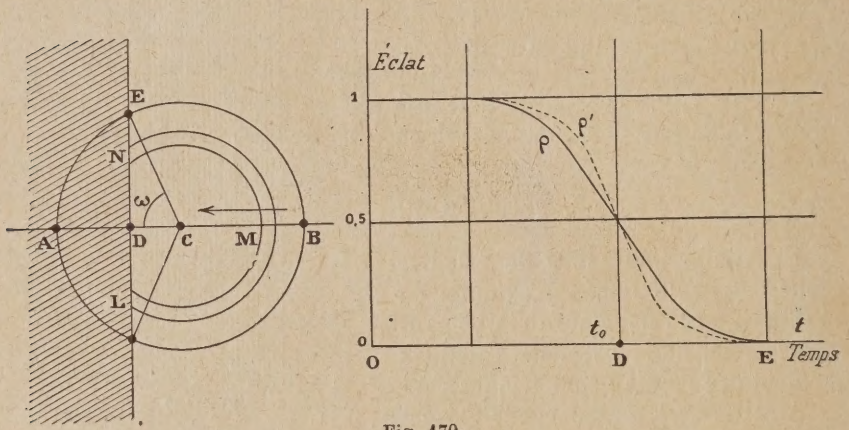


Fig. 170.

Au voisinage de l'opposition, nous savons que la quantité de lumière envoyée par unité d'aire d'une couronne de rayon moyen r, est proportionnelle à (§ 200) :

$$\sqrt{1-(r:R)^2},$$

à supposer que le corps diffuse suivant la loi de Lambert.

Pour simplifier l'écriture, faisons $R = 1$.

La quantité envoyée par la couronne comprise entre les circonférences de rayons r et $r + dr$, est :

$$2\alpha r\,dr\sqrt{1-r^2}, \qquad (2)$$

où α est l'arc MN limité par l'écran. On a :

$$-r\cos\alpha = \cos\omega.$$

Il faut intégrer l'expression (2) décomposée en deux parties; l'une pour laquelle α est égal à π, l'autre pour laquelle la couronne rencontre l'écran. Tous calculs faits on trouve :

$$\rho' = (2 + 3\cos\omega - \cos^3\omega) : 4. \qquad (3)$$

ρ et ρ' sont représentés par des courbes analogues présentant des points d'inflexions pour :

$$\omega = \pi : 2, \qquad \rho = \rho' = 0{,}5.$$

Le tableau suivant précise la discussion.

ω	ρ	ρ'
0°	1 000	1 000
30	971	987
60	804	844
90	500	500
120	196	156
150	29	13
180	0	0

La courbe ρ' est représentée en pointillé.

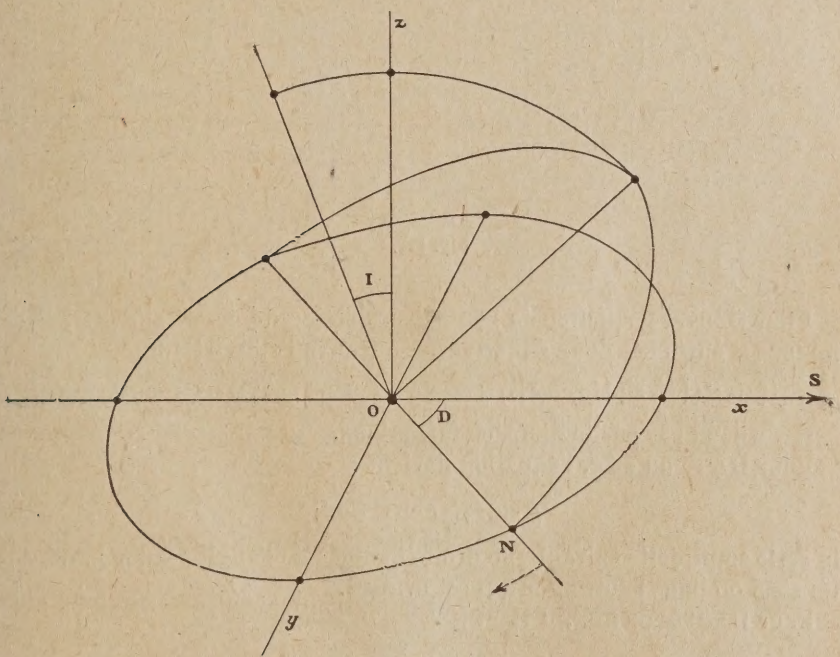


Fig. 171.

224. Trajectoire d'un satellite vue du Soleil.

1° — Il est instructif de voir comment on a déterminé les obliquités des orbites des satellites et les positions des lignes des nœuds, c'est-à-dire de leurs intersections avec le plan de l'orbite de Jupiter (qui se confond quasiment avec l'écliptique).

Nous admettrons que les orbites sont circulaires.

Résolvons d'abord *in abstracto* le petit problème suivant.

Un cercle de rayon R a son centre à l'origine O des coordonnées. Son plan coupe le plan xOy suivant une droite ON qui fait l'angle D avec Ox; la normale au plan fait l'angle I avec l'axe Oz.

On demande la projection orthogonale du cercle sur le plan yOz.

On vérifiera d'abord que le cercle est l'intersection de la sphère et du plan d'équations :

$$x^2+y^2+z^2=R^2, \qquad \sin I(x\sin D-y\cos D)+z\cos I=0.$$

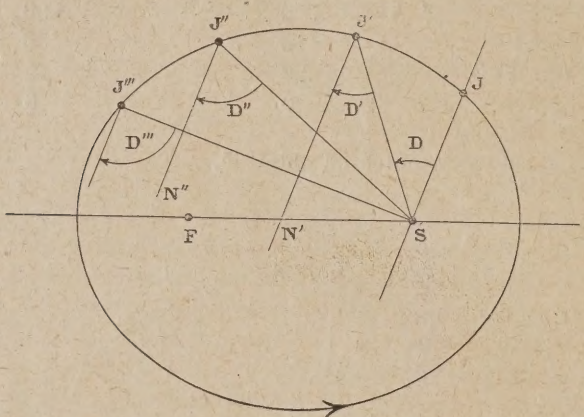


Fig. 172.

Pour trouver l'équation de l'ellipse projection du cercle sur yOz, éliminons x entre ces deux équations. On trouve l'ellipse (1) :

$$y^2\sin^2 I+z^2(1-\sin^2 I\,.\cos^2 D)+2yz\cos I\,.\sin I\,.\cos D=R^2\sin^2 D\,.\sin^2 I.$$

Il y a deux cas particuliers fondamentaux.

Pour $D=0$ ou 180°, l'équation devient :

$$y\sin I\pm z\cos I=0;$$

le cerle se projette suivant une droite inclinée de l'angle I sur yOx dans un sens ou dans l'autre : ce qui est évident.

Pour $D=90°$ ou 270°, il vient :

$$y^2+\frac{z^2}{\sin I^2}=R^2.$$

L'ellipse de projection est alors la plus ouverte possible; le demi-axe horizontal est R; le demi-axe vertical est R sin I.

Quel que soit D, le z maximum de l'ellipse de projection invariable.

Autrement dit le cercle se projette entre deux droites parallèles à Oy; leurs distances à Oy est $\pm R\sin I$.

2° — Revenons au problème précédent de la longueur des éclipses. Nous avons vu que Jupiter est un ellipsoïde aplati dont l'équateur se confond presque avec l'écliptique.

Supposons le Soleil dans la direction Ox. Jupiter est par hypothèse en O. L'ombre qu'il porte sur un plan parallèle à yOz, plan qui vu du Soleil se confond avec yOz, est limitée par l'ellipse :

$$y^2 + \frac{z^2}{c^2} = r^2. \qquad (2)$$

r diminue à mesure qu'on suppose le plan où se fait l'ombre plus loin de Jupiter, l'ombre formant un cône dont le sommet est du côté opposé au Soleil. On calculera r pour chaque satellite.

Pour qu'il y ait éclipse, il faut que l'ellipse (1), considérée comme la projection de la trajectoire du satellite, soit assez aplatie pour couper l'ellipse (2); ou que l'ellipse (2) soit assez grande par rapport à l'ellipse (1).

3° — Rappelons enfin un principe fondamental. La direction de la ligne des nœuds d'un satellite est à peu près invariable; elle se dirige constamment vers le même point du ciel. L'orbite du satellite est entraînée par la planète, de manière que son plan reste toujours à peu près parallèle à lui-même. D'où résulte que dans le mouvement de révolution de la planète autour du Soleil, si on représente comme invariable la droite Ox qui joint le Soleil à la planète (fig. 165), la ligne des nœuds ON tourne d'un angle précisément égal à l'angle dont la planète tourne autour du Soleil. C'est ce que la figure 166 rend évident.

225. Variation des durées d'immersion.

1° — Aussitôt qu'on observa les éclipses des satellites, on s'aperçut

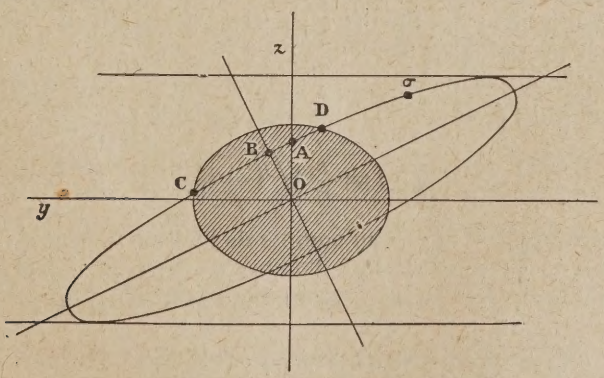


Fig. 173.

que leurs durées étaient très variables. Pour le satellite III la durée oscille entre 40^m et $3^h\,34^m$. Parfois le satellite IV ne s'éclipse pas : il

passe au-dessus de l'ombre de Jupiter. On expliqua immédiatement le phénomène en admettant l'obliquité des orbites des satellites, par rapport au plan de l'orbite de Jupiter. Ainsi se posèrent deux problèmes : déterminer les inclinaisons des orbites, déterminer la direction des lignes des nœuds : vérifier en outre si l'excentricité des orbites est négligeable.

Il résulte immédiatement du paragraphe précédent qu'il y a toujours éclipse d'un satellite et qu'elle a sa plus grande durée quand le Soleil est sur la ligne des nœuds de ce satellite. La trajectoire apparente (1) est une droite qui passe par le centre de l'ombre. Il en est ainsi pour chaque satellite deux fois tous les 12 ans.

La distance du satellite au-dessus du centre de l'ombre au moment de l'opposition s'obtient en faisant $y = 0$ dans l'équation (1). On trouve :

$$\overline{OA} = z = \frac{R \sin D \,.\, \sin I}{\sqrt{1 - \sin^2 I \cos^2 D}} = R \sin D \,.\, \sin I,$$

avec une approximation suffisante, vu la petitesse des inclinaisons.

A la même approximation on a l'égalité $\overline{OA} = \overline{OB}$.

Soit r le rayon de l'ombre, supposée circulaire, T la durée de l'éclipse quand le satellite passe par le centre de l'ombre, t sa durée suivant la trajectoire CBD. On a :

$$\frac{t}{T} = \frac{\overline{CD}}{2r} = \frac{\sqrt{r^2 - \overline{OB}^2}}{r}, \qquad \sin I = \frac{r}{R \sin D} \sqrt{1 - \frac{t^2}{T^2}},$$

formule qui donne l'inclinaison au moyen des durées des éclipses.

2° — La durée des éclipses est maxima :

$$t = T, \qquad \text{pour} \qquad D = 0.$$

La ligne des nœuds de l'orbite passe par le Soleil. Cette méthode pour déterminer la ligne des nœuds est précieuse puisqu'elle est indépendante de la position de la Terre.

Pour déterminer l'inclinaison, il est avantageux de faire en sorte que $D = 90°$ ou $270°$; t est alors le plus petit possible :

$$\sin I = \frac{r}{R} \sqrt{1 - \frac{t^2}{T^2}}.$$

Pour être précis il faut tenir compte de l'aplatissement de Jupiter ; à la distance où passe le satellite, l'ombre n'est pas un cercle de rayon r, c'est une ellipse. Mais j'en ai assez dit pour faire comprendre la méthode.

226. **Configuration des satellites.**

Pour que les astronomes se débrouillent dans les observations des satellites, la *Connaissance des Temps* donne les *configurations* (positions des satellites *tels qu'ils sont vus de la Terre par rapport à la planète*) pour tous les jours de l'année et pour une certaine heure de

temps moyen. Joignons les points relatifs à un même satellite par un trait continu ; nous obtenons 4 courbes analogues à des sinusoïdes dont la *Connaissance des Temps* ne donne qu'un point pour chaque jour (le point qui correspond à l'heure choisie).

La figure 167 *bis* représente la sinusoïde pour avril 1915 et pour le satellite IV le plus éloigné de Jupiter.

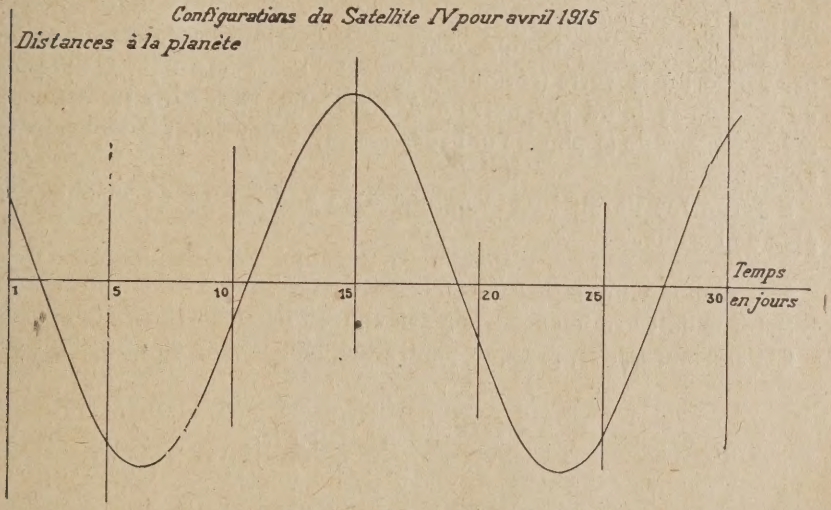


Fig. 173 *bis*.

Comme sa période est de 16 jours 18 heures, un point par jour détermine bien la courbe.

Pour utiliser la figure, le lecteur la supposera tournée de 90° dans le sens des aiguilles d'une montre. A Paris dans une lunette (images renversées), il aura les positions relatives du satellite IV par rapport à Jupiter placé toujours sur l'axe des temps.

Pour le satellite I dont la période est un jour trois quarts, chaque période de sinusoïde est déterminée par moins de trois points.

Saturne et son anneau.

227. **Données fondamentales.**

Le diamètre apparent de Saturne vu à la distance 1 (demi-grand axe de l'orbite terrestre) est de 160″. Mais Saturne se trouve moyennement à la distance 9,55 ; l'excentricité de son orbite est 0,0559.

On trouve aisément d'après ces nombres que le diamètre apparent varie de 15 à 20″ environ.

L'inclinaison de l'orbite est 2° 29′, par conséquent faible : le plan de l'orbite se confond presque avec l'écliptique.

La durée de la révolution sidérale est de :

29 années juliennes (de 365,25 jours) + 167 jours.

Saturne ne parcourt donc qu'environ douze degrés sur sa trajectoire en une de nos années (le Soleil étant pris pour origine des angles), soit environ 1° par mois, 2′ par jour.

Le temps qui s'écoule entre deux oppositions successives de Saturne par rapport à la Terre (révolution synodique) est de 378 jours : l'excès de près de 13 jours sur notre année est nécessaire pour rattraper le rayon vecteur de la planète qui se meut autour du Soleil dans le même sens que nous.

Saturne tourne en $10^h\,14^m$ autour d'un axe incliné de 28° 6′ sur le plan de l'orbite.

228. **Anneau de Saturne.**

Saturne doit son importance à son anneau découvert par Huyghens. Cet anneau, mince, presque plan, situé dans le plan de l'équateur de

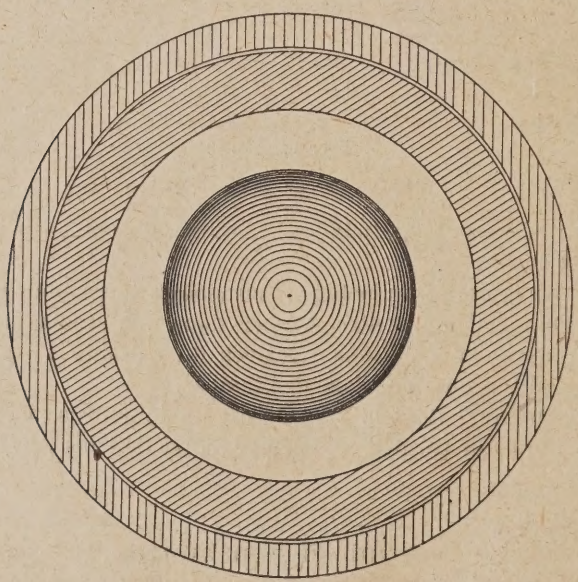


Fig. 174.

la planète, se compose effectivement de deux anneaux concentriques séparés dans un intervalle appelé *division de Cassini*.

La partie la plus centrale est plus lumineuse que l'autre et d'une

couleur plus blanche. L'anneau présente le même aspect sur ses deux faces qu'on voit successivement quand on observe tout le long d'une révolution de la planète.

Appelons r le rayon équatorial de la planète.

Le rayon extérieur de l'anneau, le rayon moyen de la division de Cassini et le rayon intérieur de l'anneau ont pour valeurs :

$$2{,}25\,.\,r, \qquad 1{,}97\,.\,r, \qquad 1{,}48\,.\,r.$$

Les dimensions relatives sont celles de la figure 174.

L'anneau est sensiblement dans le plan de l'équateur de la planète; sa normale fait 28° 6′ avec le plan de l'orbite.

Conformément à ce qui arrive pour les satellites, Saturne entraîne son anneau, dont le plan reste sensiblement invariable; l'intersection de ce plan et de l'orbite de la planète (ligne des nœuds) est dirigée vers un point à peu près toujours le même de la sphère céleste. D'où résulte qu'un observateur, placé en un point P du plan de l'écliptique (fig. 165), projette l'anneau sur un plan normal à la droite PO qui le joint à Saturne, suivant une ellipse dont la forme dépend de l'angle D que fait PO avec la ligne des nœuds *de direction invariable* ON.

Soit I l'inclinaison de l'anneau sur l'écliptique.

L'ellipse a pour équation (§ 224) :

$$y^2 \sin^2 I + z^2(1 - \sin^2 I\,.\,\cos^2 D) + yz \sin 2I\,.\,\cos D = R^2 \sin^2 D\,.\,\sin^2 I;$$

R est le rayon qui limite extérieurement l'anneau.

229. **Invisibilité de l'anneau. Phase ronde.**

1° — Tous les 15 ans environ, c'est-à-dire deux fois par révolution, les *anses* de Saturne deviennent invisibles, Saturne paraît rond.

L'invisibilité peut provenir de trois causes.

L'anneau devient invisible quand il se projette suivant sa tranche pour l'observateur terrestre. Nous ne voyons que son épaisseur qui est très mince et réfléchit trop peu de lumière. Le point P se confond avec la Terre; D est l'angle que la droite TO joignant la Terre à Saturne fait avec la ligne des nœuds ON.

D est nul quand l'anneau nous présente sa tranche.

L'anneau disparaît encore lorsqu'il est éclairé par sa tranche. Le point P se confond avec le Soleil; D est l'angle que la droite qui joint Saturne au Soleil fait avec la ligne des nœuds. D'après l'équation du plan de l'anneau (§ 224), la hauteur η du Soleil au-dessus de ce plan est donnée par l'équation :

$$\sin \eta = \sin I\,.\,\sin D.$$

Pour de petits angles et avec l'inclinaison de 28° 6′, on a :

$$\eta = 0{,}471\,.\,D.$$

L'anneau disparaissant faute de lumière quinze jours seulement avant que la ligne des nœuds passe par le Soleil, et quinze jours après (D est compris entre $\pm 30'$), la hauteur η nécessaire pour que l'éclairement soit suffisant et que l'anneau devienne visible, est de 14′ environ.

En troisième lieu, l'anneau devient invisible si le Soleil éclaire un

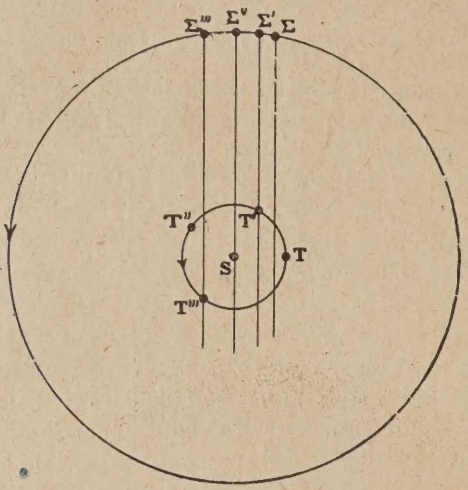


Fig. 175.

des côtés et si nous voyons l'autre; c'est ce qui arrive lorsque le plan de l'anneau passe entre le Soleil et nous.

2° — Cherchons le temps qui s'écoule entre le passage du plan de l'anneau par le Soleil et par la Terre.

Moyennement Saturne est à une distance linéaire du Soleil égale à 9,55 fois le demi-grand axe de notre orbite. De Saturne on voit donc la distance moyenne de la Terre au Soleil sous un angle de 6°, angle que Saturne met 6 mois environ à parcourir sur sa trajectoire. C'est approximativement le temps le plus long qui puisse s'écouler entre les passages successifs du plan de l'anneau par le Soleil et par la Terre.

Dans son mouvement de translation ce plan met donc environ un an à balayer notre trajectoire.

De ce qui précède résulte que, si la phase ronde se produit seulement tous les 15 ans, dans la même année, on peut voir les *anses* disparaître jusqu'à trois fois et reparaître ensuite. Mais si l'une des causes intervient seule et si lors de sa production Saturne est conjonction, on ne peut observer le phénomène, la planète se trouvant noyée dans les rayons solaires.

Pour préciser, mettons la Terre en T et la ligne des nœuds en Σ. La Terre la rattrapera en T′ : d'où première phase ronde. Puis la Terre étant en T″, la ligne des nœuds passe sur le Soleil : d'où seconde phase

ronde. Enfin la Terre se trouvant une seconde fois dans le plan de l'anneau en T''', une troisième phase ronde se produit.

Si les circonférences favorables ne se présentent pas, on peut rester longtemps sans voir le phénomène.

Il fut par exemple invisible pendant 44 ans, de 1671 à 1715.

230. Observation de Maraldi.

1° — Comme exemple, voici l'observation de Maraldi qui le premier étudia soigneusement le phénomène découvert par Cassini I^er^.

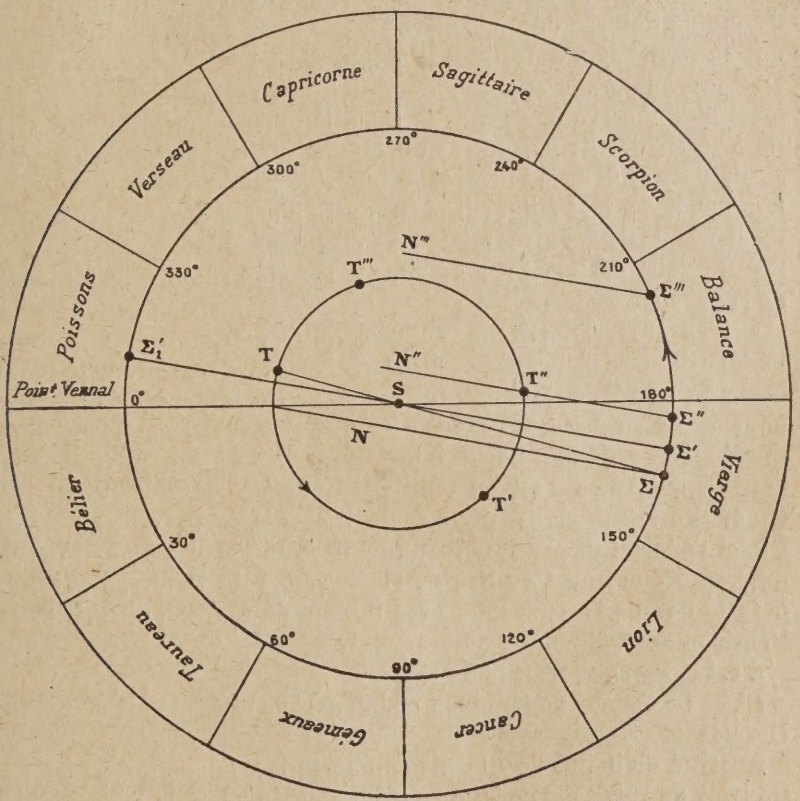


Fig. 176.

Je profiterai de l'occasion pour montrer au lecteur comment on utilise les signes du Zodiaque.

La conjonction de Saturne et du Soleil arriva le 8 septembre 1714 ; le Soleil est au quatorzième degré de la Vierge. On commença à voir la planète le 25 septembre vers onze heures du matin, la Terre ayant tourné d'un certain angle dans le sens TT'. Son anneau était clair mais étroit. Le 1^er^ octobre l'anse orientale parut plus large que l'occidentale ;

les anses se raccourcirent de sorte que le 9 octobre elles semblèrent moitié plus courtes que d'habitude. Le 12 l'anse orientale, qui précédemment était plus large, disparut la première. Enfin le 14 octobre, Saturne était *en phase ronde*. Il resta rond pendant plus de trois mois jusqu'au 1er février où il reprit ses *anses* : la Terre, alors en T', voyait le Soleil dans le Verseau.

Ces observations prouvent d'abord que l'anneau n'est ni parfaitement plan, ni parfaitement de révolution. S'il était l'un et l'autre, toutes ses parties disparaîtraient d'un coup.

Pendant tout le temps de la disparition de l'anneau, on vit sur le disque de Saturne une raie noire formée en partie par l'anneau obscur qui se projetait sur le disque, en partie par l'ombre que ce même anneau projetait.

Maraldi observe que l'anneau est éclairé même quand il présente sa tranche au Soleil; puisque son épaisseur est moindre que le diamètre solaire, il reçoit de la lumière des bords de celui-ci, mais peu et sous une incidence très faible; il diffuse vers nous cette lumière sous une incidence également très faible : d'où son invisibilité.

2° — Voici comment il détermine la longitude de la ligne des nœuds de l'anneau.

« L'an 1671, M. Cassini vit disparaître les anses le 8 décembre, lorsque Saturne n'était pas encore arrivé au nœud de son anneau et que, comme vu du Soleil, il était au 19° 11′ des Poissons. Mais cette année nous avons vu paraître l'anneau lorsque Saturne, ayant passé l'intersection, comme vu du Soleil, il parcourait le 20° 18′ de la Vierge. Entre le lieu opposé au 19° 11′ des Poissons, qui est 19° 11′ de la Vierge, et le 20° 18′ du même signe, il y a 1° 7′ qui est l'espace le plus précis dans lequel l'anneau disparaît faute de lumière du Soleil. La moitié de cette différence étant ôtée du lieu de l'observation du 10 février 1715, donnera le lieu de l'intersection avec l'orbite de Saturne au 19° 45′ de la Vierge et des Poissons. »

C'est la ligne $\Sigma'_1\,\Sigma'$ de la figure.

3° — Le lecteur voudra bien maintenant reprendre la description de Maraldi.

Aussitôt qu'il put voir la planète après la conjonction, la Terre se trouvait au voisinage de T, du même côté du plan de l'anneau que le Soleil : l'anneau était donc visible. Puis la Terre passa dans le plan de l'anneau qui devint invisible. Le plan de l'anneau se trouva donc entre la Terre et le Soleil : la troisième raison d'invisibilité ne cessa qu'après l'instant où le plan traversa le Soleil. Maraldi a donc le droit d'utiliser le temps où l'anneau redevint visible pour déterminer la position du nœud de l'anneau.

Lorsque Saturne va de Σ' à Σ'_1, le Soleil éclaire la face nord de l'anneau; la face sud-est dans l'ombre. Il éclaire la face sud quand Saturne va de Σ'_1 à Σ'. Le lecteur se représentera donc le plan de

l'anneau comme passant par $\Sigma'\Sigma'_1$ et faisant 28° avec la partie nord de la figure.

En septembre (point T de la figure) la Terre voyait la face sud éclairée ; puis en octobre elle est passée du côté de la face nord qui ne l'était pas.

4° — L'observation de Maraldi continue toujours aussi remarquable. La Terre allant beaucoup plus vite que Saturne devait rattraper le plan de son anneau quelque part en T″; l'anneau devait redevenir invisible. En effet, peu après l'équinoxe de printemps, le 23 mars 1715 les anses disparurent à nouveau, jusqu'au 12 juillet où elles reparurent ; la Terre était en T‴. A partir de ce jour et pendant quinze ans, Saturne devait conserver ses anses : ce qu'il fit.

Le plan de l'anneau avait cessé de balayer notre trajectoire.

231. Détermination de l'obliquité de l'anneau.

Quand la ligne des nœuds de l'anneau est à 90° de la droite qui joint la Terre à Saturne (D = 90°), l'anneau se projette suivant l'ellipse :

$$y^2 + \frac{z^2}{\sin^2 I} = R^2.$$

Son axe normal au plan de l'orbite (quasi confondu avec le plan de l'écliptique) est :

$$R \sin I = 2{,}25 \, . \, r \sin I = 1{,}06 r.$$

L'ellipse suivant laquelle se projette le bord extérieur de l'anneau,

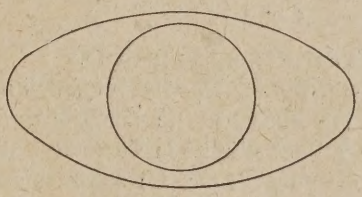


Fig. 177.

contient donc en entier le disque de la planète, d'autant mieux que ce disque est aplati suivant la ligne des pôles.

CHAPITRE V

DISTANCES EN ASTRONOMIE

232. **Position du problème.**

1° — Mesurer une distance, c'est la comparer à une distance qu'on prend pour étalon.

Le problème des distances en Astronomie se présente de deux manières très différentes, suivant qu'on veut évaluer l'étalon en mètres, ou qu'on se contente de le considérer comme invariable, sans chercher à préciser sa grandeur *en mètres*.

Prenons, par exemple, pour étalon la distance moyenne a de la Terre au Soleil. Pour fixer les idées, admettons la formule simple (§ 88) :

$$r = a(1 - e\cos\omega t).$$

L'origine des temps correspond au périgée.

L'évaluation des distances des planètes au Soleil devient un problème relativement simple. On construit un triangle dont un des côtés est formé par la distance TS actuelle de la Terre au Soleil, *distance connue au sens que nous venons de préciser*. Le sommet opposé est l'astre A. On mesure l'angle d'élongation STA. Des considérations simples (empruntées à la connaissance des mouvements des deux planètes) fournissent un autre angle du triangle. On a ce qu'il faut pour résoudre le triangle avec une précision grande, les trois côtés pouvant être pris du même ordre de grandeur, autrement dit, la somme des angles adjacents à la base r pouvant être choisie suffisamment différente de deux droits.

C'est ainsi que Képler a pu déterminer les distances relatives des planètes au Soleil et trouver sa fameuse troisième loi, si importante en Astronomie.

2° — L'exemple que voici donne une idée de la marche suivie par Képler. Connaissant avec assez de précision le moyen mouvement de Mars, il choisit deux temps distants de 687 jours, tels que Mars revînt très sensiblement au même lieu. Entre ces temps la Terre est venue de T en T′, après un parcours d'un peu moins de deux tours;

l'angle L est connu. Les distances ST et ST′ sont connues en fonction de la moyenne distance a (la figure représente une orbite circulaire que le lecteur remplacera par une orbite elliptique). Nous avons donc ce qu'il faut pour construire le quadrilatère STMT′, par suite pour calculer $\overline{SM}$.

Au § 30, sous le nom de *parallaxe annuelle*, nous avons étudié les changements de la direction dans laquelle nous voyons les étoiles, changements dus au déplacement de la Terre sur son orbite.

C'est le même problème que nous retrouvons ici, mais dans des conditions expérimentalement meilleures.

3° — Le problème devient d'une solution moins précise quand on

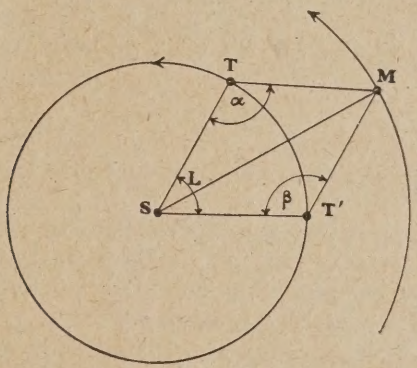


Fig. 178.

veut les distances en mètres. Je me garde de dire, si l'on veut passer des mesures relatives aux mesures absolues, la mesure effectuée avec a pris pour unité étant tout aussi *absolue*, que l'on connaisse ou ne connaisse pas sa valeur en mètres. Une mesure est absolue quand on peut retrouver l'unité à tout instant : je n'ai pas besoin de démontrer au lecteur que la moyenne distance de la Terre au Soleil a plus de chance d'immuabilité et de longévité que les mètres du Pavillon de Breteuil.

La difficulté vient de ce que la plus grande longueur évaluable directement en mètres dont nous disposions, est le diamètre équatorial terrestre (12 756 kilomètres). Encore ne pouvons-nous généralement pas l'utiliser en entier; en réduisant à 10 000 kilomètres la plus grande base utilisable, nous exagérons encore. La difficulté des mesures des distances en astronomie provient de la disproportion entre cette base et les longueurs à mesurer. A peine donne-t-elle des triangles acceptables dans le cas de la Lune dont la distance à la Terre est incomparablement plus petite que les autres distances astronomiques.

233. Parallaxe horizontale, parallaxe de hauteur.

1° — On appelle *parallaxe*, le *changement* qui s'effectue dans la direction d'un point A quand on se déplace à la surface de la Terre.

Du centre O' de la Terre, allons au point T de contact de la tangente AT menée de l'astre A à la Terre. La distance zénithale passe de z à z_1. L'observateur voit l'astre dans l'horizon; par définition, l'angle α est la *parallaxe horizontale* du point A :

$$\alpha = z_1 - z.$$

Comme α est toujours petit, on a très sensiblement :

$$\alpha = R : \rho,$$

formule où α est exprimé en radian.

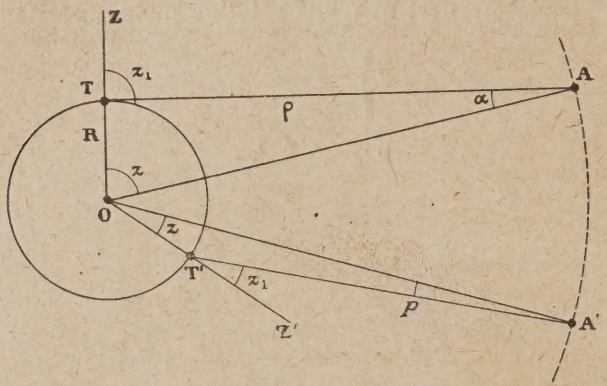


Fig. 179.

Voici la table de concordance quand α est exprimé en angles :

	1°	1′	30″	20″	10″	5″	1″
ρ : R	57,3	3·438	6·875	10·313	20·626	41·253	206·265.

Si par exemple la parallaxe horizontale d'un astre est 10″, l'astre est situé à 20.626 rayons terrestres.

Dans le cas précédent les angles z et z_1 sont quasi droits.

Si le déplacement de l'observateur s'est effectué sur un rayon quelconque OT′, à la même approximation on a :

$$p = z_1 - z = \alpha \sin z.$$

p est la parallaxe de hauteur.

2° — On appelle donc généralement *parallaxe de hauteur* le changement de hauteur ou de distance zénithale z que subit un astre quand l'observateur cesse d'être au centre de la Terre.

La parallaxe fait paraître les astres moins élevés; elle augmente leur distance zénithale à l'inverse de la réfraction qui la diminue.

La parallaxe est nulle si l'astre est au zénith.

La parallaxe ne modifie pas les azimuts.

La correction de parallaxe, comme celle de réfraction, est donc très

simple quand il s'agit de distances zénithales; elle complique beaucoup les calculs dans le cas général.

3° — DIAMÈTRE APPARENT.

Soit r le rayon d'un astre; soit δ son *demi*-diamètre apparent, ρ sa distance. On a :

$$\alpha = \frac{R}{\rho}, \qquad \delta = \frac{r}{\rho}; \qquad \frac{\delta}{r} = \frac{\alpha}{R}, \qquad \frac{\alpha}{\delta} = \frac{R}{r}.$$

Le rapport $\alpha : \delta$ de la parallaxe horizontale au demi-diamètre apparent de l'astre est égal au rapport du rayon terrestre au rayon de l'astre.

Par exemple, nous verrons que le rayon de la Lune est environ 4 fois moindre que celui de la Terre :

$$r : R = 0{,}273.$$

On a donc : $\delta = 0{,}273 \,.\, \alpha.$

En particulier pour

$$\alpha = 57' 2'' = 3\,422'', \qquad \delta = 15' 33'' = 934''.$$

Telles sont la parallaxe horizontale moyenne de la Lune et son demi-diamètre apparent moyen.

4° — Nous supposons la Terre sphérique. Si elle ne l'est pas, les demi-diamètres ne sont plus égaux : selon la latitude du lieu d'observation, la parallaxe horizontale prend des valeurs différentes. Si la Terre est un ellipsoïde de révolution *aplati*, les parallaxes horizontales décroissent de l'équateur au pôle. D'où la possibilité de déterminer la forme de la Terre par le moyen des parallaxes, méthode proposée par Newton et développée par Maupertuis.

On démontre aisément que la parallaxe horizontale équatoriale est multipliée par le facteur :

$$1 - \frac{\sin^2 l}{300};$$

l est la latitude du lieu d'observation; 1 : 300 est l'aplatissement du sphéroïde.

Par exemple pour $\alpha = 60' = 3\,600''$ à l'équateur, la correction est de 3″ pour $l = 30°$, de 12″ au pôle.

234. **Diverses parallaxes.**

1° — Étudions d'une manière générale et *in abstracto* les changements dans les coordonnées des astres qui résultent du déplacement de l'obervateur. Dans le paragraphe précédent nous étudions seulement les variations de la distance zénithale.

Nous avons déjà rencontré ce sujet aux §§ 30 et 182. Reprenons-en les formules en les appliquant au cas d'un observateur qui se déplace à la surface de la Terre. Je supposerai celle-ci sphérique et le point observé loin de la Terre. Ces hypothèses sont insuffisantes pour dresser

des tables précises de la Lune; mais comme je redoute par-dessus tout de raser mon lecteur avec une algèbre dénuée de vertu éducative, je m'en contenterai. S'il a bien compris les notions élémentaires qui suivent, il n'éprouvera aucune difficulté à fourrer des x et des y supplémentaires dont au surplus il n'aura jamais besoin.

Nous payons les calculateurs du *Bureau des Longitudes* pour nous épargner cette occupation fastidieuse.

Du reste j'aurai l'occasion de montrer que la précision des formules

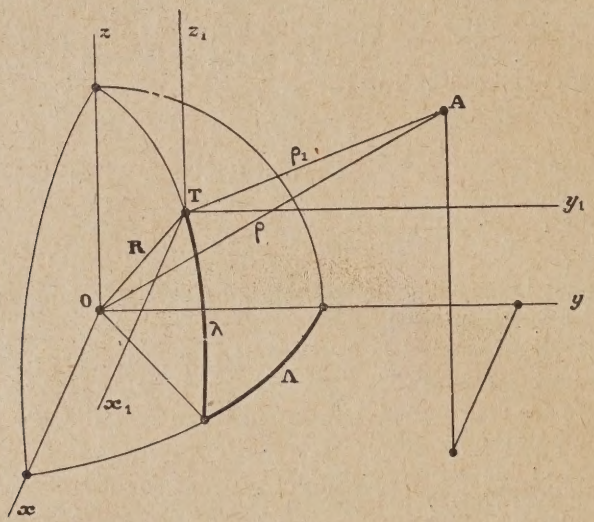


Fig. 180.

approchées est largement suffisante pour les applications, en dehors de l'établissement des tables de la Lune dont personne aujourd'hui ne se sert plus, à part ceux qui se proposent de les corriger (*Quid rides?*).

2° — Les coordonnées équatoriales *vraies* de l'astre A sont déterminées *par définition* du centre O de la Terre; ses coordonnées *apparentes* le sont du point T de la surface terrestre, point de longitude Λ et de latitude λ. Les coordonnées du point T sont :

$$x = \mathrm{R}\cos\lambda\,.\,\sin\Lambda, \qquad y = \mathrm{R}\cos\lambda\,.\,\cos\Lambda, \qquad z = \mathrm{R}\sin\lambda.$$

Les coordonnées apparentes de l'astre sont donc :

$$\mathrm{X}_1 = \mathrm{X} - x, \qquad \mathrm{Y}_1 = \mathrm{Y} - y, \qquad \mathrm{Z}_1 = \mathrm{Z} - z. \qquad (1)$$

Les coordonnées équatoriales ont même définition que la longitude (comptée positivement vers l'ouest) et la latitude géographiques; ce sont l'angle horaire H et la déclinaison D. Transportons dans les équations (1); nous trouvons le système suivant qui résout complètement le problème.

$$\begin{aligned}
\rho_1 \cos D_1 . \sin \mathcal{H}_1 &= \rho \cos D . \sin \mathcal{H} - R \cos\lambda . \sin\Lambda, \\
\rho_1 \cos D_1 . \cos \mathcal{H}_1 &= \rho \cos D . \cos \mathcal{H} - R \cos\lambda . \cos\Lambda, \qquad (2) \\
\rho_1 \sin D_1 &= \rho \sin D - R \sin\lambda.
\end{aligned}$$

A l'approximation susdite ces équations deviennent :

$$\begin{aligned}
d(\rho \cos D . \sin \mathcal{H}) &= - R \cos\lambda . \sin\Lambda, \\
d(\rho \cos D . \cos \mathcal{H}) &= - R \cos\lambda . \cos\Lambda, \\
d(\rho \sin D) &= - R \sin\lambda.
\end{aligned}$$

Différentions, résolvons par rapport aux différentielles.
Posons :

$$R : \rho = \alpha.$$

Il vient :

$$D_1 - D = \alpha \sin D . \cos\lambda . \cos(\mathcal{H} - \Lambda) - \alpha \sin\lambda . \cos D,$$

$$\mathcal{H}_1 - \mathcal{H} = \frac{\alpha}{\cos D} \cos\lambda . \sin(\mathcal{H} - \Lambda).$$

Mais $\mathcal{H} - \Lambda$ est l'angle horaire compté à partir du méridien du lieu d'observation; désignons-le par $\mathcal{H}$:

$$D_1 - D = \alpha \sin D . \cos\lambda . \cos \mathcal{H} - \alpha \sin\lambda . \cos D,$$

$$\mathcal{H}_1 - \mathcal{H} = \frac{\alpha}{\cos D} \cos\lambda . \sin \mathcal{H}. \qquad (3)$$

Pour un instant donné (α donné), pour un lieu donné (λ donné), pour un astre donné (déclinaison vraie D donnée), la seule variable que contiennent ces formules, est l'angle $\mathcal{H}$ que fait l'astre avec le méridien du lieu. Comme il s'agit de formules d'approximation, on peut introduire sous les signes cos et sin l'angle horaire apparent. Elles donnent la différence des valeurs observées et des valeurs vraies.

235. **Astre dans le méridien. Mesure de la distance zénithale.** *1°* — Quand l'astre passe dans le méridien, les formules (3) se simplifient. Posons $\mathcal{H} = 0$. La parallaxe d'ascension droite s'annule, ce qui est évident *a priori*. Il reste :

$$D_1 - D = \alpha \sin(D - \lambda) = - \alpha \sin z; \qquad (1)$$

z est la distance zénithale de l'astre.

La déclinaison diminue de D à D_1 quand on passe du centre O de la Terre au point T. On a :

$$z + D = z_1 + D_1 = \lambda, \qquad p = D - D_1 = z_1 - z.$$

Nous retrouvons la formule du § 233 pour la *parallaxe de hauteur :*

$$p = \alpha \sin z.$$

Il est facile d'obtenir des formules plus exactes (fig. 181) :

$$\frac{\sin p}{R} = \frac{\sin(z+p)}{\rho}, \qquad \sin p = \alpha \sin(z+p);$$

$$p = D - D_1 = \alpha \sin z + \frac{\alpha^2}{2} \sin 2z + \ldots.$$

Cette formule ne donne rien immédiatement puisqu'on ignore par hypothèse la déclinaison vraie D.

2° — Mesure de α.

Deux observateurs T et T′ sont dans le même méridien, en des lieux

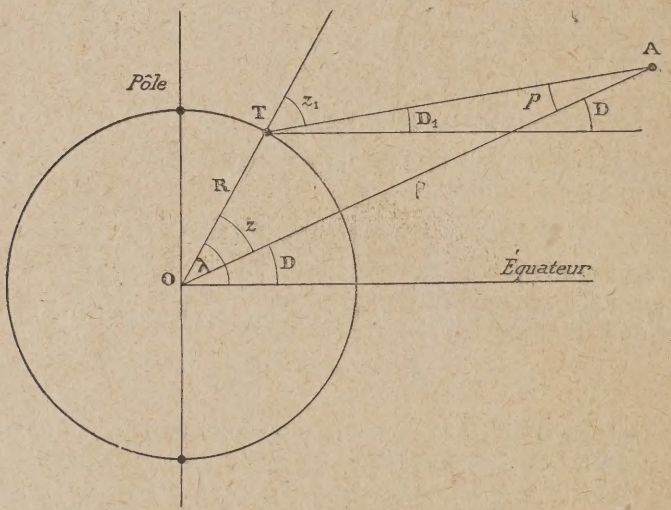


Fig. 181.

dont on connaît les latitudes λ et λ'. Ils mesurent les déclinaisons apparentes D_1 et D'_1 de l'astre A, lors de son passage au méridien.

On a :

$$D_1 = D - \alpha \sin(\lambda - D),$$
$$D'_1 = D - \alpha \sin(\lambda' - D).$$

D'où :

$$D_1 - D'_1 = -\alpha[\sin(\lambda - D) - \sin(\lambda' - D)] = -\alpha[\sin z - \sin z'].$$

La différence des déclinaisons apparentes est proportionnelle à la parallaxe.

La condition que les observateurs soient dans le même méridien est évidemment superflue si la déclinaison de l'astre ne change pas. Quand elle varie, un des observateurs en est quitte pour observer plusieurs jours de suite la hauteur méridienne. Il en conclut la variation horaire de la déclinaison; connaissant la différence des longitudes des lieux

d'observation, il calcule quelle aurait été la déclinaison apparente s'il avait observé *dans son méridien* au même instant que son associé.

Pour éviter ces corrections, il est préférable de se placer sur des méridiens voisins et d'observer l'astre au voisinage de ses plus grandes déclinaisons.

3° — Quand il s'agit d'une planète, la méthode est très améliorée par le remplacement des mesures *absolues* par des mesures *différentielles*.

Une étoile E passe au méridien en même temps que l'astre A dont par hypothèse elle est très voisine. La mesure de la variation des déclinaisons apparentes de l'astre se ramène à la mesure de la différence des distances de l'astre à l'étoile, distances prises de T et de T'. En effet, vu leur éloignement, les étoiles n'ont pas de parallaxe quand la base est prise sur la Terre; elles n'en ont une (§ 63), et encore très petite, qu'en prenant pour base le diamètre de l'orbite terrestre (qui vaut moyennement 46·878 rayons terrestres équatoriaux).

La substitution des mesures différentielles aux mesures absolues élimine une des plus grandes causes d'erreur, *la réfraction*, qui est à peu près la même pour l'astre et pour l'étoile.

236. Application à la mesure de la parallaxe de Mars.

J'emprunte l'exemple suivant à Lalande; elle correspond au célèbre voyage de l'abbé La Caille au Cap de Bonne-Espérance.

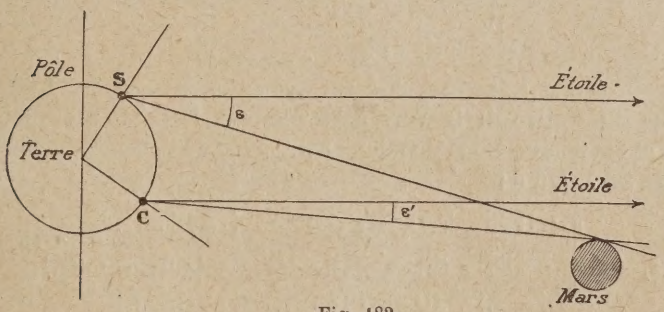


Fig. 182.

Les observateurs étaient au Cap ($\lambda = 33° 55'$ A) et à Stockholm ($\lambda = 59° 21'$ B). L'étoile de comparaison était λ du Verseau.

Le 5 octobre 1751, vu du Cap, le bord boréal de Mars paraissait à $\varepsilon' = 1'25'',8$ au-dessous de l'étoile; vu de Stockholm, il paraissait à $\varepsilon = 1'57'' 7$ au-dessous de l'étoile.

La différence des déclinaisons apparentes est donc 31'',9.

Les distances zénithales, de signes contraires, étaient 25° 0' au Cap, 68° 14' à Stockholm. D'où la parallaxe α *pour le jour de l'observation* :

$$\alpha = 31'',9[\sin(25° 0') + \sin(68° 14')] = 23'',6.$$

Il est clair que la figure 182 est schématique.

237. **Méthode des plus grandes déclinaisons.** —

1° — Tandis que dans la méthode précédente, deux observateurs placés en des points de latitudes différentes mesurent simultanément les hauteurs du même astre, dans la méthode actuelle un seul observateur mesure les hauteurs de deux astres dont par hypothèse les distances à la Terre sont égales, mais dont les déclinaisons diffèrent d'une quantité connue.

Appelons $z, D ; z', D'$; les distances zénitales et les déclinaisons des deux

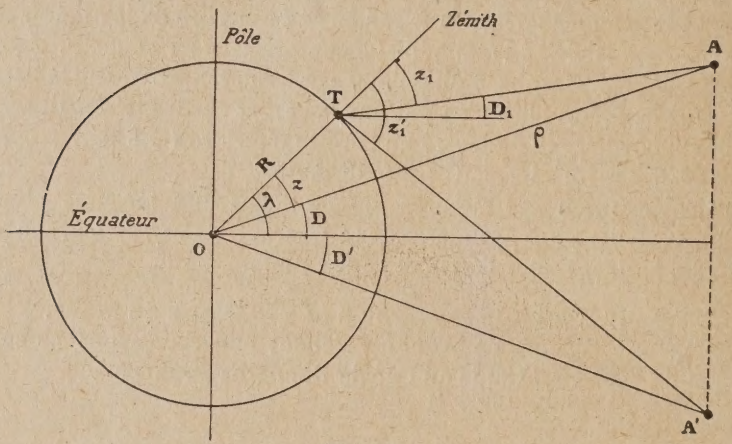


Fig. 183.

astres vus du centre de la Terre. Appelons $z_1, D_1 ; z'_1, D'_1$; les distances zénitales et les déclinaisons des deux astres vus de l'observatoire T dont la latitude est λ. On a :

$$z + D = z_1 + D_1 = z' + D' = z'_1 + D'_1 = \lambda.$$

D'où : $z_1 - z'_1 = -(D_1 - D'_1) = -(D - D') + \alpha(\sin z_1 - \sin z'_1).$

$$(z'_1 - z_1) - (D - D') = \alpha(\sin z'_1 - \sin z_1).$$

En particulier si $D' = -D$;

$$(z'_1 - z_1) - 2D = \alpha(\sin z'_1 - \sin z_1). \qquad (1)$$

2 — Cette méthode a été appliquée par Ptolémée à la mesure de la parallaxe de la Lune. Au lieu de deux astres différents, on utilise le même astre (la Lune) quand il se trouve dans des cercles de déclinaisons connues.

Quelques explications sont ici nécessaires.

Le plan de la trajectoire lunaire fait *en moyenne* 5° 9′ avec l'écliptique. Son intersection avec l'écliptique (ligne des nœuds) fait un tour en 18 ans 2/3 (6 793,5 jours) ; d'où résulte une obliquité sur l'équateur variable entre 18° 10′ et 20° 45′.

Tous les 14 jours environ la déclinaison devient maxima, puis minima. Ces déclinaisons sont presque égales et de signes contraires; mais ce n'est pas absolument exact puisqu'en définitive les maximums et minimums oscillent entre $\pm 18° 10'$ et $\pm 28° 45'$, sans parler des perturbations de courtes périodes (par exemple, l'obliquité varie de 5° 0′ à 5° 18′ en 173 jours environ).

Il va de soi que les variations *régulières* sont d'autant plus petites qu'on est plus près des valeurs extrêmes.

Pour fixer les idées, voici les déclinaisons maxima et minima au début de 1915.

13 janvier	$-27° 56'$	8 mars	$-27° 58'$
27 janvier	$+27° 58'$	22 mars	$+27° 53'$
9 février	$-27° 60'$	4 avril	$-27° 49'$
23 février	$+27° 60'$	19 avril	$+27° 42'$

Pour un maximum et un minimum successifs de déclinaison, les déclinaisons sont donc sensiblement égales et de signes contraires : si nous connaissons l'une, nous avons la variation 2D; nous pouvons calculer α.

Pour déterminer cette première déclinaison, il faut observer dans des conditions telles que l'effet de parallaxe s'annule, c'est-à-dire choisir un maximum de déclinaison qui soit à peu près au zénith du lieu d'observation.

3° — Arrivons à l'observation de Ptolémée. Ptolémée utilisait les maximums de déclinaison pour lesquels la Lune était dans les *cercles tropiques* (§ 108); leurs déclinaisons étaient alors d'après ses mesures 23° 50′ 30″ : c'est dire que leur distance angulaire était de $2D = 47° 41'$ (on sait que l'angle de l'écliptique avec l'équateur diminue d'environ 45″ par siècle).

Quand la Lune était dans le tropique d'été, sa distance au zénith d'Alexandrie était de 2° 7′. Quatorze jours après, quand elle arrivait dans le tropique d'hiver, cette distance aurait dû devenir :

$$2° 7' + 47° 41' = 49° 48'.$$

Ptolémée trouvait 50° 55′, c'est-à-dire 67′ de parallaxe.

Transportant dans l'équation (1), il vient :

$$-67' = \alpha[\sin(2° 7') - \sin(49° 48')] = -0{,}73 \cdot \alpha.$$

D'où : $\alpha = 92'$, nombre considérablement trop grand, mais dont cependant l'ordre de grandeur est exact. En étudiant les variations du diamètre apparent de la Lune (ce qui pour les anciens présentait d'énormes difficultés), il trouva que la parallaxe horizontale lunaire oscille entre 54′ et 101′, autrement dit, que la distance de la Lune oscille entre 64 et 34 rayons terrestres.

Cette méthode est cependant bonne. Au début du XVIII[e] siècle elle a fourni à Newton la parallaxe moyenne horizontale 57′ 2″, qui est admise encore aujourd'hui; la distance correspondante est de 60,27 rayons terrestres. La parallaxe oscille réellement entre 52′ et 62′.

238. **Utilisation des ascensions droites pour mesurer α.**
1° — On a la formule (§ 233) :

$$\mathcal{H}_1 - \mathcal{H} = \frac{\alpha}{\cos D} \cos\lambda \,.\, \sin\mathcal{H}.$$

Lorsqu'une planète passe dans le méridien ($\mathcal{H} = 0$), la parallaxe en

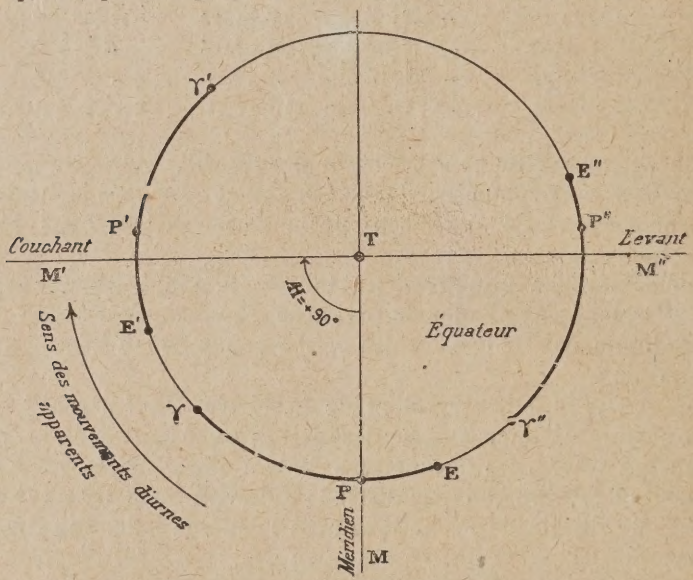


Fig. 184.

ascension droite est nulle; autrement dit, l'ascension droite apparente est correcte. On observe alors la différence des temps de passage au méridien de la planète P et d'une étoile de comparaison E.

Je la suppose à l'est de la planète : son ascension droite γE est plus grande que l'ascension droite γP de la planète.

Utilisons une lunette montée parallactiquement; plaçons-la à 90° du méridien *vers le couchant* : $\mathcal{H} = 90°$. La formule donne :

$$\mathcal{H}_1 - \mathcal{H} = \alpha \cos\lambda : \cos D.$$

Cela signifie que *vers le couchant* et pour une heure donnée, l'angle horaire apparent de la planète P′ est plus grand qu'il ne devrait; autrement dit, tout se passe comme si l'ascension droite de la planète avait diminué; elle passe de γP à γ′P′. N'oublions pas que les angles horaires

sont comptés vers l'ouest dans le sens EE', tandis que les ascensions droites sont comptées dans le sens direct (de l'ouest à l'est, sens γE) : diminuer l'ascension droite, c'est pousser la planète vers l'ouest; c'est, pour une heure donnée, augmenter son angle horaire.

Rien n'est changé pour l'étoile dont la parallaxe est pratiquement nulle.

L'étoile étant par hypothèse à l'est de la planète, sa distance à la planète augmente en apparence : ce qu'indique la différence des temps de passage dans le cercle horaire TM'.

Si nous observons à 90° du méridien vers le levant ($H = -9°$), la formule devient :

$$R_1 - H = -\alpha \cos\lambda : \cos D.$$

L'angle horaire de la planète est plus petit qu'il ne devrait pour la même heure. Mais comme les angles horaires sont alors négatifs, l'angle horaire est en valeur absolue plus grand qu'il ne devrait pour la même heure. La planète est en P'', son ascension droite a augmenté. L'étoile étant par hypothèse à l'est de la planète, la distance de l'étoile à la planète a diminué. Conséquemment on constate une diminution de la différence des temps de passage dans le cercle horaire TM''.

En définitive supposons l'étoile à l'est de la planète.

Soit τ la différence des temps de passage au méridien :

Cette différence est $\tau'' = \tau - \varepsilon$ dans le vertical TM'',

$$\tau' = \tau + \varepsilon \text{ dans le vertical TM'.}$$

On a : $$\tau' - \tau'' = 2\varepsilon = 2\alpha \cos\lambda : \cos D.$$

2° — La quantité ε varie comme sin H; d'ailleurs on a sin 30° = 0,5.

Au lieu des plans horaires TM'' et TM', utilisons les plans à 30° ou à 2 heures de part et d'autre du méridien. La différence des temps de passage réduits en arc est alors précisément égale à $\alpha \cos\lambda : \cos D$. L'expérience ne dure que 4 heures au lieu de 12.

La figure 184 suppose les astres dans l'équateur, mais rien dans le raisonnement n'exige qu'il en soit ainsi.

239. **Mesure de la parallaxe de Mars.**

Voici un exemple que j'emprunte à Lalande.

Le 15 août 1719, Mars était à l'est et fut près d'une certaine étoile.

On observa les passages avec une lunette montée parallactiquement, successivement orientée dans les cercles horaires :

$$H = -49° 15' \qquad H = +56° 39'.$$

La déclinaison D de Mars était de 15°.

La latitude λ de Paris fut prise égale à 48° 50'.

Dans le premier cercle horaire, la différence des temps de passage

de la planète et de l'étoile fut $10^m\,17^s$; dans le second elle ne fut plus que $10^m\,1^s$.

Mais suivant les observations faites au méridien plusieurs jours de suite, Mars devait se rapprocher de l'étoile de 14^s de temps entre les deux observations, de sorte que la diminution de la différence des temps de passage *due à la parallaxe* est seulement de 2 secondes de temps; ce qui correspond à un rapprochement angulaire de 30 secondes d'arc.

D'où l'équation :

$$30'' = \alpha \frac{\cos\lambda}{\cos D} [\sin(49^\circ\,15') + \sin(36^\circ\,39')].$$

D'où :

$$\alpha = 27'',3.$$

Or on savait qu'à cette date, la distance de la Terre à Mercure valait les 37 centièmes à la distance de la Terre au Soleil.

D'où pour parallaxe horizontale solaire :

$$27'',3 \times 0,37 = 10'',1.$$

La valeur aujourd'hui admise est de $8'',80$; mais les méthodes directes telles que celle que nous étudions, ne peuvent pas donner une bien meilleure approximation, même avec des instruments perfectionnés.

240. Parallaxe solaire.

1° — La difficulté de la mesure directe de la parallaxe solaire tient d'abord à la petitesse de cette parallaxe; elle est voisine de $8'',80$, c'est-à-dire environ 400 fois plus petite que la parallaxe lunaire moyenne. Il est impossible d'employer la méthode différentielle, les étoiles devenant invisibles au voisinage du disque solaire, noyées qu'elles sont dans sa lumière. Enfin le disque solaire est étendu : il faut donc mesurer la moyenne des angles qui correspondent aux deux bords, ce qui ajoute des incertitudes.

En fait les mesures directes ne donnent rien d'acceptable.

Heureusement une des lois de Képler transforme le problème, en permettant de conclure les distances de toutes les planètes au Soleil de la connaissance de l'une d'elles. En d'autres termes, grâce à la loi de Képler reliant les carrés des temps de révolution des planètes aux cubes des grands axes de leurs orbites, nous pouvons construire une figure semblable à celle du système solaire : seule nous manque l'*échelle* de cette figure. La détermination d'une distance quelconque nous la fournit.

2° — Ceci posé, quels astres devons-nous observer? Naturellement les plus proches, Vénus en conjonction inférieure, Mars en opposition : c'est alors que les distances de ces planètes à la Terre sont minimas.

La détermination directe de la parallaxe de Vénus présente de grandes difficultés; à cause de sa proximité du Soleil, la méthode différentielle devient difficilement applicable.

Les déterminations relativement précises utilisent donc Mars en opposition. La planète étant opposée au Soleil, l'observation s'en fait de nuit; la méthode différentielle est applicable.

Toutes les oppositions ne sont pas également favorables en raison de l'excentricité des orbites de la Terre et de Mars, surtout en raison de celle de Mars (0,093). Il serait avantageux qu'au moment de l'opposition, la Terre fût à son aphélie et Mars à son périhélie ; mais cette condition suppose l'égalité des longitudes du périhélie de Mars et de l'aphélie de la Terre; ce que le tableau du § 183 montre ne pas être réalisé. Il est vrai que l'excentricité de l'orbite terrestre est petite, seule intervient notablement l'excentricité de l'orbite de Mars : on choisira donc les oppositions telles que Mars soit voisin de son périhélie; elles reviennent à peu près tous les 15 ans.

L'excentricité de Mars est $e = 0{,}093$; son grand axe est 1,52 fois le grand axe de l'orbite terrestre.

Sa plus petite distance à la Terre est donc à peu près :

$$1{,}52(1 - 0{,}093) - 1 = 0{,}38.$$

En définitive on s'est efforcé de déterminer la parallaxe de Mars qui, dans les conditions les plus favorables, est environ 3 fois plus grande que celle du Soleil, et bien plus facile à mesurer.

3° — La méthode du § 235 où l'on combine les observations de deux observateurs, a fourni pour la parallaxe solaire des nombres dont les valeurs individuelles oscillent entre 8″,6 et 9″,1; leur moyenne oscille, suivant les astronomes qui ont réduit les observations, entre 8″,86 et 9″,96.

Naturellement ces messieurs ne manquent pas d'ajouter des *erreurs probables*.

Il est toujours drôle de voir annoncer avec componction le nombre :

$$8'',960 \pm 0{,}051,$$

quand il semble *probable* que le nombre vrai est voisin de 8″,80. Mais ces messieurs se feraient plutôt couper le nez que de ne pas introduire des poids, des moindres carrés et autres fichaises. Dans ce sujet j'ai toutes les raisons possibles de me moquer d'eux, on verra tout à l'heure pourquoi. Les savants du XVIII[e] siècle faisaient avec moins de fracas de meilleure besogne (étant données leurs ressources instrumentales).

On a mesuré la parallaxe de Mars par les changements d'ascensions (§ 238). Un astronome a, par exemple, observé 1 325 passages et conclu :

$$8'',789 \pm 0'',060.$$

Un autre donne :

$$8'',78 \pm 0'',01.$$

Il semble que cette méthode soit la meilleure de toutes, en particu-

lier parce que chacun n'utilise que ses propres observations; elle s'est naturellement perfectionnée par l'emploi des chronographes. Elle exige surtout des appareils parfaitement stables; on doit observer les deux bords de la planète et comparer son ascension droite aux mêmes étoiles le soir et le matin.

241. Utilisation d'Éros, de Flora.

En 1898 on découvrit la petite planète 433 Éros; les astronomes faillirent en mourir d'exaltation.

Éros est une planète télescopique grosse comme rien; mais elle est entre Mars et la Terre. Sa distance moyenne au Soleil est 1,458; comme l'excentricité de son orbite est relativement grande (0,223), sa distance minima à la Terre peut descendre à 0,235, c'est-à-dire devenir moindre que le quart de la distance moyenne de la Terre au Soleil.

Tout ce que je dis au début au 2° du paragraphe précédent reste applicable. L'avantage d'Éros sur Mars est qu'il passe plus près de la Terre dans le rapport $38 : 26 = 1{,}5$. Donc les résultats pourront être une fois et demie plus précis. Mais comme les résultats fournis par Mars ne le sont guère, nous aurons quelque chose de moins mauvais dans le rapport de 38 à 26; ce qui ne justifie pas l'exaltation des astronomes! Il faut cependant reconnaître que les pointés sur Éros sont plus faciles que les pointés sur Mars, en raison du diamètre apparent sensible de cette dernière planète.

On a proposé d'utiliser Flora qui s'approche de nous à une distance à peine supérieure à celle du Soleil; sa parallaxe est sinon plus grande, du moins plus sûre.

Tandis que les plus précises observations sur Mars ont donné 8″,94 pour la parallaxe solaire, les observations sur Flora ont donné 8″,87. Les dernières observations sur Éros ont donné 8″,80.

242. Méthode d'Aristarque.

Avant d'étudier d'autres méthodes pour déterminer la parallaxe

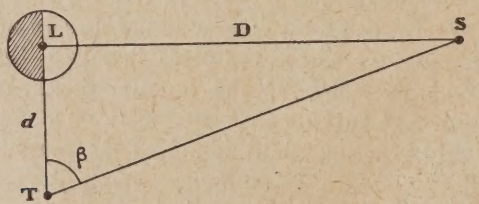


Fig. 185.

solaire, je dirai quelques mots de la méthode d'Aristarque. Elle n'est certes pas précise, mais elle est curieuse; son importance historique est capitale comme ayant fixé pour la première fois l'ordre de grandeur des dimensions de notre système.

On mesure le rayon de l'orbite terrestre en prenant comme terme de comparaison la distance de la Terre à la Lune, celle-ci valant environ 60 rayons terrestres, on a des chances d'obtenir une valeur non pas 60 fois plus exacte que par les méthodes directes, mais acceptable, tandis que ces méthodes appliquées au Soleil ne donnent rien.

La méthode consiste à déterminer la distance angulaire β du centre de la Lune au centre du Soleil quand l'angle TLS est droit; on a alors :

$$D = d \,.\, \mathrm{tg}\,\beta.$$

L'angle TLS est droit, quand la ligne de séparation de l'ombre et de la lumière sur le disque lunaire (ligne qui est généralement une ellipse) devient une droite.

Aristarque trouva $\beta = 87°$.

D'où : $\mathrm{tg}\,\beta = 19$, $D = 19\,d = 1\,140$ rayons terrestres.

Nombre grossièrement erroné, mais incomparablememt plus correct que ce qu'on admettait antérieurement (280 ans avant J.-C.).

Les expériences furent reprises au XVII^e^ siècle après l'invention des lunettes. Vendelinus trouva :

$$\beta = 89° 45', \quad \mathrm{tg}\,\beta = 229.$$

D'où : $D = 229\,d = 13 \cdot 740.$

Le nombre est faux de moitié. Mais c'est tout ce que la méthode peut donner en raison de l'incertitude sur l'instant où la ligne de séparation est une droite, incertitude augmentée par les inégalités de la surface lunaire.

Je parlerai de la méthode d'Hipparque à propos des éclipses (§ 330).

243. **Parallaxe solaire déduite de la vitesse de la lumière.** Dans deux phénomènes entrent simultanément la distance de la Terre au Soleil et la vitesse de la lumière, de sorte que si l'une de ces quantités est connue, l'autre s'en déduit. Ces phénomènes sont l'aberration (§ 29) et les éclipses de Jupiter (§ 220).

Depuis Bradley et Rœmer la question s'est retournée. Au XVII^e^ et au XVIII^e^ siècles on mesurait la parallaxe solaire à partir de celle de Mars (§ 235); connaissant la distance moyenne de la Terre au Soleil, on calculait la vitesse de la lumière.

Aujourd'hui les expériences directes fournissent la vitesse de la lumière au millième près : les méthodes astronomiques donnent donc la parallaxe. A la vérité il faut admettre que dans les espaces interstellaires, la vitesse de la lumière est la même qu'à la surface de la Terre; mais c'est une hypothèse si naturelle qu'elle s'impose absolument; on n'a pas de raison valable de la mettre en doute.

D'après l'observation des Satellites de Jupiter, admettons que la lumière met $8^m\,18^s = 498^s$ pour arriver du Soleil à la Terre. Admettons

d'autre part 300 000 kilomètres à la seconde pour vitesse de la lumière. Nous obtenons pour distance moyenne de la Terre au Soleil.

$$498 \times 300{\cdot}000 = 149{\cdot}400{\cdot}000 \text{ kilomètres.}$$

Prenons pour rayon équatorial terrestre 6 378. La parallaxe est :

$$\alpha = \frac{6\,378}{149{\cdot}400{\cdot}000} = 0{,}000{\cdot}0427 = 8'',81.$$

Passages de Vénus sur le Soleil.

Cette méthode, proposée par Halley en 1691, fut appliquée déjà quatre fois en 1761 et 1769, en 1874 et 1882. Elle ne le sera pas avant 2004. Son importance historique est capitale. Bien que les résultats fournis soient médiocres, elle exerça la plus heureuse influence sur le perfectionnement de la technique; elle conduisit à poser, sinon à résoudre, un grand nombre de questions connexes.

Fig. 186.

244. Principe de la méthode.

1° — Lorsque Vénus est en conjonction inférieure, son disque se projette *parfois* sur le disque solaire dont le centre est en S; elle y forme un petit point noir (fig. 186 et 187). Pour simplifier nos raisonnements, supposons deux observateurs A et B placés aux extrémités d'un diamètre terrestre: ils voient l'astre se projeter sur le soleil A en A′, B en B′.

$\overline{AB}$ nous est connu en mètres.

La troisième loi de Képler donne le rapport $\overline{SV} : \overline{ST}$; posons le égal à 0,723.

Nous tirons de ces hypothèses :

$$\overline{A'B'} = \overline{AB}\,\frac{\overline{SV}}{\overline{VT}} = \overline{AB}\,\frac{\overline{SV}}{\overline{ST} - \overline{TV}} = 2{,}61 \,.\, \overline{AB} = \mu \,.\, \overline{AB}.$$

Nous connaissons donc *en mètres* la distance $\overline{A'B'}$ des projections de Vénus sur le Soleil pour les observateurs A et B. Si par un moyen quelconque nous déterminons l'angle sous lequel $\overline{A'B'}$ est vu de la Terre, nous avons sa distance à la Terre, c'est-à-dire la distance du Soleil à la Terre.

Pour fixer les ordres de grandeur, soit R le rayon terrestre.

Nous avons :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{ST}} = \mu\,\frac{\overline{AB}}{R}\,\frac{R}{\overline{ST}} = \mu\alpha\,\frac{\overline{AB}}{R};$$

α est la *parallaxe solaire*. L'angle apparent $\overline{A'B'} : \overline{ST}$ est donc au rapport $\overline{AB} : R$ comme $\mu\alpha$ est à l'unité.

Admettons 8″,80 pour α. La valeur maxima du second membre est :

$$2{,}61 \times 2 \times 8{,}80 = 45'',9,$$

soit les trois quarts d'une minute. Le disque solaire ayant 32′ 2″ = 1922″ comme diamètre apparent, la distance des deux points A′ et B′ est au plus la quarante-deuxième partie de ce diamètre.

Nos suppositions sont exagérées. Pratiquement il est prudent de

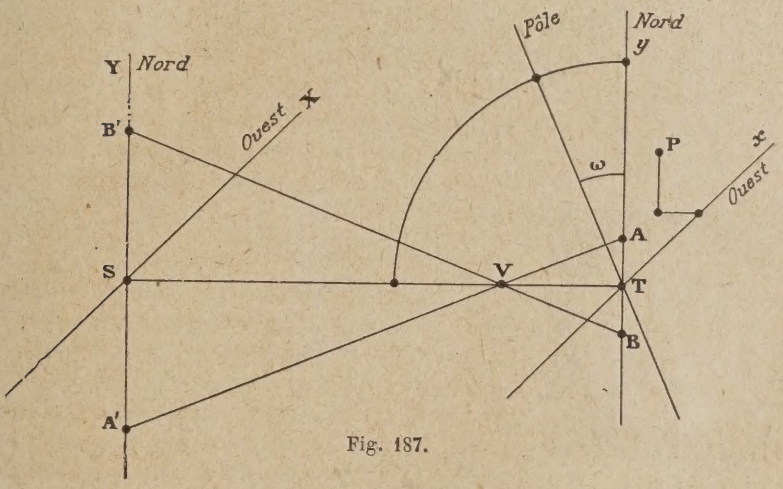


Fig. 187.

réduire la distance $\overline{AB}$ au rayon terrestre, l'avantage qui peut résulter d'un plus grand éloignement des observateurs, étant largement compensé par les mauvaises conditions physiques de l'observation. La distance A′B′ sera donc environ la 80e partie du diamètre apparent solaire.

2° — Une première méthode s'offre immédiatement à nous : mesurer les distances $\overline{B'S}$, $\overline{A'S}$, des projections de Vénus au centre du Soleil. On ne pouvait songer à l'appliquer tant qu'on ne connaissait pas la photographie; elle a été utilisée aux derniers passages. Nous en étudierons plus loin les difficultés.

Halley proposa de remplacer la mesure des distances $\overline{A'S}$ *et* $\overline{BS'}$ *par la mesure des cordes que la planète décrit sur le disque solaire. L'ingénieux de sa méthode est de ramener la mesure de ces cordes à la mesure des temps que l'astre met à les parcourir.*

Passons au détail des observations.

245. Périodes des passages de Vénus sur le Soleil.

1° — Conjonctions.

La Terre et Vénus sont en conjonction inférieure lorsqu'elles ont

même longitude héliocentrique. Les durées des années *sidérales* de la Terre et de Vénus sont 365,2563 et 224,7007 jours.

En admettant l'uniformité des mouvements, on vérifiera que si, au temps 0 les deux astres sont sur la même droite passant par le Soleil, ils y sont encore lorsque la Terre a parcouru k. 288°, c'est-à-dire :

$$288°, \quad 360+216°, \quad 720+144°, \quad 1080°+72°, \ldots.$$

Nous venons ainsi de définir toutes les conjonctions: la moitié seule-

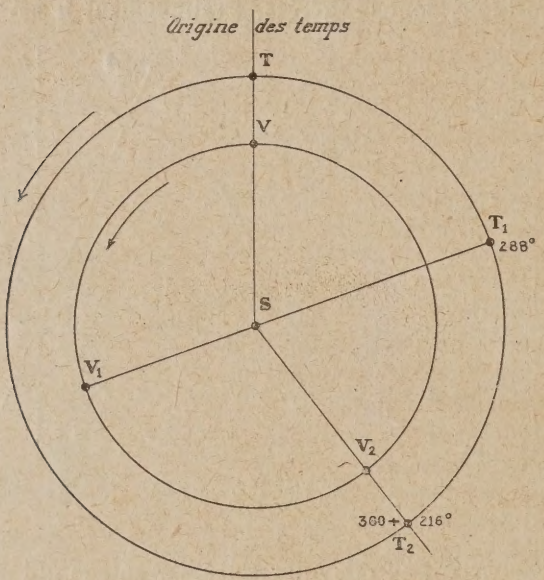


Fig. 138.

ment sont des conjonctions inférieures, elles correspondent au parcours par la Terre de $360+216°$, $1080+72°$....

De là résulte que si, au temps zéro, Vénus et la Terre sont en conjonction inférieure, elles y reviennent après un multiple quelconque de 584 jours (exactement 583j,9127) : cet intervalle est l'*année synodique moyenne.*

2° — Passages.

Pour qu'il y ait *passage de Vénus sur le disque solaire*, il ne suffit pas que Vénus soit en conjonction inférieure; il faut que la conjonction se produise assez près des nœuds N de son orbite, que Vénus soit assez près de l'écliptique, que la latitude de Vénus soit inférieure au demi-diamètre apparent du Soleil, 16′.

D'où résulte que, malgré la fréquence des conjonctions inférieures, les passages effectifs sont rares.

Cherchons à quelle condition les conjonctions inférieures se produisent

au voisinage des points du ciel N *et* N′ *qui définissent la ligne des nœuds.*

A la vérité cette ligne n'est pas immuable : la longitude du nœud ascendant N est :

$$\theta = 75^\circ\,47'\,17'' + 3\,290''\,t,$$

où t est compté en siècles de 100 années juliennes (36 525 jours moyens). La variation est donc petite, de l'ordre d'un degré par siècle. Négligeons-la dans nos calculs approchés.

La condition est donc qu'un nombre entier de fois l'année *sidérale* de la Terre soit égale à un nombre entier de fois l'année *sidérale* de Vénus.

Les plus petits nombres qui satisfassent à la condition, sont 8 et 13 :

8 années sidérales de la Terre font		2 922,050,
13	— de Vénus —	2 921,109,
5 années synodiques	—	2 919,563.

De sorte qu'au moment du passage, c'est-à-dire au moment de la conjonction (fig. 183) Vénus est encore à 1°,546 de la ligne des nœuds.

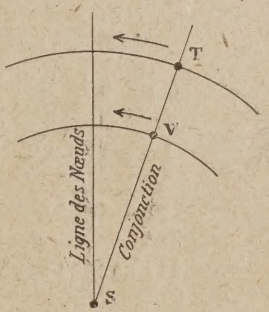


Fig. 189.

Montrons que si un passage sur le disque vient de se produire, il est probable d'en observer un second 8 ans après.

Mais il ne s'en produira certainement pas un troisième consécutivement.

3° — En admettant l'uniformité du mouvement angulaire de Vénus, la variation moyenne diurne de la longitude est :

$$\alpha = 360^\circ : 224{,}7 = 96' = 5760''.$$

L'obliquité i du plan de l'orbite de Vénus sur l'écliptique est de 3° 23′, angle dont la tangente est 0,059. D'où une variation diurne de *latitude héliocentrique* β voisine de 5′,66 par jour, *au voisinage des nœuds.*

Mais la *latitude géocentrique* β' correspond au même déplacement $\overline{VV'}$ de l'astre en hauteur vu d'un point 2,61 fois moins éloigné (en moyenne). Au voisinage du nœud, la latitude géocentrique β' varie donc en moyenne par jour de :

$$5',66 \times 2{,}61 = 15'.$$

soit de 23′ pour le jour et demi dont, aux conjonctions séparées par 8 années entières, Vénus s'éloigne de son nœud.

Si donc il se produit un premier passage à une certaine date, il s'en produira un second 8 ans après, à la condition toutefois que lors du premier, Vénus n'ait pas été trop loin du bord du Soleil, c'est-à-dire que la ligne de passage n'ait pas été trop voisine du nœud. Si Vénus a passé

la première fois à 6′ du bord nord du disque solaire, par exemple, $6' + 23' = 29'$ étant inférieur au diamètre apparent du Soleil qui est de 32′, un second passage se produira après 8 ans.

Ainsi un passage boréal succède à un passage austral, ou inverse-

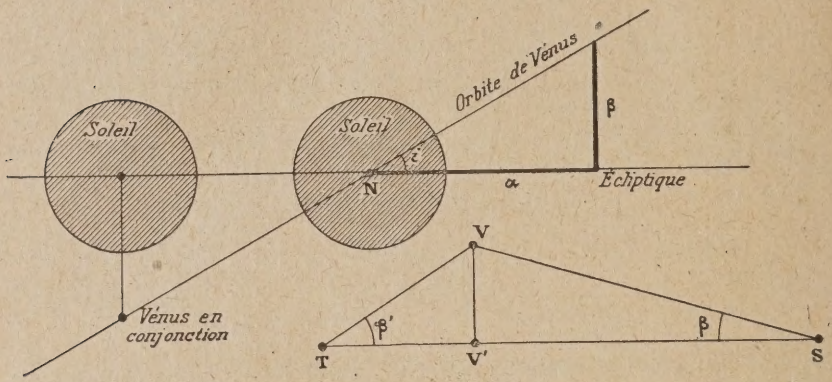


Fig. 190.

ment. Mais à la troisième conjonction octonaire la latitude devient trop grande pour que l'astre se projette sur le disque solaire.

4° — La période qui vient après l'octonaire, est de 235 ans.

235 années sidérales de la Terre font	85 835^j,230
382 — de Vénus —	85 835 ,700
147 années synodiques.	85 835 ,167

Elle est très sûre, la différence des nombres étant très petite.

La période de 243 ans est encore plus sûre.

243 années sidérales de la Terre font	88 757^j,298
395 — de Vénus	88 756 ,81
152 années synodiques.	88 754 ,73

On a : $243 = 235 + 8$.

La conjonction peut se produire soit au voisinage du nœud ascendant, soit au voisinage du descendant.

D'où une période de 121,5 années moitié de 243.

En définitive les calculs donnent les résultats suivants (Delambre). Nous prenons comme 0 le temps de passage de 1631.

NŒUD ASCENDANT	NŒUD DESCENDANT	INTER-VALLES	DATES
0	. . . . .		déc. 1631
8	. . . . .	8	déc. 1639
. . . . .	8 + 121,5	121,5	6 juin 1761
. . . . .	8 + 121,5 + 8	8	3 juin 1769
243	. . . . .	105,5	8 déc. 1874
243 + 8	. . . . .	8	6 déc. 1882
. . . . .	243 + 8 + 121,5	121,5	7 juin 2004
. . . . .	243 + 8 + 121,5 + 8	8	5 juin 2012
2 × 243	. . . . .	105,5	10 déc. 2117
2 × 243 + 8	. . . . .	8	8 déc. 2125

On voit que les passages ont toujours lieu en décembre et en juin.

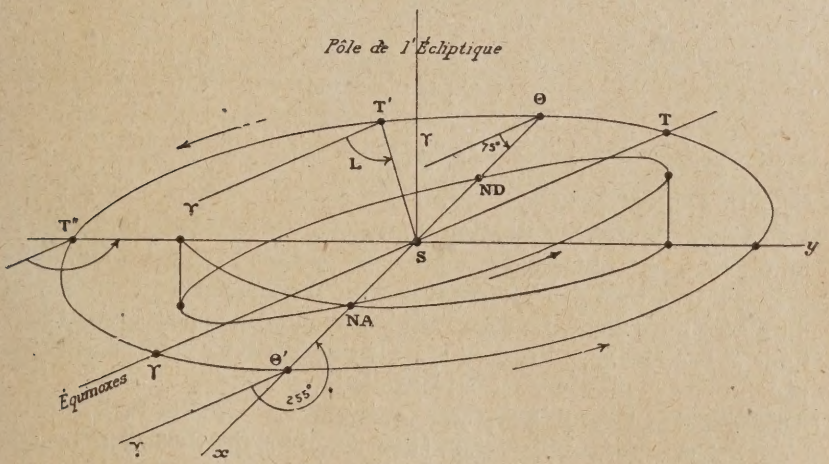


Fig. 191.

En effet dans le tableau du § 183, nous trouvons pour longitude héliocentrique du nœud ascendant un angle voisin de 75°.

Que le lecteur se reporte à la figure 191.

A l'équinoxe du printemps, la Terre est en T sur son ellipse, dans le plan ySx qui est l'écliptique. Le Soleil se projette sur le point vernal γ ; sa longitude géocentrique est nulle.

La Terre vient en Θ dans la ligne des nœuds de l'orbite de Vénus. Depuis l'équinoxe elle a tourné de 75° ; on est en juin ; la latitude géocentrique 4 du Soleil est 75°. Si Vénus est alors en conjonction inférieure, c'est au voisinage du nœud descendant de son orbite.

Quand la Terre arrive en Θ′, on est en décembre; la longitude géocentrique du Soleil est 255°. Si Vénus est alors en conjonction inférieure, c'est au voisinage du nœud ascendant.

246. **Circonstances d'un passage pour le centre de la Terre.** 1° — Je prends comme exemple le passage de juin 1769 calculé par

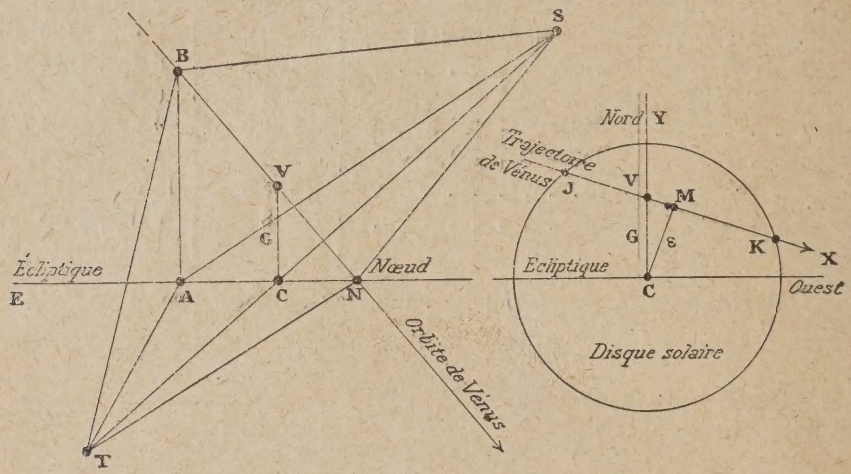


Fig. 192.

Lalande et Delambre suivant une méthode très élémentaire. J'ajoute toutes les figures qui seules rendent ces calculs faciles à comprendre.

Le passage s'est produit près du nœud descendant, la latitude passe du positif au négatif. La figure 192 représente le plan TNSE de l'écliptique et la trajectoire VN de Vénus; la ligne TCS est quasi normale au plan du tableau dans lequel se trouve la ligne VN.

Posons $R = \overline{ST}$, $r = \overline{SC}$.

Au moment de la conjonction, la variation horaire de longitude héliocentrique est :

pour Vénus . . . . . $\psi = 238'',14$,
pour la Terre . . . . . $\varphi = 143'',50$.

Prenons comme droite de référence mobile, la droite ST′ qui joint le Soleil à la Terre (fig. 193) : le mouvement *relatif* héliocentrique est par suite :

$$\psi - \varphi = 94'',64.$$

Le mouvement horaire de Vénus en latitude est $-14'',20$.

L'inclinaison de l'orbite relative rapportée à la droite mobile ST′ est par suite :

$$\operatorname{tg} I = 14,20 : 94,64, \qquad I = 8°\,31'\,39''.$$

Tels sont les éléments héliocentriques *relatifs*.

Passons aux éléments géocentriques. On a immédiatement :

$$\psi' = 94'',64 \frac{r}{R - r} = 94'',64 \times 2,51 = 237'',84 \text{ rétrograde.}$$

Le rapport 2,51 est celui qui convient aux distances r et R pour le temps du phénomène.

On a de même pour la latitude géocentrique :

$$-14'',20 \times 2,51 = -35'',69.$$

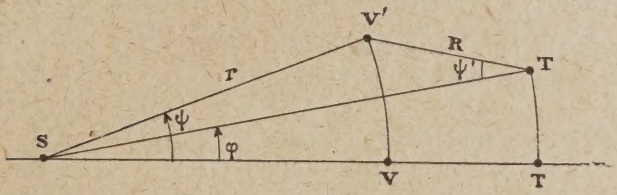


Fig. 193.

On retrouve l'inclinaison *relative* I précédemment calculée en faisant le quotient :

$$\text{tg I} = 35,69 : 237,84.$$

2° — Au moment de la conjonction, la latitude héliocentrique de Vénus était boréale et valait 248". La latitude géocentrique était donc :

$$G = 248'' \times 2,51 = 623'',50.$$

La plus courte distance de la projection de Vénus sur le disque solaire au centre de ce disque était :

$$\varepsilon = \overline{CM} = G \cos I = 616'',60.$$

La distance $\overline{VM}$ entre la position de l'astre lors de la conjonction et la position la plus rapprochée du centre du disque solaire, était :

$$\overline{VM} = G \sin I = 92'',52.$$

Calculons le temps que l'astre met à parcourir l'espace $\overline{VM}$.

Pour cela projetons sur l'écliptique, puis divisons par la vitesse horaire en longitude :

$$92'',52 \times 0,989 = 91'',50.$$

Le mouvement horaire géocentrique est 237",84.

Le temps est donc en fraction d'heure :

$$0^h,3847 = 23^m\ 4^s,5.$$

Or les tables de Vénus donnaient pour heure de la conjonction :

$$10^h\ 15^m\ 2^s.$$

D'où pour l'heure du milieu M du passage :

$$10^h\,38^m\,6^s.$$

3° — Il est maintenant facile de calculer le temps que Vénus met à parcourir la corde. On a :

$$\overline{MK} = \sqrt{\delta^2 - \varepsilon^2};$$

δ est le diamètre apparent du disque solaire. Par les calculs déjà faits connaissant la vitesse de Vénus sur sa corde, tenant compte du diamètre apparent de Vénus (voisin de 29″), on dresse le tableau suivant :

intervalle entre les contacts intérieurs. . . .	5^h	37^m	22^s
heure du premier contact intérieur	7	49	25
— second —	13	26	47
intervalle entre les contacts extérieurs. . . .	6	15	6
heure du premier contact extérieur	7	30	33
— second —	13	45	39
temps de l'entrée de Vénus.		18	52.

Prenons deux axes de coordonnées, CX passant par le centre du Soleil et dirigé vers l'ouest (sens rétrograde), CY dirigé vers le nord (fig. 192, à droite).

La trajectoire du centre de Vénus est définie par les équations :

$$X = 237{,}84\,t, \qquad Y = 623{,}50 - 35{,}69\,.\,t, \qquad (1)$$

t est évalué en heures. L'origine des temps est l'instant de la conjonction.

En 1874, le passage se faisait près du nœud ascendant.

Les équations étaient :

$$X = 243{,}55\,t, \qquad Y = 837{,}17 + 39{,}07\,t.$$

Tels sont les éléments du passage *pour l'observateur supposé au centre de la Terre.*

247. **Circonstances du passage pour un point de la surface terrestre.**

1° — Parallèlement aux axes qui viennent d'être définis, et par le centre de la Terre, traçons deux axes Ox et Oy (fig. 194 et 195), vers l'ouest et vers le nord ; le premier est invisible dans la figure 195. Chaque point de la surface de la Terre à chaque instant est défini par un x et un y qui sont fonction du temps. Le centre de la Terre est fixe en raison de la manière dont nous avons établi la trajectoire apparente X, Y, du centre de Vénus se projetant sur le Soleil ; mais la Terre tourne autour de son axe.

Du fait que nous passons du centre de la Terre ($x = 0$, $y = 0$) en un point P de la surface, la position apparente de Vénus change sur le

disque solaire. Elle n'y décrit plus la même corde ; le temps qu'elle met à décrire sa corde est modifié. *La méthode de Halley consiste précisément à mesurer le déplacement de la corde, par la variation du temps mis à la décrire.*

Nous savons d'après le § 244 et la figure 187 que du déplacement A'B' de Vénus, par suite du déplacement de la corde qu'elle décrit, on déduit la parallaxe.

Nous pouvons négliger la distance de $\overline{PP'}$ du point P à sa projection. Dans la figure 194, on a les relations évidentes entre les coordonnées

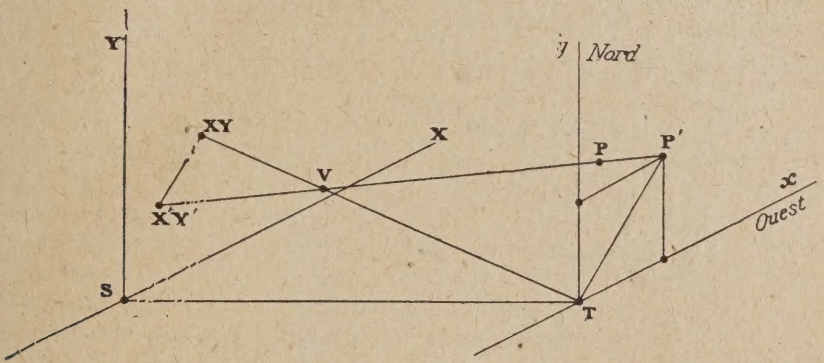


Fig. 194.

X, Y, de Vénus vue du point T, et les coordonnées X', Y', de l'astre vu du point P ou du point P' :

$$X' = X - \mu x, \qquad Y' = Y - \mu y.$$

Comme nous évaluons les coordonnées X et Y en angles apparents, nous devons écrire :

$$X' = X - \mu\alpha\frac{x}{R}, \qquad Y' = Y - \mu\alpha\frac{y}{R}.$$

α est la parallaxe solaire ; R est le rayon terrestre ;

μ est le rapport SV : TV (fig. 187) voisin de 2,61.

Nous connaîtrons donc la trajectoire apparente (X', Y') de Vénus vue du point P quelconque de la Terre, en évaluant x et y en fonction du temps et en remplaçant X et Y par les valeurs (1) du paragraphe précédent.

2° — Il est généralement assez compliqué de déterminer x et y en fonction du temps, en raison de l'inclinaison de l'axe terrestre sur l'écliptique. Mais comme il s'agit ici de faire comprendre la méthode, utilisons les circonstances du passage de 1769 pour simplifier notre exposé.

Le passage que nous étudions eut lieu tout près du solstice d'été

L'axe terrestre est donc sensiblement dans le plan yTS; il fait 23° 27′ avec Ty. La trajectoire d'un point P de la surface terrestre est un petit cercle normal à cet axe. Soit R le rayon terrestre, l la latitude du point P. Projetons le cercle décrit par le point P sur le plan xOy; il devient une ellipse dont il est facile de calculer les axes.

Le rayon du cercle décrit est $R\cos l$, c'est le demi-axe de l'ellipse parallèle à Ox; le demi-axe parallèle à Oy est $R\cos l.\sin\omega$.

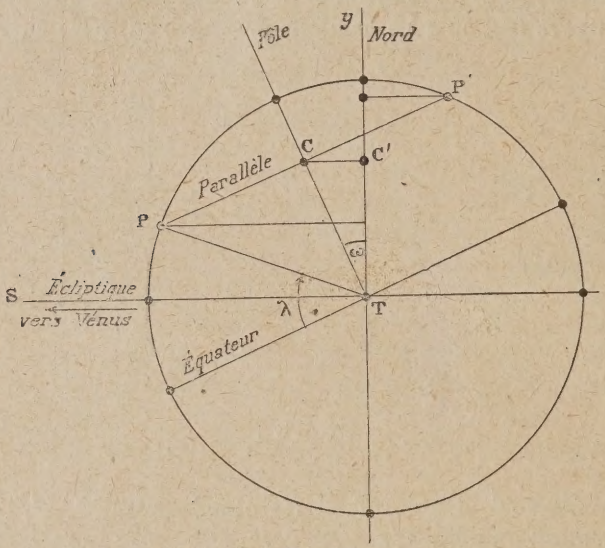


Fig. 195.

La projection C′ du centre C du cercle est élevée de $R\sin l.\cos\omega$ au-dessus de l'écliptique.

Bref les équations de la trajectoire du point P sont :

$$x = -R\cos l.\sin n(t-t_0),$$
$$y = R\sin l.\cos\omega - R\cos l.\sin\omega.\cos n(t-t_0).$$

t est mesuré en heures; $\quad n = 2\pi : 24.$

t_0 est l'heure du passage du point P dans le plan normal à l'écliptique mené par le centre de la Terre et le centre du Soleil. Le signe — devant x vient de ce que, dans le mouvement diurne, les points de la Terre vont de l'ouest à l'est; leur projection sur yTx se déplacent donc vers les x négatifs, de 6 heures avant le passage dans le plan yTS à 6 heures après.

3° — Des expressions de x et de y transportées dans les équations (1) il résulte d'abord qu'en toute rigueur la trajectoire apparente de Vénus sur le Soleil cesse d'être rectiligne. Mais le coefficient des termes en x

et y étant de l'ordre de 25″, les trajectoires vues des différents points de la Terre restent sensiblement rectilignes et parallèles.

La parallaxe modifie seulement la position des cordes *et aussi la vitesse avec laquelle elles sont parcourues.*

Insistons sur ce dernier point (fig. 195).

Nous avons calculé la vitesse apparente pour l'observateur qui est au centre de la Terre. En raison de la vitesse plus grande de Vénus sur sa trajectoire, sa projection sur le Soleil fixe se déplace de l'est à l'ouest (fig. 184).

Mais en vertu de son mouvement diurne, le point P va de l'arrière à l'avant du tableau. Tout se passe pour lui comme si le mouvement du centre de la Terre était retardé, ou comme si le mouvement de Vénus était accéléré.

La vitesse $dX' : dt$ de Vénus sera donc plus grande que la vitesse $dX : dt$.

Au contraire le point P′ va de l'avant à l'arrière du tableau. Tout se passe pour lui comme si le mouvement du centre de la Terre était accéléré, ou comme si le mouvement de Vénus était retardé.

La vitesse $dX' : dt$ de Vénus sera donc plus petite que la vitesse $dX : dt$.

C'est aussi bien ce qui résulte de la formule :

$$\frac{dX'}{dt} = \frac{dX}{dt} + \mu\alpha n\mathcal{R}\cos l \,.\, \cos n(t - t_0).$$

Le second terme du second membre est positif tant que $n(t - t_0)$ est compris entre $\pm 180°$; il est négatif quand $n(t - t_0)$ est compris entre $360 \pm 180°$.

Pour le point P où $nt_0 = 0$, la conjonction a lieu à midi; pour le point P′ où $nt_0 = 180°$, la conjonction a lieu à minuit. Il suffit du reste que P′ soit au delà du tropique d'hiver, dans la zone glaciale, pour que le passage y soit visible. Ainsi pour tout observateur qui voit le passage commencer avant midi et finir après midi, la durée du passage est diminuée: pour tout observateur qui voit le passage commencer avant minuit et finir après minuit, la durée du passage est augmentée; toutes choses égales d'ailleurs.

Le passage de juin 1769 que nous prenons comme type, s'est produit dans la partie boréale du disque solaire. Pour les observateurs placés dans l'hémisphère austral (ils observent nécessairement de part et d'autre de midi) la corde décrite par Vénus est rejetée vers le nord du disque solaire; elle est raccourcie; la durée du passage est diminuée de ce chef et aussi du chef que la vitesse apparente de Vénus est diminuée.

Pour les observateurs placés dans l'hémisphère boréal, la corde décrite par Vénus est plus longue : la durée du passage est augmentée de ce chef. L'augmentation sera plus grande si à cette première cause s'ajoute une diminution de la vitesse apparente : l'observateur est alors en P′ et voit le passage s'effectuer de part et d'autre de minuit.

En définitive il est avantageux d'augmenter le plus possible la distance angulaire des observateurs, distance comptée sur la partie *éclairée* de la Terre.

248. Résultats de la méthode de Halley.

1° — Entre la demi-longueur λ de la corde, sa distance ε au centre du disque solaire et le rayon δ de ce disque, existe la relation :

$$\lambda^2 = \delta^2 - \varepsilon^2, \qquad \lambda d\lambda = -\varepsilon d\varepsilon.$$

D'où : $$\frac{d\lambda}{\lambda} = -\varepsilon \frac{d\varepsilon}{\delta^2 - \varepsilon^2} = -\frac{d\varepsilon}{\delta}\left[\frac{\varepsilon}{\delta}\cdot\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{\delta^2}\right)\right].$$

Toutes choses égales d'ailleurs, la durée du passage varie proportionnellement à $\delta\varepsilon$. Il est avantageux que le coefficient de ε soit grand, pas trop grand cependant pour éviter certains inconvénients que nous dirons. Pour préciser la discussion, faisons $\varepsilon : \delta = 0{,}64$; c'est à peu près le nombre qui correspond au passage de 1769. On a :

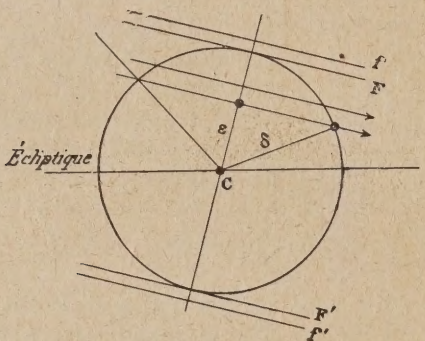


Fig. 196.

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = -1{,}08 \cdot \frac{d\varepsilon}{\delta}.$$

Pour : $d\varepsilon : \delta = 1 : 40$,

il vient : $$\frac{d\lambda}{\lambda} = -0{,}027.$$

Si le passage dure par exemple 7 heures (420 minutes) pour le centre de la Terre, pour le point où $d\varepsilon : \delta = 1 : 40$, il durera 11 minutes et demie de moins. C'est effectivement l'ordre de grandeur des variations dans la durée des passages.

Je ne fais pas le calcul exact qui n'a ni difficulté ni intérêt.

D'où l'enthousiasme de Halley et de tous les astronomes..., avant le passage de 1761. 11 minutes font 660 secondes; on ne peut pas se tromper d'une seconde : DONC la parallaxe sera connue à 1 : 660 près!

L'expérience a montré la vanité de cet espoir.

2° — Je ne raconterai pas les péripéties des passages de 1761 et 1769. Je me réjouis seulement de la mésaventure du nommé Le Gentil qui, sur une frégate, après maints détours, arrive le 24 mai 1761 devant Mahé, trouve les Anglais maîtres de la place, fiche le camp et voit Vénus passer sur le Soleil en mer, du côté de Madagascar. Il va s'installer à Pondichéry, y reste 8 ans pour ne pas manquer le phénomène : mais quand Vénus passe sur le Soleil, un nuage tire le rideau. De deux choses l'une, Le Gentil était un malin qui s'est taillé de la réclame à perpète en prenant sa retraite à Pondichéry qui est une ville aimable — ou le dernier des imbéciles.

Comme c'est un savant, je penche vers la seconde hypothèse.

Bref après avoir beaucoup parlé, beaucoup écrit, passablement torturé les résultats bruts, DES MÊMES OBSERVATIONS les savants tirèrent pour la parallaxe des nombres compris entre 8,60 et 8,88.

Delambre conclut que la parallaxe est probablement entre 8″,5 et 8″,7 : nous savons aujourd'hui qu'elle est 8″,80.

Amusons-nous un brin de la sottise des savantasses.

En 1824 Encke soumit à une nouvelle discussion toutes les observations du passage de 1769. Traitant l'ensemble des résultats par la méthode des moindres carrés (saluez !), il trouve :

$$8{,}603 \pm 0{,}046.$$

Pourtant je fais scandale quand je déclare que toutes ces discussions sur les résultats sont stupides, que la méthode des moindres carrés est fort belle en soi, mais qu'elle constitue la pire des idioties telle qu'on l'applique. Dans sa *Mécanique céleste*. Laplace admet 8,81 qui est le nombre de Pingré : je vous assure que Pingré y met moins de façons que Encke : pourquoi donc tombe-t-il plus juste?

Mais allez donc faire comprendre à des manœuvres que le nombre et les moyennes ne priment pas l'intelligence ! Voici un trait que je prends dans Tisserand et qui met en évidence l'état d'âme des savants même hélas ! les plus intelligents.

Il s'agit de la parallaxe par la méthode du § 236 appliquée à Mars.

Les observations datent de 1672 ; elles furent effectuées par Cassini I à Paris et par Richer à Cayenne. Ils trouvent pour la parallaxe 9″,5 ; ce qui est prodigieux.

« Il faut dire *toutefois* que ce résultat n'avait été obtenu que par *un choix* des *observations les plus exactes et les plus conformes entre elles.* »

Ce *toutefois* de Tisserand est un poème ; je rougirais de l'avoir écrit, mais je ne suis pas un pontife ! Leur idéal est de ne rien perdre de ce qu'ils font, serait-ce idiot — et ce l'est plus souvent qu'à leur tour !

3° — La méthode de Halley donne de mauvais résultats, parce que l'entrée et la sortie sont extrêmement mal définies. Divers observateurs,

opérant dans le même lieu, avec des appareils similaires, estiment l'instant de la tangence (extérieure ou intérieure) du disque noir de Vénus et du disque lumineux du Soleil, avec des écarts de l'ordre de 20 secondes de temps. Les bords du Soleil sont toujours ondulants; le phénomène n'a pas une pureté géométrique : le disque solaire est mal défini.

Au fond (c'était l'opinion de Le Verrier) la méthode est mauvaise *en soi*; elle implique un cercle vicieux. C'est très gentil de dire : nous allons remplacer la mesure d'un arc par la mesure d'un temps; nous prendrons comme auxiliaire un mobile très lent; PAR SUITE nous grossirons le phénomène.

C'est confondre *grossissement* et *pénétration*.

Ce n'est pas en grossissant quelque chose *qui n'est pas net*, que vous augmenterez la précision de la mesure : toute l'indétermination du phénomène subsistera. Vous mesurerez par exemple avec un décimètre ce qu'avant le grossissement vous étiez obligé de mesurer avec une graduation très déliée : ce sera peut-être plus commode, mais l'approximation restera la même.

Ces divergences de 20 secondes de temps correspondent à des divergences de quelques secondes d'arc; or on sait depuis longtemps (§ 113) que les mesures du diamètre du Soleil présentent des divergences du même ordre, que le diamètre soit obtenu avec un héliomètre ou par la durée du passage du disque sur les fils de la lunette méridienne.

Il est bien évident que ce n'est pas en compliquant le phénomène par l'introduction de Vénus que vous le rendrez mieux défini.

Je n'insisterai pas ici sur le *ligament noir* renvoyant pour son étude à mon Cours d'*Optique*.

249. Mesure photographique du déplacement des cordes.

1° — Décidément les mauvais coucheurs genre Le Verrier me plaisent beaucoup. Ils sont peut-être assommants pour leurs subordonnés; au moins disent-ils des choses sensées en un langage compréhensible; au moins tranchent-ils sur la pleutrerie qui est l'apanage le moins contestable des pontifes et de tous ceux qui espèrent le devenir. Dans la *Commission du passage de Vénus*, Le Verrier est le seul qui ait osé dire que la méthode d'Halley est médiocre, qu'on se donne beaucoup de mal pour un résultat piteux, qu'elle ne fournira jamais qu'une mauvaise approximation. En définitive, disait-il en 1872, les observations à faire sont les mêmes qu'en 1769; celles-ci ont donné de mauvais résultats malgré l'excellence des observateurs. On va recommencer ce qu'ils ont fait, sensiblement avec les mêmes moyens expérimentaux : on butera contre les mêmes difficultés. N'espérons donc pas qu'on aboutisse en 1874 ou en 1882.

L'événement a vérifié ces pronostics.

En particulier Le Verrier discuta sans aménité la méthode qui consiste

à mesurer sur une épreuve photographique la distance minima des centres du disque solaire et du centre de Vénus pour en conclure le déplacement de la corde. Son raisonnement très simple est parfaitement concluant.

Supposons une image du Soleil de 2 centimètres de diamètre (20000 μ), ce qui exige une lunette de plus de 2 mètres de distance focale. Supposons la distance des centres des images astrales circulaires mesurée à 1 micron près.

Posons enfin que le déplacement de la corde résultant de la parallaxe est de 1/80 du disque solaire (250 μ). Dans ces conditions vous pouvez espérer obtenir la parallaxe à 1 : 250 près. Si sa valeur vraie est 8″,80, les résultats oscilleront vraisemblablement entre 8″,78 et 8″,82.

Mais, ajoute Le Verrier comme conclusion de la discussion de 9 000 mesures de diamètres solaires, *il n'y a pas de diamètre solaire bien déterminé.*

A quoi les autres membres de la Commission répondent qu'il faut bien faire comme les autres nations et qu'on verra après coup ce que vaut le résultat.

2° — Fizeau et Cornu défendaient la photographie (plus exactement la daguerréotypie sur glace argentée; on avait proscrit le collodion pour cet emploi particulier; les plaques sèches n'étaient pas inventées). Ils n'eurent pas de peine à démontrer qu'*en admettant ce qu'il leur plaisait d'admettre*, on obtiendrait avec précision la distance des centres des disques et la somme de leurs rayons, par des mesures micrométriques effectuées sur l'épreuve photographique.

Voici leur raisonnement.

Posons qu'en raison du flou de l'image du bord lumineux du Soleil ou du bord de Vénus, on commette une erreur φ *constante* (indépendante de la courbure du trait qu'on repère). Au lieu de faire tangenter le fil de micromètre en F et en F′, on l'amènera en f et en f' (fig. 196) : en vertu de l'hypothèse, la moyenne donnera tout de même la position exacte du centre, que φ soit positif ou négatif.

On a donc exactement la distance des centres des disques.

Faisons φ positif. Le disque solaire *lumineux sur fond obscur* est évalué par excès; l'erreur est 2φ. Le disque de Vénus *obscur sur fond lumineux* est évalué par défaut : l'erreur est 2φ. Il y a compensation dans la somme des diamètres, *qui est donc exactement connue.*

Or les tables du Soleil et de Vénus donnent très exactement les valeurs relatives simultanées des diamètres de ces astres. Donc on peut calculer le rapport $\varepsilon : \delta$ de la distance des centres ε au rayon δ du disque solaire qui entre dans les formules.

Mais outre que l'hypothèse de la constance de l'erreur φ est purement gratuite, les images sont déformées par des ondulations; la photographie enregistrera donc UN état plus ou moins déformé. Assurément on pourra mesurer le cliché tout à son aise; mais le bel avan-

tage de déterminer avec précision quelque chose de théoriquement mal défini!

3° — Quoi qu'il en soit, supposons pris un grand nombre de clichés pour des temps suffisamment voisins *qu'il n'est pas nécessaire de préciser autrement.* Quelques-uns d'entre eux correspondent au minimum de ε. De la comparaison de ces minimas pour différents observatoires assez éloignés les uns des autres on déduit la parallaxe.

Dans la Commission de Vénus, on avait longuement discuté sur l'emploi de la photographie pour déterminer les temps d'entrée et de sortie; mais il faut alors que les clichés soient pris à des temps, non seulement voisins, *mais connus*, ce qui complique beaucoup la technique.

Enfin on s'était demandé s'il n'était pas possible de repérer l'orientation des clichés. Après discussion on a considéré ce repérage comme trop incertain et trop peu précis.

Je ne perdrai pas l'occasion de faire l'éducation de mon lecteur. Je trancris donc une phrase cueillie dans l'*Astronomie* de Delambre et qui clora fort heureusement ce chapitre : « Au reste, ces estimations en lieues (de la distance de la Terre au Soleil) sont de simple curiosité; elles n'entrent dans aucun calcul astronomique, et que l'on fasse la parallaxe de 8″,5 ou de 8″,7, il importe assez peu, même dans les recherches les plus délicates. »

Cette phrase mériterait d'être écrite en lettres d'or. Delambre, qui était fort intelligent, y énonce une vérité de sens commun. Il ne méprise pas la question, mais désire seulement qu'on lui donne son importance réelle *qui est de simple curiosité.* Il ne veut pas être confondu avec ceux qui semblent officier quand ils prononcent le mot *parallaxe.*

Le lecteur s'amusera, je l'espère, comme un dieu, en lisant maintenant la phrase suivante par laquelle débute un mémoire de Tisserand :

« La parallaxe du Soleil est un des éléments les plus importants de l'Astronomie. »

Décidément Tisserand manquait d'esprit de finesse!

CHAPITRE VI

PERTURBATIONS[1]

250. Mouvement elliptique troublé.

Si les astres qui agissent les uns sur les autres, sont plus de deux, leurs trajectoires ne sont plus des ellipses. Mais en raison de l'action prédominante d'un astre (Soleil pour la Terre et les planètes, Terre pour la Lune, planète pour ses satellites) et de la petitesse des troubles apportés à son action, on convient de regarder l'orbite comme une ellipse *qui se déforme*. Outre que cette méthode est mathématiquement plus aisée, elle est imposée par les extrêmes petitesses et lenteurs des modifications. Pendant plusieurs révolutions l'astre décrit précisément la même ellipse suivant la loi de Képler; ce n'est pas une simple fiction mathématique, c'est l'énoncé des faits eux-mêmes, que de considérer le mouvement comme elliptique, quitte à modifier peu à peu les paramètres qui fixent la forme et la position de l'ellipse.

L'ellipse a pour formule :

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos\theta, \qquad p = a(1 - e^2).$$

Les inégalités entraînent les variations *périodiques* ou *séculaires* des paramètres p et e. Elles se traduisent par la substitution aux constantes p et e de deux fonctions du temps. Suivant que ces fonctions sont périodiques ou paraboliques (de la forme $a + bt + ct^2$), on dit que l'inégalité est *périodique* ou *séculaire*.

Si la ligne des apsides a un mouvement direct, on mettra l'ellipse sous la forme :

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos(1 - m)\theta,$$

où m est une quantité petite et positive. Le rayon vecteur reprend sa valeur maxima, non plus après des variations de θ égales à 2π, mais

1. A passer dans une première lecture.

après des variations égales à $2\pi(1+m)$: la longitude du périhélie croît. Le paramètre m est négatif si le mouvement du périhélie est rétrograde.

La position de l'orbite dans l'espace est fixée par son inclinaison sur l'écliptique, $P\Omega\pi = i$, et par la longitude $\gamma S\Omega$ du *nœud ascendant* Ω ; autrement dit, par l'angle que la *ligne des nœuds* (trace $S\Omega$ du plan de l'orbite sur l'écliptique) fait avec la ligne $S\gamma$ des équinoxes.

Des modifications de forme et de position, les plus importantes sont évidemment les séculaires : les périodiques s'annulent au bout d'un temps relativement court, tandis que les séculaires s'accumulent. A la vérité certaines variations séculaires peuvent être regardées comme périodiques *à longues périodes*. Au point de vue analytique, cela revient à remplacer un sinus par son développement en série, ou inversement. Au point de vue physique, une rotation de la ligne des nœuds d'un tour en 26 000 ans, par exemple, est un phénomène séculaire; c'est aussi bien un phénomène périodique à longue période.

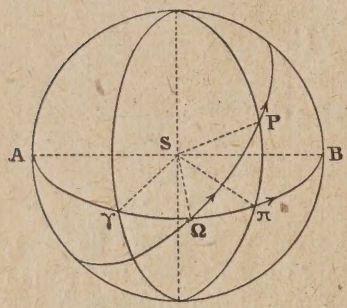


Fig. 197.

Si certains phénomènes périodiques à longue période n'ont qu'une importance médiocre, par exemple, sur les conditions d'habitabilité de notre planète (la précession des équinoxes est dans ce cas), d'autres phénomènes également périodiques les modifieraient du tout au tout. C'est ce qui arriverait si le grand axe de notre orbite subissait des variations d'amplitude énorme, seraient-elles périodiques à longue période, ou si l'inclinaison de l'équateur sur l'écliptique pouvait prendre toutes les valeurs de 0° à 180° (variation évidemment périodique par nature). Nous verrons comment les astronomes nous ont rassuré à cet égard.

251. Méthode de la variation des constantes.

A cette conception d'un *mouvement elliptique troublé* se rattache la *méthode de la variation des constantes*.

La trajectoire réelle n'est pas une ellipse; mais à chaque instant le mobile est censé décrire une ellipse *osculatrice à la trajectoire réelle*, parcourue avec la même vitesse que la trajectoire réelle, et telle que si les perturbations disparaissaient subitement, elle deviendrait la trajectoire rigoureuse et permanente.

Précisons la manière dont s'introduisent les paramètres variables en fonction du temps, paramètres qui sont les *constantes variables* du problème, suivant une bien étrange association de mots : il serait préférable de parler des *paramètres variables* :

Les équations du mouvement d'un corps de masse m, attiré par l'origine fixe en raison inverse du carré des distances, sont :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + GM\frac{x}{r^3} = 0,$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} + GM\frac{y}{r^3} = 0. \qquad (1)$$

Le mobile décrit une ellipse caractérisée par :
son demi-grand axe a,
son excentricité e,
l'angle φ que fait son grand axe avec l'axe des x.

Le mouvement du mobile sur l'ellipse est déterminé par le temps τ auquel il passe au périhélie.

La période est reliée au grand axe par la loi de Képler.

On a :

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$
$$r = a(1 - e\cos u),$$
$$nt = n\tau + u - e\sin u, \qquad (I)$$
$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\theta - \varphi) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{u}{2}, \qquad a^3n^2 = \mu.$$

Introduisons les forces perturbatrices.

Elles admettent un potentiel; posons donc :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + GM\frac{x}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial x},$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} + GM\frac{y}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial y}. \qquad (2)$$

Dans les cas (1) et (2), la solution peut être mise sous la forme :

$$x = f(t, a, e, \varphi, \tau), \qquad y = F(t, a, e, \varphi, \tau). \qquad (3)$$

Mais dans le cas des équations (1), a, e, φ, τ, sont des constantes déterminées par les équations (1). Dans le cas des équations (2), ce sont des fonctions du temps. Du reste, si brusquement on les considère comme des constantes (ce qui revient à supprimer la perturbation), les solutions (3) deviennent *par hypothèse* acceptables pour les équations (1); elles se réduisent aux équations (1).

Comme on dispose de quatre fonctions arbitraires pour deux équations à satisfaire, on peut écrire deux conditions supplémentaires. Elles exprimeront précisément que la vitesse est la même à chaque instant sur l'ellipse (a, e, φ, τ, constants) et sur la trajectoire réelle (a, e, φ, τ, fonctions du temps) :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t}; \qquad (4)$$

ce qui revient à écrire :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial a}da+\frac{\partial f}{\partial e}de+\frac{\partial f}{\partial \varphi}d\varphi+\frac{\partial f}{\partial \tau}d\tau=0,\\ \frac{\partial F}{\partial a}da+\frac{\partial F}{\partial e}de+\frac{\partial F}{\partial \varphi}d\varphi+\frac{\partial F}{\partial \tau}d\tau=0.\end{aligned}\qquad(5)$$

Cherchons ce que devient le problème.

Dérivons les équations (4) par rapport au temps :

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}&=\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial a}\frac{da}{dt}+\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial e}\frac{de}{dt}+\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial \varphi}\frac{d\varphi}{dt}+\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial \tau}\frac{d\tau}{dt},\\ \frac{d^2y}{dt^2}&=\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial t\partial a}\frac{da}{dt}+\frac{\partial^2 F}{\partial t\partial e}\frac{de}{dt}+\frac{\partial^2 F}{\partial t\partial \varphi}\frac{d\varphi}{dt}+\frac{\partial^2 F}{\partial t\partial \tau}\frac{d\tau}{dt}.\end{aligned}\qquad(6)$$

Considérant a, e, φ, τ, comme des constantes, on doit avoir :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}+GM\frac{x}{r^3}=0,\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}+GM\frac{y}{r^3}=0.\qquad(7)$$

D'où enfin :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial a}da+\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial e}de+\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial \varphi}d\varphi+\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial \tau}d\tau=\frac{\partial R}{\partial x}dt;\\ \frac{\partial^2 F}{\partial t\partial a}da+\frac{\partial^2 F}{\partial t\partial e}de+\frac{\partial^2 F}{\partial t\partial \varphi}d\varphi+\frac{\partial^2 F}{\partial t\partial \tau}d\tau=\frac{\partial R}{\partial y}dt.\end{aligned}\qquad(8)$$

Les équations (5) et (8) résolvent le problème, puisque les fonctions f et F sont déterminées par les équations (1). La substitution de quatre équations du premier ordre à deux du second serait illusoire si *par hypothèse* les quantités da, de,... n'étaient pas très petites par rapport à dt. Il sera donc permis de substituer les valeurs *constantes* approchées de a, e,... à leurs valeurs *variables* exactes, dans les coefficients de da, de, $d\varphi$, $d\tau$. On résoudra les équations (5) et (8) comme un système de quatre équations du premier degré. On trouvera pour da, de,... des fonctions explicites du temps ; a, e,... seront finalement donnés par des quadratures. Pour avoir les constantes d'intégration, on posera qu'à l'origine du temps, a, e,... ont précisément les valeurs introduites dans les coefficients de da, de,...

Nous supposons connue la fonction perturbatrice R ; on la calculera au moyen des positions approchées des astres. Le développement en série de cette fonction dans chaque cas particulier a été longtemps la principale occupation des astronomes géomètres.

Nous retrouverons plus loin le même problème sous un autre biais.

252. Les forces perturbatrices sont des différences.

1° — Fixons d'abord les idées sur la cause des perturbations.

J'emprunte les considérations suivantes à Lalande qui expose ces questions avec une admirable clarté.

Je modifie son texte qui est vraiment trop diffus.

Si deux planètes dont l'une tourne autour de l'autre, étaient attirées également et suivant des directions parallèles par une troisième, cette attraction ne changerait rien à leurs situations relatives; ce serait comme si l'espace avait changé de position.

Ce n'est que la différence des attractions qui produit une inégalité. La Lune est troublée dans son mouvement autour de la Terre parce qu'elle est attirée par le Soleil un peu plus ou un peu moins que la Terre. La mer est agitée deux fois par jour par la Lune, parce que la Lune attire les eaux plus qu'elle n'attire la terre quand elle domine sur les eaux, moins qu'elle n'attire la terre quand elle domine sur la terre.

La différence entre l'action sur le Soleil et sur une planète mesure la force perturbatrice que produit une seconde planète sur la trajectoire relative de la première par rapport au Soleil.

2° — En particulier la Terre semble attirer moins la Lune, et quand la Lune est en conjonction, et quand la Lune est en opposition; ce qui est paradoxal.

La distance moyenne de la Terre à la Lune étant 388 fois plus petite que la distance moyenne de la Terre au Soleil, quand la Lune est en conjonction, l'attraction du Soleil sur la Lune surpasse l'attraction du Soleil sur la Terre de 1 : 194 : la Lune semble donc fuir la Terre. Quand la Lune est en opposition, l'attraction du Soleil sur la Lune est inférieure à l'attraction du Soleil sur la Terre de 1 : 194 : la Terre semble donc fuir la Lune. Dans les deux cas, le résultat est le même : l'attraction de la Terre sur la Lune semble diminuer, et de la même quantité.

C'est pour la même raison que dans l'ancienne théorie des marées les eaux de la mer tendent vers le zénith, quand la Lune est au nadir. Ce n'est pas que la Lune au nadir repousse les eaux de la mer qui sont de l'autre côté de la Terre; c'est qu'elle attire ces eaux moins qu'elle ne fait la Terre qui les supporte.

En définitive les perturbations sont la différence des actions produites par la cause perturbatrice sur le corps agissant et sur le corps agi.

Dans tout ce qui suit, nous désignerons l'astre prédominant par la lettre S, l'astre étudié par la lettre A et l'astre perturbateur par la lettre P.

3° — Voici une conséquence fondamentale des considérations précédentes : *Bien que l'action du Soleil à la surface de la Terre soit beaucoup plus grande que celle de la Lune, la perturbation causée par la Lune* (mesurée par les marées, par exemple) *est plus de deux fois plus grande que la perturbation produite par le Soleil.*

En effet la force est proportionnelle au quotient $M : r^2$.

La perturbation est comme la dérivée de la force par rapport à la distance; elle est donc comme $M : r^3$.

Les distances de la Lune et du Soleil à la Terre sont comme 1 : 388. Le rapport des masses est 1 : 27·158·000.

Le rapport des actions est donc 1 : 180, tandis que le rapport des perturbations est 2,16. Ces nombres ne sont du reste connus qu'avec une précision faible étant donnée l'incertitude sur la distance du Soleil à la Terre.

253. **Développements en série.**

1° — Le lecteur comprend maintenant pourquoi dans le calcul des perturbations on se trouve naturellement amené à développer en série l'inverse du cube d'une distance.

Dans le triangle PST on a :

$$\rho^2 = R^2 + D^2 - 2DR\cos\theta.$$

Développons $\quad 1 : \rho^3 = (R^2 + D^2 - 2DR\cos\theta)^{-\frac{3}{2}}.$

Le second nombre étant symétrique en R et en D, selon que R ou D

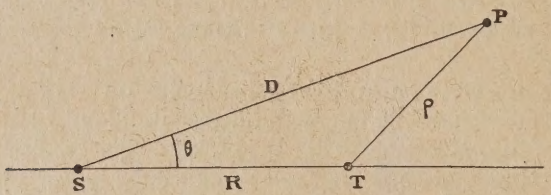


Fig. 198.

est le plus grand, on développe suivant les puissances de D : R ou de R : D. Pour obtenir le développement, on applique la règle du binôme. Mais on obtient ainsi un développement contenant les puissances du cosinus; il faut les remplacer par les cosinus des multiples de l'axe. On trouve :

$$\frac{1}{\rho^3} = \frac{1}{D^3} + \frac{9R^2}{4D^5} + \frac{225R^4}{64D^7} + \left(\frac{3R}{D^4} + \frac{45R^3}{8D^6}\right)\cos\theta$$
$$+ \left(\frac{15R^2}{4D^5} + \frac{105R^4}{16D^7}\right)\cos 2\theta + \frac{35R^3}{8D^6}\cos 3t + \ldots.$$
$$\frac{1}{\rho^3} = \frac{1}{R^3} + \frac{9D^2}{4R^5} + \frac{225D^4}{64R^7} + \left(\frac{3D}{R^4} + \frac{45D^3}{8R^6}\right)\cos\theta$$
$$+ \left(\frac{15D^2}{4R^5} + \frac{105D^4}{16R^7}\right)\cos 2\theta + \frac{35D^3}{8R^6}\cos 3t + \ldots.$$

Ces développements ne sont assez convergents pour être utilisables que si le rapport R : D ou D : R est plus grand que 3. C'est dire que pour la Terre la première planète pour laquelle ils puissent servir, est Jupiter. On est donc forcé de calculer les coefficients par une autre méthode.

2° — Méthode de Clairaut.

Voici une méthode simple et intéressante due à Clairaut.

Posons : $(R^2+D^2-2DR\cos\theta)^m = 2RD^m\left(\frac{R^2+D^2}{2DR}-\cos\theta\right)^m$.

Il s'agit de développer en série une expression de la forme :

$$(a-\cos\theta)^m = A+B\cos\theta+C\cos 2\theta+\ldots.$$

Clairaut utilise le procédé que Fourier systématisera plus tard. Multiplions successivement par $d\theta$, $\cos\theta.d\theta$, $\cos 2\theta.d\theta,\ldots$; intégrons entre 0 et 2π. Il vient :

$$\int_0^{2\pi}(a-\cos\theta)^m\,d\theta=\pi A, \qquad \int_0^{2\pi}(a-\cos\theta)^m\cos\theta\,.\,d\theta=\frac{B\pi}{2}.$$

et ainsi de suite. Pour calculer les coefficients A, B,... de la série, on est donc conduit à des quadratures que l'on effectue sans difficulté en calculant un nombre suffisant d'ordonnées. On mesure les aires fragment par fragment en faisant passer par les points un arc de parabole.

254. **Étude des perturbations. Perturbations compensées.**

1° — Il résulte de la faible intensité des forces perturbatrices et de la petitesse de leurs effets instantanés qu'on peut étudier ces effets *séparément*, ce qui facilite beaucoup la solution du problème. Nous décomposons donc la force perturbatrice en ses composantes suivant des directions convenables et traitons chacune d'elles séparément. Nous arrivons ainsi à quelques résultats simples, quasi évidents sans calcul. Au point de vue analytique, cela revient à ramener les équations différentielles à la forme linéaire et à représenter les actions perturbatrices par des séries; l'intégration se fait isolément pour chaque terme de la série. Au § 262 je donne un exemple simple de la méthode.

L'étude des perturbations se complique lorsqu'il s'agit de sommer les effets instantanés et d'obtenir l'effet global au bout d'un temps très long. Mais nous voulons seulement faire comprendre la nature des phénomènes; nous nous soucions fort peu de bluffer avec des pages d'une algèbre aussi ennuyeuse *que facile* (elle tient une place énorme sur le papier et se réduit à rien dans le cerveau); dès lors notre tâche est facilitée par les considérations suivantes.

On se rend compte immédiatement de l'allure des phénomènes périodiques *à courtes périodes*. La difficulté est de savoir s'il subsiste une perturbation *non compensée* (l'expression est de J. Herschel) finissant par donner une inégalité *à longue période*, que nous pouvons appeler *séculaire*.

2° — Réduisons le système à trois corps : le principal S, l'étudié A et le perturbateur P. A chaque instant ils constituent une figure SAP de *configuration* déterminée. En raison de ce que les durées de révolution moyennes sont *incommensurables*, au bout d'un temps plus ou moins long, la configuration prendra tous les aspects possibles. D'où résulte

que les forces perturbatrices pendront toutes les valeurs et directions possibles.

Si nous sommes certains que pour chacune des positions de P par rapport à l'orbite de A, la compensation s'effectue pour une révolution de A, nous sommes assurés que la compensation s'effectue au bout d'un certain temps pour le système réel : il n'y a pas d'inégalité séculaire.

Il arrive parfois que les moyens mouvements sont presque commensurables. Par exemple on a pour la révolution sidérale de :

Jupiter. . .	11 ans	314,84 jours soit	4 332,59 jours.
Saturne . .	29 —	166,98 —	10 759,23 —

L'année julienne est de 365,25 jours.

5 révolutions de Jupiter font 21 663 jours; 2 révolutions de Saturne font 21 518 jours; la différence est de 145 jours pendant lesquels Jupiter décrit 12° et Saturne 5. Au bout de 21 760 jours, partis d'une conjonction, les deux astres se retrouvent encore en conjonction *et sur leurs orbites dans une position voisine de la première.* Sur une telle période certaines inégalités ne se compensent pas : d'où une inégalité *séculaire.* Plus exactement l'inégalité est *à très longue période*, puisque les moyens mouvements sont voisins d'être commensurables, mais ne le sont pas exactement. La période compensant ces inégalités est de 2 648 ans environ; en effet dans la période de 21760 jours le lieu, de la conjonction se déplace de 8° 6′, angle contenu 44 fois dans la circonférence.

3° — Les relations de commensurabilité interviennent au premier chef dans la théorie des petites planètes dont l'anneau se trouve entre Mars et Jupiter (§ 207). Cette dernière par sa masse joue un rôle considérable.

Le moyen mouvement diurne de Jupiter est voisin de 300″.

Or pour les nombres des petites planètes rangées par ordre croissant de leurs moyens mouvements, on trouve deux minimums principaux pour 600 et 900 secondes. Les *lacunes* dans l'anneau d'astéroïdes répondent donc aux régions pour lesquelles le moyen mouvement est double ou triple de celui de Jupiter. On constate des lacunes moins importantes au voisinage de 450, 750 et 1 050 secondes (commensurabilités, 3, 5, 7 demies).

Assurément il résulte de cette commensurabilité des inégalités à longues périodes; mais les astronomes discutent à savoir si les planètes doivent tendre à quitter les régions commensurables sous l'influence progressive des perturbations, ou si les lacunes sont dues à des causes cosmogoniques, originales.

De toute manière l'influence de Jupiter n'est pas niable ; mais on ne sait pas encore bien nettement si la commensurabilité crée la lacune, ou au contraire si la commensurabilité est une raison de stabilité

moyenne pour l'orbite. Je signale ces divergences d'opinions pour montrer à quel point ces questions de stabilité ou d'instabilité à longue échéance, comme résultat de perturbations instantanées petites, sont vagues et mal définies.

255. **Perturbation normale au plan de l'orbite.**

1° — PERTURBATION INSTANTANÉE.

Le plan de référence est xOy.

Un astre (la Lune par exemple) décrit une ellipse *troublée* dans le sens direct TMU ; la ligne des nœuds de son plan orbital est actuellement l'axe Oy, T est le nœud ascendant. Le plan orbital a l'inclinaison i sur le plan de référence xOy. Quand l'astre est en M, on fait agir un

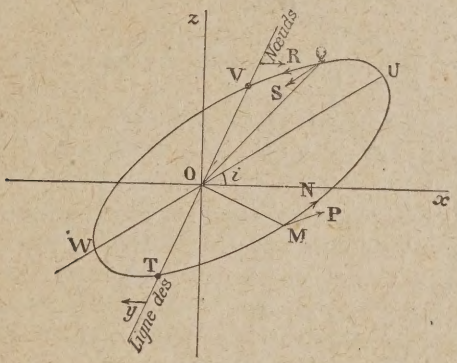


Fig. 199.

instant une force normale au plan orbital et dirigée vers le plan xOy. On demande quel est le déplacement instantané du plan orbital.

Au lieu de parcourir l'arc MN, l'astre parcourt l'arc MP. Donc le plan orbital pivote autour de OM et vient en OMP : il coupe donc xOy suivant une droite OT′ (non représentée) qui est dans le quadrant $-xOy$. *Il y a rétrogradation de la ligne des nœuds et diminution de l'inclinaison.*

Reprenons notre raisonnement pour la position Q de l'astre. Le plan orbital pivote autour de OQ et vient passer par QS : *il y a encore rétrogradation de la ligne des nœuds, mais augmentation de l'inclinaison.*

Ainsi, où qu'elle agisse, la force normale au plan orbital et *dirigée vers le plan de référence*, fait rétrograder les nœuds (les déplace en sens opposé au mouvement de l'astre sur son orbite).

Elle diminue l'inclinaison quand elle agit dans les quadrants qui suivent le passage par les nœuds ; elle augmente l'inclinaison quand elle agit dans les quadrants qui précèdent le passage par les nœuds.

Le lecteur remarquera que si l'inclinaison est petite, la moindre variation de sa valeur entraîne un déplacement considérable de la ligne des

nœuds. Ainsi outre que la variation de l'inclinaison ne suit pas les mêmes lois que le mouvement des nœuds, elle est généralement d'un ordre de grandeur inférieur.

2° — Perturbations continues.

Vont intervenir les considérations des §§ 252 et 254.

La figure 200 représente le plan xOy dans lequel nous supposons

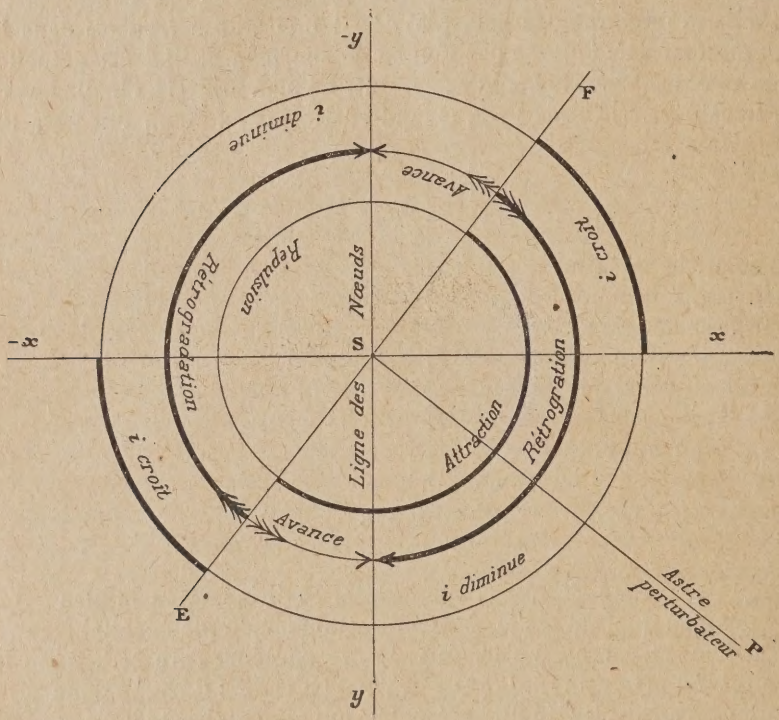


Fig. 200.

l'astre perturbateur P, loin sur la droite SP. En raison du § 252, il y a attraction quand l'astre A se projette d'un côté de la droite ESF, répulsion quand il se projette de l'autre côté. De cette action, nous n'avons pour l'instant à considérer (§ 254) que la composante normale au plan orbital : il est facile de voir quand elle est dirigée vers le plan xOy (les nœuds rétrogradent) ou en sens opposé (les nœuds avancent). La figure 194 montre que le mouvement des nœuds est une oscillation dont la période est moitié de la période de l'astre A (dans le cas de la Lune, la période serait inférieure à 15 jours). Mais l'oscillation est doublée d'un mouvement continu : la rétrogradation l'emporte où que soit l'astre perturbateur.

Pour représenter analytiquement le phénomène, il faut écrire :

$$L = L_0 - pt + q\left(\cos 4\pi \frac{t}{\tau} - \mu\right);$$

τ est la période de l'astre A; p est une constante *essentiellement positive*, mais dont la valeur dépend de la configuration du système.

Par exemple, si l'astre perturbateur est dans la ligne des nœuds, p s'annule (ainsi que q, mais peu importe pour ce qui nous occupe).

Pour savoir ce que devient l'inclinaison, on appliquera la règle du 1°, en remarquant que les changements de signe ont lieu sur la normale à la ligne des nœuds et sur la normale ESF à la direction de l'astre perturbateur.

Pour représenter analytiquement le phénomène, il faut écrire :

$$i = i_0 + rt + s\cos\left(4\pi \frac{t}{\tau} - \nu\right).$$

C'est la même formule que plus haut. Mais tandis que p est positif quelle que soit la position de l'astre perturbarteur, r prend successivement des valeurs positives et négatives égales, quand la configuration du système varie. Dans la configuration représentée, r est négatif; r serait positif si SP se trouvait dans les quadrants $-y\mathrm{S}x$ ou $-x\mathrm{S}y$.

3° — Supposons l'astre perturbateur P immobile.

Pour chaque révolution de l'astre A, nous venons de montrer qu'il existe deux oscillations de la ligne des nœuds et de l'inclinaison (oscillations à courte période) : elles ne se compensent ni l'une ni l'autre.

Les nœuds *rétrogradent au total*, l'inclinaison *diminue au total* pour la configuration représentée.

Mais abandonnons le système à lui-même un temps suffisant; *nous allons trouver des phénomènes ayant pour période la moitié de la période* T *de la révolution de la ligne des nœuds* (oscillation à longue période).

En effet les nœuds rétrogradent; donc la configuration du système se modifie. Les paramètres p, q, r, s, sont des fonctions de cette configuration.

Laissons de côté les termes en q et en s qui sont à courte période.

Il est facile de voir que les termes restant se mettent sous la forme :

$$L = L_0 - p_0 t + p_1 \cos\left(4\pi \frac{t}{\tau} - \rho\right),$$

$$i = i_0 + r_0 \cos\left(4\pi \frac{t}{T} - \sigma\right).$$

En effet à partir de la configuration représentée pour laquelle l'inclinaison décroît au total, il arrivera un moment où, du fait de la rétrogradation des nœuds, la ligne des nœuds passera sur SP; après quoi pour chaque révolution de l'astre A, l'inclinaison augmentera au

total. On vérifiera que la compensation est parfaite quand la ligne des nœuds a tourné de 180°.

Les phénomènes sont différents pour la rétrogradation : il n'y a pas compensation. Assurément pour chaque période de l'astre A, la rétrogradation non compensée dépend de la configuration du système ; mais elle n'en dépend pas uniquement par un terme périodique. Nous avons la superposition d'un phénomène séculaire et d'un phénomène dont la période est moitié de T.

Les phénomènes sont identiques quand, au lieu de supposer l'astre perturbateur immobile et la ligne des nœuds animée d'un mouvement de rotation rapide, nous supposerons l'astre perturbateur animé de ce mouvement et la ligne des nœuds peu variable. Nous retrouverons ces phénomènes au § 280 où nous étudions les variations de l'inclinaison de l'orbite lunaire et la rétrogradation de ses nœuds sous l'influence perturbatrice du Soleil. Il s'agit là des phénomènes que nous appelons *à longue période* ; leur période (de 173 jours) est moitié du temps qui s'écoule entre deux passages consécutifs du Soleil au nœud ascendant (ou descendant) de la Lune. Les phénomènes *à courte période* (que nous négligerons) ont une période voisine de 14 jours, soit 12 fois plus courte. Certes ils interviennent dans la construction des Tables de la Lune ; mais ils n'ont été découverts que par l'analyse, tandis que les autres l'ont été par l'observation, tant ils sont grands et faciles à démêler.

Si nous nous proposons seulement de calculer le terme $p_0 t$ (terme séculaire), nous pouvons distribuer la masse de l'astre perturbateur sur un anneau. Il devient évident que l'inclinaison moyenne est invariable, tandis que les nœuds rétrogradent en moyenne d'une manière uniforme.

256. Calcul de la rétrogradation séculaire des nœuds.

1° — Soit P l'astre perturbateur dont la trajectoire est considérée comme circulaire et située dans le plan $x\mathrm{S}y$. Le centre de la trajectoire est en S, centre du Soleil.

Soit T l'astre troublé (la Terre) ; le plan de son orbite (que nous prendrons circulaire) coupe le plan $x\mathrm{S}y$ suivant Sy.

La force exercée sur T par P dont la masse est M (la masse du Soleil est prise pour unité), est dirigée suivant TP et égale à $\mathrm{M} : \rho^2$ (au facteur G près). La force exercée par P sur le Soleil est $\mathrm{M} : \mathrm{D}^2$; elle est dirigée suivant SP.

Décomposons la première de ces forces en deux composantes.

L'une dirigée suivant ST dans le plan de l'orbite de T, ne peut changer le plan de l'orbite. L'autre est dirigée suivant SP.

On trouve immédiatement que son intensité est $\mathrm{MD} : \rho^3$.

En définitive la perturbation dirigée suivant SP, a pour valeur (§ 252) :

$$\mathrm{F} = \mathrm{M}\left(\frac{\mathrm{D}}{\rho^3} - \frac{1}{\mathrm{D}^2}\right).$$

Dans le temps t, sur sa trajectoire non troublée, l'astre T décrit l'élément $\overline{Tp}$ normal à ST. Dans le même temps, sous l'influence de la force perturbatrice, il décrit l'élément $\overline{pq}$.

Bref la trajectoire résultante devient Tq.

Prolongeons Tq jusqu'au point n qui est sa trace ϖSy; pq étant parallèle à SP, la droite nN l'est aussi.

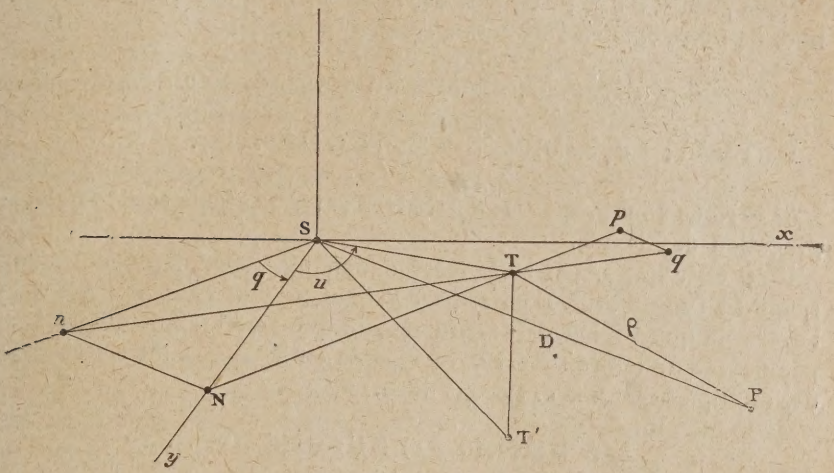


Fig. 201.

On forme ainsi deux triangles semblables :

$$\frac{\overline{Tp}}{\overline{pq}} = \frac{\overline{TN}}{\overline{Nn}}.$$

L'angle dont a tourné la ligne des nœuds dans le temps t, est NS$n = q$; il s'agit de l'évaluer.

2° — Puisque la trajectoire de T est circulaire, l'angle en T est droit. Posons NST $= u$; on a donc :

$$\overline{TN} = \overline{SN} \cdot \sin u, \qquad \frac{\overline{Tp}}{\overline{pq}} = \frac{\overline{SN}}{\overline{Nn}} \cdot \sin u.$$

Posons NSP $=$ Tv. La droite Nn étant parallèle à SP et l'angle NSn étant petit, on a :

$$q = \frac{\overline{Nn}}{\overline{SN}} \cdot \sin v = \frac{\overline{pq}}{\overline{Tp}} \cdot \sin u \cdot \sin v.$$

$\overline{pq}$ est l'espace parcouru par le mobile sous l'influence de la force F pendant le temps t; c'est donc Ft^2 : 2. Dérivant par rapport au temps *à l'intérieur du petit instant considéré*, on a donc :

$$\frac{dq}{dt} = \frac{Ft}{\overline{Tp}} \sin u \cdot \sin v.$$

Soit ω la vitesse angulaire du mobile T sur sa trajectoire. On a :

$$\omega = \frac{du}{dt}, \qquad \overline{Tp} = R\omega t, \qquad dq = \frac{F}{\omega R} dt \,.\, \sin u \,.\, \sin v.$$

$$dq = \frac{F}{\omega^2 R} du \,.\, \sin u \,.\, \sin v.$$

Nous posons $\overline{ST} = R$. Or $\omega^2 R$ est la force centripète qui pour l'équilibre doit être égale à l'attraction solaire mobile T :

$$\omega^2 R = \frac{1}{R^2}, \qquad dq = FR^2 du \,.\, \sin u \,.\, \sin v.$$

D'où enfin : $$dq = MR^2 \left(\frac{D}{\rho^3} - \frac{1}{D^2} \right) du \,.\, \sin u \,.\, \sin v.$$

3° — Nous nous proposons de trouver le terme séculaire de la rétrogradation des nœuds.

Il est clair que ρ, par suite les fonctions de ρ sont périodiques par rapport à l'angle TSP. D'autre part l'angle des orbites est très petit, de l'ordre de quelques degrés; d'où résulte que l'angle TSP diffère très peu de $u - v$; donc $1 : \rho^3$ est développable en série suivant les cosinus des multiples que $u - v$. Posons donc.

$$\frac{1}{\rho^3} = A + B \cos(u - v) + C \cos 2(u - v) + \ldots.$$

On a : $$2 \sin u \,.\, \sin v = \cos(u - v) - \cos(u + v).$$

Posons $$v = pu.$$

Dans l'intégration, nous aurons des termes périodiques qui donneront des inégalités périodiques négligeables.

Le terme non périodique est fourni par le terme en $\cos^2 (u - v)$.

Après intégration il devient :

$$q = \frac{MR^2 DB}{4} u$$

On trouve aisément : $$BDR^2 = 3 \left(\frac{R}{D} \right)^3 + \frac{45}{8} \left(\frac{R}{D} \right)^5.$$

D'où : $$q = \frac{M}{4} \left[3 \left(\frac{R}{D} \right)^3 + \frac{45}{8} \left(\frac{R}{D} \right)^5 \right] u.$$

4° — Appliquons à la rétrogradation des nœuds de la Terre sur l'orbite de Jupiter.

On a : $M = 1 : 1\,047$, $R : D = 1 : 5{,}20 = 0{,}192$.

Pour un tour de la Terre :

$$u = 360, \qquad u : 4 = 90° = 324\,000'', \qquad q = 6'',58.$$

Tel est le déplacement annuel de la ligne des nœuds sous l'influence de Jupiter.

5° — Pour trouver l'action d'un astre pour lequel D < R, il faut utiliser un développement en série suivant les puissances croissantes de D : R.

On trouve aisément (§ 253).

$$BR^2D = 3\left(\frac{D}{R}\right)^2 + \frac{45}{8}\left(\frac{D}{R}\right)^4.$$

D'où :

$$q = \frac{M}{4}\left[3\left(\frac{D}{R}\right)^2 + \frac{45}{8}\left(\frac{D}{R}\right)^4\right]u.$$

Pour Vénus D : R = 0,656 : le développement est inutilisable ; il faut calculer le coefficient B par des quadratures (§ 253).

257. Perturbation tangentielle instantanée.

La perturbation précédemment étudiée modifiait seulement le plan

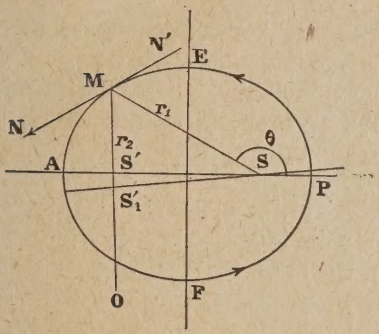


Fig. 202.

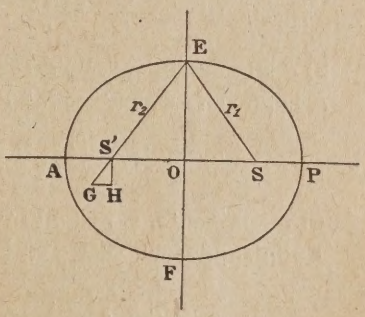


Fig. 203.

orbital. Passons à l'action des forces qui agissent dans le plan de l'orbite ; commençons par l'action de la *force tangentielle* à la trajectoire.

1° — Une impulsion tangentielle augmente ou diminue la vitesse *actuelle* de l'astre A sans changer sa direction. Or la vitesse v, la distance r à l'astre principal S, le demi-grand axe a sont liés par l'équation (§ 163) :

$$v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

Donc tout accroissement de v augmente a, par suite augmente la période (en vertu de la troisième loi de Képler).

Toute diminution de v diminue a, par suite diminue la période.

La distance r à l'un des foyers de l'ellipse est donnée ; appelons-la r_1. La distance à l'autre foyer S' est r_2. On a :

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

D'autre part la tangente à l'ellipse restant invariable, le foyer S'_1 de la nouvelle ellipse se trouve sur MS'. Donc si on augmente brusquement

la vitesse, le foyer passe de S′ et S'_1 : la ligne des apsides tourne autour de S.

On vérifiera qu'à une augmentation de la vitesse correspond une rotation de la ligne des apsides dans le sens direct (sens de rotation du mobile), si le mobile est dans la moitié PEA de la trajectoire.

La ligne des apsides rétrograde, si le mobile est dans la moitié AFP de la trajectoire.

La conclusion est inverse si la vitesse est brusquement diminuée.

2° — Cherchons la variation de l'excentricité. Montrons qu'une force *accélératrice* tangentielle accroît l'excentricité dans la moitié FPE du parcours, la diminue dans la moitié EAF, ne la modifie pas en E et en F.

Au périhélie, l'excentricité a pour expression :

$$e = \frac{2a - 2r_1}{2a} = 1 - \frac{r_1}{a}.$$

Si a augmente, r_1 restant invariable, e augmente.

A l'aphélie, l'excentricité a pour expression :

$$e = \frac{r_1 - r_2}{2a} = \frac{2r_1 - 2a}{2a} = \frac{r_1}{a} - 1.$$

Si a augmente, r_1 restant invariable, e diminue.

Enfin supposons l'astre en E (ou F). On a (fig. 197) :

$$e = \frac{\overline{SS'}}{2a}, \qquad e' = \frac{\overline{SS'} + \overline{GH}}{2a + 2\Delta a};$$

$$\overline{S'G} = 2\Delta a, \qquad \frac{\overline{GH}}{\overline{S'G}} = \frac{\overline{S'O}}{\overline{S'E}} = \frac{\overline{SS'}}{2a}, \qquad \overline{GH} = 2e\Delta a;$$

$$e' = e\frac{2a + 2\Delta a}{2a + 2\Delta a} = e.$$

258. Perturbation tangentielle continue.

1° — Milieu résistant.

L'effet de la résistance d'un milieu très rare sur le mouvement d'une planète est déjà traité au § 170. Le grand axe de l'orbite diminue indéfiniment; il en est de même de la période. Nous avons expliqué le paradoxe de l'augmentation de la vitesse linéaire. Assurément l'effet *instantané* du milieu résistant est de diminuer la vitesse *actuelle* du mobile sur l'ellipse non troublée qu'il décrirait en l'absence de ce milieu; mais cette diminution de vitesse modifie la trajectoire d'équilibre. Sur cette nouvelle trajectoire la vitesse linéaire est plus grande que sur l'ancienne.

Pour fixer les idées, supposons que la résistance du milieu ne dure qu'un instant et ramène presque à zéro la vitesse actuelle sur la trajectoire supposée circulaire. Le mobile va décrire une ellipse très allongée quasi rectiligne; il passera très près de l'astre attirant; il reviendra à

un point de départ en un temps *plus court que précédemment*, bien qu'il y revienne avec une vitesse quasi nulle.

En effet d'après le 2° du § 160, le temps qu'il mettra à revenir à son point de départ est $4\tau = T : \sqrt{2}$. La durée de la révolution a été diminuée dans le rapport de 1,41 à 1, par l'effet d'une force instantanée qui a quasi-ment annulé la vitesse. Évidemment le résultat est singulier, mais son explication n'a rien de difficile.

La ligne des apsides oscillera autour d'une valeur moyenne; la période est la même que celle de la révolution de la planète. Enfin

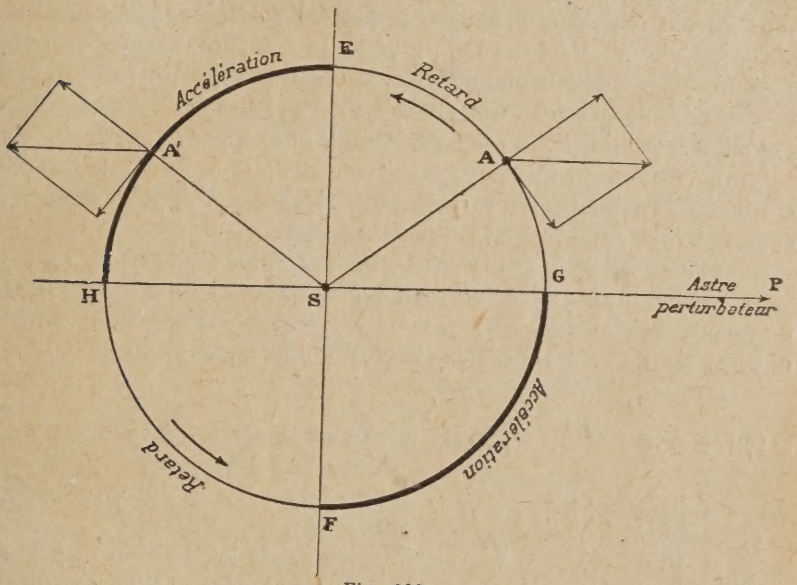


Fig. 204.

l'excentricité oscillera autour d'une valeur régulièrement décroissante. En effet la force est retardatrice et fonction croissante de la vitesse; d'autre part e diminue dans l'arc FPE, précisément où, en vertu des lois du mouvement elliptique, la vitesse a ses plus grandes valeurs, par conséquent agit davantage.

2° — ASTRE PERTURBATEUR.

Supposons circulaire la trajectoire de l'astre A et l'astre perturbateur P loin sur la ligne SP. La force tangentielle est retardatrice le long de l'arc où la circonférence est en trait mince, elle est accélératrice le long de l'arc où la circonférence est en trait épais. Elle s'annule en G et en H, parce que la composante tangentielle de la force est nulle; elle s'annule en E et en F parce que l'action perturbatrice étant la même sur l'astre principal S et sur l'astre A, la différence (qui mesure la perturbation) est nulle.

Si l'astre perturbateur est très éloigné, la compensation s'opère pour une période : la durée de la révolution reste invariable malgré les oscillations de la vitesse.

Cette exacte compensation ne se produit plus quand les trajectoires de A ou de P sont elliptiques; du moins, si elle se produit, ce n'est qu'au bout d'un nombre plus ou moins grand de révolutions des corps A et P.

Par exemple, posons que l'orbite de A est circulaire, que l'orbite de P est elliptique, enfin qu'au moment où A part de G, P est à sa plus grande distance de S : la force perturbatrice croît donc. Lorsque les deux astres reviennent en conjonction, il y a excès du côté de l'accélération; la vitesse de A est plus grande qu'au début. La compensation n'existe donc pas pour une période de A. Mais après un nombre suffisant de périodes, l'astre P recommencera à s'éloigner; l'excès de vitesse acquise par A diminuera : la compensation finira par s'effectuer.

A moins pourtant que nous ne soyons dans le cas du § 254, où les moyens mouvements sont à très peu près entre eux dans le rapport de deux nombres entiers (sont commensurables).

C'est l'histoire de la grande inégalité de Jupiter et de Saturne.

En comparant les observations faites en divers siècles, on a observé un ralentissement angulaire dans le moyen mouvement de Saturne et une accélération angulaire dans le moyen mouvement de Jupiter.

259. **Perturbation normale (force normale à la trajectoire).** — Elle ne modifie pas la vitesse, par suite laisse le grand axe inaltéré (fig. 205).

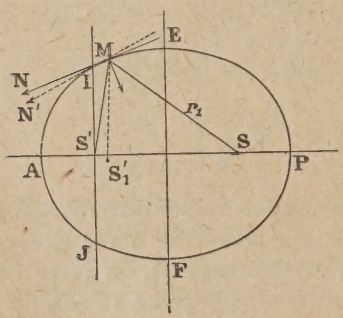


Fig. 205.

Supposons-la dirigée vers l'intérieur de l'orbite. Elle modifie la direction de la vitesse, par suite de la droite qui contient le second foyer S_1'. Connaissant la direction de cette droite, il faut, pour obtenir le nouveau foyer, mener une circonférence avec M comme centre et $\overline{MS'} = r_2$ comme rayon.

D'où résulte que la direction de la ligne des apsides reste inaltérée quand le mobile est en I et en J, puisque IS' et JS' sont normales sur AP. Le long de l'arc JPI une perturbation dirigée vers l'intérieur de l'orbite déplace le ligne des apsides dans le sens direct; le long de l'arc IAJ, la ligne des apsides rétrograde.

On vérifie aisément qu'une perturbation dirigée vers l'intérieur de l'orbite diminue l'excentricité quand le mobile est sur l'arc PEA, l'augmente quand le mobile est sur l'arc AFP.

Les conclusions sont inverses si la perturbation normale est dirigée vers l'extérieur de l'orbite.

260. **Effet moyen d'une force radiale.**

1° — Il est clair que l'effet moyen d'un astre perturbateur P est un accroissement apparent de la masse de l'astre principal S, si l'astre P tourne autour de S à l'*intérieur* de l'orbite de A. Il produit une diminution de la période moyenne et une réduction des dimensions de l'orbite.

Au contraire l'effet moyen d'un astre perturbateur P dont l'orbite est *extérieure* à l'orbite de A, est une diminution apparente de la masse de l'astre principal S. Il produit un accroissement de la période moyenne et une dilatation de l'orbite.

Ainsi l'année moyenne est déterminée non seulement par l'attraction solaire, mais aussi par celle des planètes inférieures (qui tendent à la diminuer), et par celle des planètes supérieures (qui tendent à l'augmenter).

2° — Par rapport à la Terre supposée fixe, le Soleil décrit une orbite extérieure à celle de la Lune. Donc son action perturbatrice moyenne est une dilatation de l'orbite de la Lune et un allongement de la durée de sa révolution. Ici la démonstration est immédiate. A mesure que le Soleil s'approche de la Terre, son action augmente; elle est maximum au périgée (au voisinage du 1er janvier), minimum à l'apogée (vers le 1er juillet). Effectivement une lunaison de janvier est plus longue qu'une lunaison de juillet. On tient compte de cet effet au moyen d'une inégalité connue sous le nom d'*équation annuelle*.

3° — On explique de même l'accélération séculaire du mouvement moyen de la Lune par la déformation *à longue période* de l'orbite terrestre. L'excentricité de cette orbite est toujours allée en diminuant, depuis les siècles les plus reculés. C'est une variation séculaire qui, du reste, doit être périodique mais à très longue période.

Il résulte que cette déformation que la compensation ne s'effectue pas exactement, au bout d'un petit nombre de lunaisons, entre les raccourcissements et les allongements : d'où une variation séculaire de la période moyenne de la Lune.

L'intérêt de ce phénomène réside dans le fait suivant. Les planètes n'ont aucune action *directe* appréciable sur les mouvements lunaires rapportés à la Terre. Mais elles en ont une sur la forme de l'orbite terrestre; *par contre-coup* elles agissent sur le mouvement lunaire.

261. **Stabilité du système solaire.**

1° — Tel que nous le voyons, le système solaire est composé de planètes de masses si petites rapport à celle du Soleil que leur somme n'en vaut pas la sept-centième partie; les excentricités des orbites sont très faibles ainsi que les obliquités des plans orbitaux sur l'écliptique.

Ceci posé, de grandes modifications sont-elles possibles?

Le sens même de cette question est précisé par la réponse qui affirme la *stabilité du système solaire.*

Soit m les masses relatives des astres formant notre système, par rapport à celle du Soleil prise pour unité; soit e les excentricités, a les grands axes.

Voici d'abord la proposition fondamentale de Lagrange.

En ne tenant compte que des premières et des secondes puissances des masses, mais en tenant compte de toutes puissances des excentricités et des inclinaisons, les grands axes des orbites n'éprouveront que des variations périodiques se compensant au bout d'un temps relativement court. Les grands axes des orbites sont donc invariables *en moyenne.*

En regardant les excentricités et les inclinaisons comme des quantités petites dont il est légitime de négliger les carrés et les produits, les orbites resteront presque circulaires et peu inclinées les unes sur les autres.

Plus précisément voici l'énoncé des théorèmes de Lagrange.

Le produit $\sum m\sqrt{a}\,e^2$, est constant.

Comme actuellement sa valeur est petite (vu la petitesse des excentricités actuelles), celles-ci ne peuvent croître indéfiniment.

Le produit $\sum m\sqrt{a}\,\mathrm{tg}^2 i$, est constant.

Comme actuellement les inclinaisons sont toutes petites, aucune d'elles ne peut croître jusqu'à des valeurs notables.

Lagrange fait observer que si les excentricités des orbites et les tangentes des inclinaisons qui appartiennent à des masses très grandes, sont petites à un instant donné, elles le seront toujours. Mais celles qui appartiennent à des masses très petites, peuvent croître d'une manière considérable, les sommes restant constantes, puisque la compensation peut s'effectuer par une variation très petite des excentricités ou des inclinaisons des planètes dont les masses sont grandes.

En définitive pour savoir ce qu'il en est, on est forcé de recourir aux équations différentielles qui contiennent les perturbations : ce qui ne laisse pas de diminuer beaucoup l'intérêt de ces propositions en apparence générales, mais ce qui éclaire leur nature et en supprime le mystère. En particulier elles ne s'appliquent pas aux petites planètes.

2° — Le lecteur comprend maintenant la nature de *stabilité* des orbites des grosses planètes. Des variations séculaires existent pour certains éléments. Par exemple, l'écliptique se déplace par rapport aux étoiles. Bien que l'expérience ne puisse montrer la périodicité du phénomène, nous sommes assurés : d'abord qu'il s'agit affectivement d'un phénomène périodique, ensuite que son amplitude est petite.

Le grand axe est de tous les éléments des orbites planétaires celui dont les variations séculaires sont les plus importantes, non seulement parce qu'il influe d'une manière évidente sur la forme de l'orbite, mais encore parce qu'il détermine la période ou, ce qui revient au même, le moyen

mouvement. La moindre altération du grand axe agit *d'une manière exagérée* sur la durée de la révolution, comme il résulte de la troisième loi de Képler. On voit tout l'intérêt que présente la proposition que *les grands axes ne sont soumis à aucune inégalité séculaire*, les inégalités périodiques se compensant après un temps plus ou moins long. Cela revient à démontrer que les durées de révolution sont constantes *en moyenne*, ou qu'il est légitime de chercher une valeur moyenne de la durée de révolution.

Appliquons à la Terre : on trouvera la même durée moyenne de l'année sidérale en prenant la moyenne de mille révolutions ou d'un million.

3° — Donnons une idée de la manière dont on démontre ces théorèmes fameux. Admettons la première proposition; tirons en les deux autres.

Pour simplifier l'écriture, appliquons le théorème des aires (§ 172) aux seuls mouvements des astres autour du Soleil supposé fixe; la généralisation ne présente aucune difficulté. En vertu des équations du § 163, l'aire décrite dans le temps dt est proportionnelle à $C dt$; C lui-même est proportionnel à $\sqrt{a(1-e^2)}$.

Multiplions par la masse correspondante; projetons sur l'écliptique; écrivons que les aires se conservent. Il vient la relation :

$$\Sigma m \sqrt{a(1-e^2)} \cos i = \text{Constante},$$

ou encore :

$$\Sigma m \sqrt{\frac{a(1-e^2)}{1+\operatorname{tg}^2 i}} = \text{Constante}.$$

Négligeons les quantités de l'ordre e^4 et $e^2 i^2$; il vient :

$$\Sigma m \sqrt{a} - \Sigma \frac{1}{2} m \sqrt{a} (e^2 + \operatorname{tg}^2 i) = \text{Constante}.$$

Posons qu'en moyenne le premier terme du premier membre est constant : c'est la première proposition de Lagrange. On a donc :

$$\Sigma m \sqrt{a} (e^2 + \operatorname{tg}^2 i) = \text{Constante}.$$

Or il se trouve qu'à l'approximation posée, les variations séculaires des excentricités et des inclinaisons sont données par des équations différentielles indépendantes : c'est dire que les variations des excentricités sont les mêmes que si les orbites étaient dans un même plan; les variations des inclinaisons sont les mêmes que si ces orbites étaient circulaires. En y posant tour à tour les inclinaisons nulles et les excentricités nulles, l'équation précédente donne deux relations indépendantes :

$$\Sigma m \sqrt{a}\, e^2 = \text{Constante}, \qquad \Sigma m \sqrt{a} \operatorname{tg}^2 i = \text{constante},$$

qui sont celles mêmes de Lagrange.

Évidemment ce qui précède n'est pas une démonstration; mais le

lecteur sait maintenant d'où sortent ces propositions en apparence extraordinaires; elles ne sont plus pour lui un simple renseignement; elles n'ont plus rien de sorcier. C'est précisément pourquoi ces explications qui ne visent pas à la rigueur, sont le désespoir des astronomes et des savants en général : elles débinent leurs petits trucs; elles montrent que leur « savante » analyse cache des remarques intéressantes, je n'en disconviens pas, mais qui sont très simples. Que de gens se sont gargarisés avec la *stabilité de notre univers*, sans même se douter de la nature des preuves de cette stabilité, et des conditions exigées pour que nous puissions de l'état présent conclure l'état futur! Je le répète pour la millième fois, la science ne crée rien; elle déroule un sorite. Elle rend ce qu'on a préalablement admis implicitement ou explicitement.

Au reste si mon lecteur est curieux, maintenant qu'il sait *de quelle nature* sont les démonstrations, qui l'empêche de lire Lagrange? Sa tâche est simplifiée puisqu'il comprend maintenant de quoi il s'agit.

262. **Calcul des perturbations.**

1° — Me plaçant au point de vue qui vient d'être précisé, je vais donner au lecteur une idée de la manière dont on a calculé les inégalités. C'est le principe même des méthodes de Clairaut, d'Alembert,... que je vais indiquer.

Posons que tout se passe dans un plan.

Les équations de la Dynamique sont :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = Y.$$

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta.$$

Il n'y a aucune difficulté à les transformer en coordonnées polaires (voir *Mécanique Rationnelle*).

Admettons l'existence d'un potentiel $V(r, \theta)$. On trouve :

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{\partial V}{\partial r}, \qquad \frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{\partial V}{\partial \theta}. \tag{1}$$

Or $dV : dr$ est la force dirigée suivant le rayon vecteur, $dV : rd\theta$ est la force normalement au rayon vecteur. Posons donc :

$$r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{M}{r^2} + \Phi, \qquad \frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = r\Pi; \tag{2}$$

M est la masse du corps principal; Φ et Π sont des fonctions des coordonnées r et θ. Intégrons ces équations (1).

2° — Dans le cas où la force normale au rayon vecteur est nulle, nous avons (§ 163) :

$$r^2d\theta = Cdt.$$

Nous avons maintenant :

$$r^2d\theta = C\sqrt{1+2\rho}\,dt, \tag{3}$$

en posant :

$$\int \Pi r^3 d\theta = C^2\rho. \tag{4}$$

En effet comparant (2) et (3), différentiant (4), on trouve :

$$\frac{d}{dt}(C\sqrt{1+2\rho}) = \Pi r, \qquad \Pi r^3 = C^2 \frac{d\rho}{d\theta}.$$

D'où :

$$\frac{C}{\sqrt{1+2\rho}} \frac{d\rho}{dt} = \frac{C}{\sqrt{1+2\rho}} \frac{d\rho}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \Pi r.$$

Substituant $d\rho : d\theta$ et $d\theta : dt$ leurs valeurs, on retombe sur une identité.

3° — Transformons la première équation (1).

Posons :

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}.$$

Utilisons l'équation (3) pour éliminer le temps.

Des calculs faciles donnent :

$$\left(\frac{M}{r^2} + \Phi + \frac{\Pi}{r} \frac{dr}{d\theta}\right) : (1+2\rho) = \frac{C^2}{r^3} - \frac{C^2}{r^4} \frac{d^2r}{d\theta^2} + \frac{2C^2}{r^5}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2.$$

Posons :

$$(1+\Omega)(1+2\rho) = 1 + \frac{\Phi r^2}{M} + \frac{\pi r}{M} \frac{dr}{d\theta}, \qquad (5)$$

$$1 - s = \frac{C^2}{Mr}.$$

Tous calculs faits, il reste :

$$\frac{d^2s}{d\theta^2} + s + \Omega = 0. \qquad (6)$$

Les deux derniers termes du second nombre de l'équation (5) contiennent la masse principale au dénominateur; or la somme des masses de toutes les planètes n'est pas la sept centième de celle du Soleil. Comme Ω et Π contiennent ces masses en facteurs, le second membre de (5) est presque égal à l'unité; ρ et Ω sont donc très petits : on les développe en séries rapidement convergentes.

Posons :

$$\Omega = a \cos n\theta. \qquad (7)$$

L'intégrale de l'équation (6) est, en remplaçant s par sa valeur :

$$\frac{C^2}{Mr} = 1 - g \sin\theta - h \cos\theta - \frac{a}{n^2 - 1} \cos n\theta.$$

C'est l'équation de l'orbite elliptique *troublée* (§ 250).

Les trois premiers termes du second nombre sont celles d'une ellipse dont $C^2 : M$ est le *paramètre* ou l'ordonnée du foyer (§ 160) :

$$a(1 - e^2).$$

Le dernier terme exprime le changement dû à la force perturbatrice.

On peut remplacer Ω par une série; l'intégration se fait terme à terme, l'équation différentielle étant linéaire.

4° — Pour simplifier l'écriture, posons $M = 1$, $C = 1$.

La quantité ρ étant petite, nous avons :

$$dt = d\theta \cdot r^2(1 - \rho).$$

Puisque nous prenons le paramètre de l'ellipse égal à 1, l'ellipse troublée se met sous la forme :

$$\frac{1}{r} = 1 - e\cos p\theta + Z,$$

d'où :
$$r^2 = 1 + 2e\cos p\theta - 2Z - 6eZ\cos p\theta,$$

$$dt : d\theta = 1 + 2e\cos p\theta - 2Z - 6eZ\cos p\theta - \rho - 2e\rho\cos p\theta.$$

La correction est donc :

$$dt = -(2Z + \rho)d\theta - 2e(3Z + \rho)\cos p\theta \cdot d\theta.$$

5° — Le calcul des perturbations se trouve donc ramené à la recherche du développement en série de la fonction Ω; ce qui est long, mais ne présente aucune difficulté particulière si l'on connaît les orbites des corps perturbateurs.

Nous rencontrons ici notre éternel cercle vicieux apparent : comment introduire ces orbites puisque précisément il s'agit de les calculer?

La réponse est toujours la même : dans le calcul des perturbations il suffit d'introduire des orbites approchées.

Le développement en série de la fonction perturbatrice est le principal souci des géomètres astronomes. Il s'agit d'obtenir les séries les plus convergentes de manière à diminuer le nombre des termes à calculer.

Nous avons défini trois espèces d'angles servant à fixer les positions d'une planète (§ 84) : l'anomalie vraie, l'anomalie moyenne (qui est le temps à un facteur constant près), l'anomalie excentrique. On a essayé des développements suivant les cosinus et sinus des multiples de l'un ou l'autre de ces angles.

Il semble d'abord plus naturel d'utiliser des développements où le temps intervienne comme argument *explicite* des lignes trigonométriques; mais ils convergent lentement. Assurément quand on développe en fonction des anomalies vraies ou des anomalies excentriques des astres en présence, on n'a pas immédiatement le mouvement en fonction du temps : peu importe si les développements qui donnent l'inconnue en fonction de la variable auxiliaire, et la variable auxiliaire en fonction du temps, convergent tous deux rapidement.

Je reviens plus loin (§ 294) sur le problème dit *des trois corps*.

CHAPITRE VII

COMÈTES. ÉTOILES FILANTES. BOLIDES

263. **Nature des comètes.**

Une comète se présente généralement comme un point brillant (*noyau*) entouré d'une nébulosité de formes diverses (*queue*). La partie de la nébulosité voisine du noyau s'appelle *chevelure*; le mot *comète* signifie *astre chevelu*. Parfois il y a plusieurs queues; parfois la queue est absente; parfois même il n'y a pas de chevelure. La queue s'étend parfois fort loin, à plusieurs dizaines de degrés du noyau; ce qui, vu la distance, représente des dimensions formidables.

La queue et la chevelure sont transparentes au point qu'à travers elles on peut voir des étoiles de faible éclat; c'est donc une vapeur de densité petite. Certaines comètes apparaissent brusquement; la variation brusque de luminosité n'est pas due à la variation de distance, par suite il faut admettre qu'une comète peut être le siège de modifications physiques et chimiques, rapides et profondes.

L'affaiblissement d'éclat que présentent les comètes qui s'éloignent de la Terre, prouve qu'une partie de leur lumière provient du Soleil, ou, ce qui revient au même, que leur éclat intrinsèque diminue, toutes choses égales d'ailleurs, quand elles s'éloignent du Soleil. On sait en effet que dans une lunette l'éclat de l'image d'un objet d'éclat intrinsèque invariable est indépendant de sa distance; seules diminuent ses dimensions. Ce n'est pas le cas pour les comètes.

264. **Origine des comètes.**

1° — On admet habituellement que les comètes viennent des profondeurs de l'espace, en style moins noble, des régions ultra-planétaires, sur des trajectoires quasi paraboliques. Si rien ne modifie essentiellement la nature de cette trajectoire, elles nous quittent après un séjour plus ou moins long dans nos parages : elles ne reviennent plus. Mais elles peuvent être capturées par une planète; leur trajectoire se modifie,

devient elliptique ; la comète fait dorénavent partie de notre système : elle est devenue *périodique*.

On donne donc aux comètes une origine qui les distingue profondément des planètes. C'est qu'en effet, outre la constitution physique qui semble bien différente, certains caractères permettent de distinguer nettement les deux espèces d'astres.

Les planètes tournent toutes dans le sens direct autour du Soleil ; les inclinaisons des plans de leurs orbites sur l'écliptique ne sont même que de quelques degrés ; les excentricités des trajectoires sont quasi nulles. Au contraire les inclinaisons des plans orbitaux des planètes ont toutes les valeurs de 0 à 180° ; les excentricités sont voisines de 1. Même après leur capture, c'est-à-dire même après que leurs orbites sont devenues elliptiques, ces orbites diffèrent peu d'une parabole dans leur partie visible, c'est-à-dire au voisinage du périhélie.

2° — Il semble pourtant qu'aujourd'hui la théorie qui donne aux comètes une origine extérieure à notre système, perde ses partisans. Les uns y voient le résultat de l'explosion d'une planète, les autres un anneau d'astéroïde ne différant pas essentiellement des astéroïdes qui constituent l'anneau des petites planètes comprises entre Mars et Jupiter.

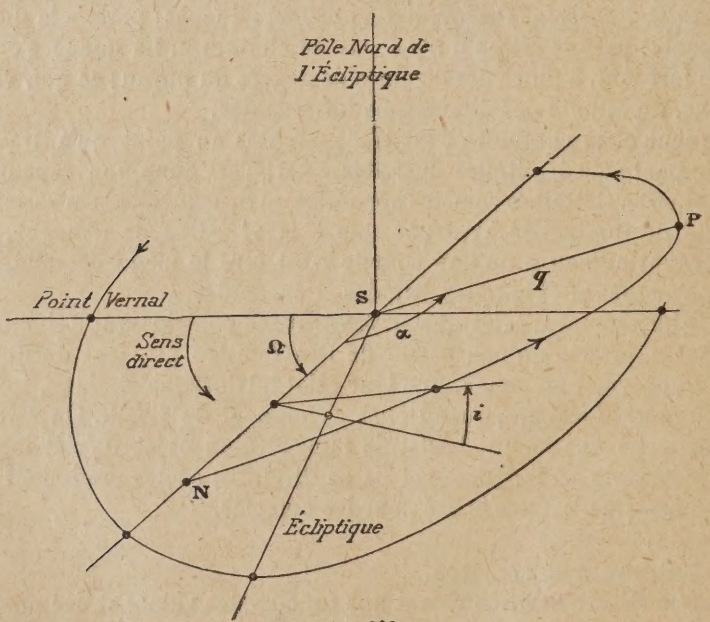


Fig. 206.

265. Définition de l'orbite parabolique.

Pour définir avec précision l'orbite parabolique d'une comète, il faut donner la position de son plan qui naturellement passe par le Soleil.

Ce plan est défini par la longitude Ω du nœud ascendant, c'est-à-dire par la longitude de la ligne SN de l'écliptique sur laquelle la comète passe du côté sud au côté nord de ce plan.

La direction du périhélie P, sommet de la parabole, est déterminée par l'angle ω avec la ligne des nœuds, pris dans le plan de l'orbite, ou encore par la longitude π de la ligne des apsides.

La distance $q = \overline{SP}$ minima au Soleil parfait la définition du point P.

On donne le temps du passage au périhélie. Enfin le plan de l'orbite est défini par l'angle i avec l'écliptique (*inclinaison*).

Mais, contrairement à ce qui arrive pour les planètes, l'angle i est compris entre 0 et 180°. Quand $i < 90°$, le mouvement de la comète est *direct*; quand $i > 90°$, il est *rétrograde*.

En tout la trajectoire est définie par cinq éléments.

L'anomalie vraie Θ (comptée à partir de SP) est donnée en degrés par la formule (§ 84) :

$$t = 82{,}22\sqrt{q^3}\left(g\,\frac{\theta}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{\theta}{2}\right);$$

t est évalué en jours; q est évalué en moyennes distances de la Terre au Soleil. Pour $\theta = 90°$, on a :

$$T = 109{,}62\sqrt{q^3}.$$

Pour $q = 1$, $T = 109{,}62$ jours : nous avons affaire à la comète de 109 jours.

266. **Détermination de l'orbite.**

1° — On suppose avoir trois observations complètes qui donnent les

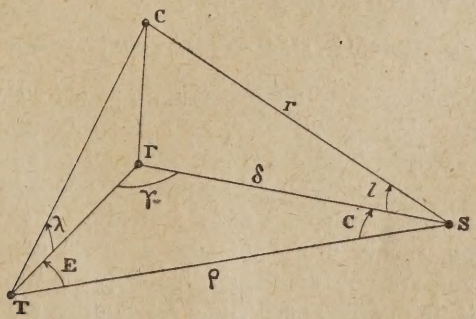


Fig. 207.

directions de l'astre pour trois temps connus. Connaissant, par exemple, les ascensions droites et les déclinaisons par comparaison avec des étoiles connues, nous pouvons calculer les coordonnées écliptiques *géocentriques* (§ 18).

Mais là commence la difficulté. Les calculs de l'orbite ne sont simples qu'avec les coordonnées écliptiques *héliocentriques*; d'autre part nous

ne pouvons passer des unes aux autres (§ 182) puisque nous ignorons les distances de l'astre au Soleil.

Voici comment on procède par tâtonnement.

Soit T la Terre, C la Comète, S le Soleil. Nous connaissons la distance $\rho = \overline{TS}$ au moment de l'observation; la longitude géocentrique de la comète, supposée connue, donne l'angle d'élongation E. Nous avons :

$$\frac{\delta}{\sin E} = \frac{\rho}{\sin \gamma}, \qquad E + \gamma + C = 180°.$$

Prenons *arbitrairement* δ; nous pouvons dès lors calculer γ, puis C.

D'autre part nous avons :

$$\overline{T\Gamma} \cdot \operatorname{tg}\lambda = \overline{C\Gamma} = \delta \cdot \operatorname{tg} l, \qquad \text{d'où :} \qquad \sin C \cdot \operatorname{tg}\gamma = \sin E \cdot \operatorname{tg} l.$$

L'observation réduite donne la latitude géocentrique λ; nous pouvons donc calculer l. Enfin nous avons :

$$r \cos l = \delta.$$

Bref l'observation donne E et λ; nous prenons arbitrairement δ; nous pouvons dès lors calculer les coordonnées héliocentriques. Nous déduisons la longitude héliocentrique de la valeur de l'angle C, puisque nous connaissons l'instant du phénomène, par suite la direction de la droite TS; nous pouvons d'autre part calculer l et r.

2° — Recommençons le même calcul pour la seconde observation, *en choisissant encore arbitrairement la distance au Soleil.*

Soit L la différence des longitudes héliocentriques; l', l'', les latitudes héliocentriques pour les deux observations.

L'angle Θ dans le plan de l'orbite est :

$$\cos\Theta = \sin l' \cdot \sin l'' - \cos l' \cdot \cos l'' \cdot \cos L.$$

Nous voici donc ramenés au problème suivant : Dans le plan de l'orbite on connaît deux positions C' et C'' de l'astre par leurs rayons vecteurs r' et r'', et par l'angle Θ qu'ils font. Le § 94 nous apprend à calculer complètement l'orbite parabolique correspondante.

3° — Mais nous avons introduit deux arbitraires δ' et δ''. D'autre part nous n'avons pas encore utilisé une des données expérimentales : la différence des temps des observations. Or lorsque la trajectoire parabolique est connue, la distance périhélie q est connue, ainsi que les anomalies vraies θ' et θ'' qui correspondent aux deux observations : la formule rappelée au § 265 permet de calculer le temps $t'' - t'$ qui sépare les observations.

Calculons-le, comparons-le au temps expérimental : il y a fort à parier qu'il n'y a pas concordance. L'écart est ε_1.

C'est ici que commence le tâtonnement.

Recommençons nos calculs avec une autre valeur de δ''. Nous trouvons un écart ε_2. Pourvu que ε_1 et ε_2 ne soient pas trop distants, une

interpolation linéaire fournit la valeur à donner à δ'' pour que ε s'annule. Ainsi nous trouvons une parabole qui satisfait parfaitement bien à deux des observations, mais dans le calcul de laquelle intervient comme arbitraire la distance δ' de la comète au Soleil lors de la première observation.

4° — Il s'agit d'introduire la troisième observation.

Pour cela, sur la trajectoire parabolique connue, nous déterminons la position du mobile à l'heure de la troisième observation. Nous la projetons sur l'écliptique; nous vérifions si la longitude géocentrique de cette projection est bien celle que l'observation nous a donnée.

En général il existe un écart τ_1.

Nous recommençons alors tous nos calculs, en faisant sur δ' une nouvelle hypothèse. Nous calculons d'abord la parabole qui satisfait exactement aux deux premières observations; nous déterminons sur elle la position du mobile à l'heure de la troisième observation. Nous la projetons sur l'écliptique : nous vérifions si la longitude géocentrique de cette projection est bien celle que l'observation nous a donnée.

En général il existe un écart τ_2.

Nous faisons maintenant l'ultime tâtonnement.

Deux hypothèses δ'_1 et δ'_2 sur δ' ont fourni des écarts τ_1 et τ_2 : par une interpolation linéaire, cherchons quelle hypothèse sur δ' annule l'écart τ. Une règle de trois fournit immédiatement δ'_3.

Il ne reste plus qu'à recommencer une troisième fois nos calculs avec l'hypothèse δ'_3. Nous calculons exactement la parabole qui satisfait aux deux premières observations. Nous vérifions qu'elle représente la troisième : en général il s'en faut de peu.

5° — Toutefois on ne peut s'attendre à une concordance absolue. L'orbite parabolique est déterminée par 5 éléments, tandis que 3 observations complètes fournissent 6 conditions. C'est du reste évident d'après la marche des opérations elles-mêmes. Quand nous calculons la position de l'astre sur la trajectoire qui satisfait complètement aux deux premières observations, nous pouvons vérifier la concordance à la troisième et calculer les écarts τ, non plus avec la longitude géocentrique, mais avec la latitude. Rien ne dit que les résultats seront les mêmes. En pratique on choisit δ'_3 de manière que l'erreur en longitude soit du même ordre que l'erreur en latitude.

Il existe des méthodes plus directes; mais elles donnent lieu à des calculs plus longs que la méthode de fausse position. A la vérité les mathématiciens modernes la méprisent par ce qu'elle manque d'élégance, surtout par ce qu'en l'appliquant on est obligé de comprendre ce qu'on fait.

267. Comètes périodiques. Comète de Halley. Comète à courte période.

1° — On comprend de quelle importance est l'établissement de la

périodicité d'une comète. Si les comètes avaient une figure stable, on pourrait les reconnaître à leur allure. Mais elles se modifient de telle manière que ce serait un mauvais critérium pour les identifier.

On assimile donc une comète à une comète précédemment vue par la comparaison de leurs trajectoires paraboliques.

Le lecteur pourrait croire que, pour savoir si oui ou non la comète est périodique, il suffit de déterminer si son orbite est elliptique ou non. Mais si l'ellipse est très allongée, il est impossible de déterminer son grand axe autrement que par la période, en s'appuyant sur la troisième loi de Képler. On détermine donc l'orbite comme parabolique; c'est après la constatation de la périodicité qu'on transforme la parabole en une ellipse d'après la longueur calculée du grand axe.

2° — Voici l'histoire classique de la comète de Halley.

Halley calcula les éléments paraboliques d'une comète rétrograde observée en 1682. Les voici tels qu'ils sont devenus aujourd'hui (à partir de l'équinoxe de 1910, 0).

$$i = 162° 13' \qquad \Omega = 57° 16' \qquad \pi = 168° 58' \qquad q = 0{,}59.$$

Il les trouva très voisins de ceux d'une comète observée en 1607, c'est-à-dire 75 ans avant. Remontant vers le passé, il constata l'apparition d'une comète en 1531 ayant encore a peu près les mêmes éléments.

La périodicité se trouvait mise hors de doute.

Effectivement la comète est revenue en 1759, 1835, 1910. De 1531 à 1910 se sont écoulés 379 ans qui représentent 5 périodes de 76 ans.

Connaissant la période, on peut calculer le grand axe de l'ellipse; connaissant la distance périhélie, on a la distance aphélie et l'excentricité.

Dist. périhélie = 0,59 Dist. aphélie = 35,30 Excentricité = 0,967

Ainsi l'ellipse décrite par la comète d'Halley s'étend au delà de l'orbite de Neptune.

3° — Les comètes peuvent être capturées de manière que leurs périodes soient beaucoup plus courtes. Celle dont la période est la plus courte (1 200 jours ou 3,3 ans), dont par suite la distance aphélie est la plus petite (4,09; la moyenne distance de la Terre au Soleil est prise pour unité), est connue sous le nom de comète d'Encke ou de *comète à courte période*. Son orbite reste toujours comprise à l'intérieur de l'orbite de Jupiter. Sa distance périhélie est 0,34.

268. Comète de Biéla.

La comète de Biéla mérite qu'on insiste.

Elle fut observée en 1826 par Biéla, à Josephstadt (Bohême) et identifiée avec une comète observée en 1805 et en 1772. De 1772 à 1826 il y a 54 ans; pour obtenir une apparition en 1805, il faut admettre que ces

54 ans font 8 périodes de 6,75 ans. La distance périhélie est 0,88; la distance aphélie est 6,22. Jusque-là rien de remarquable.

La comète de Biéla acquit une grande célébrité en 1828, parce qu'Obbers avait prédit qu'elle passerait tout près de notre orbite, à 32 000 kilomètres. On parla de la fin du monde, ne comprenant pas que nous ne risquons rien à ce qu'on traverse notre orbite si nous sommes loin du point de traversée, ce qui était le cas.

Rien de particulier en 1832. Mais voilà qu'en 1845, on lui découvre un satellite; un fragment s'en était détaché en 1844. Le fragment constitua bientôt une petite comète à deux queues, tandis que le gros de la comète montra plusieurs noyaux, puis une seconde queue, puis une troisième. En février 1846, la comète nouvellement détachée parut plus brillante que sa mère.

Évidemment il se passait des choses graves dans la comète de Biéla!

En 1852, Secchi aperçoit une partie de la comète le 26 août; l'autre ne fut visible qu'en septembre; elles étaient à 2 millions de kilomètres l'une de l'autre.

Depuis lors elles ont complètement disparu.

La comète de Biéla est un exemple authentique d'une comète à courte période qui d'abord se brise, puis se désagrège complètement. Nous verrons que les débris de comètes deviennent un *courant filiforme* d'étoiles filantes.

Au reste même avant qu'elle se désagrégeât, la comète de Biéla semait des corpuscules sur sa route.

On admet que l'essaim d'étoiles filantes connu sous le nom d'Andromédides (pluie du 27 novembre) est un courant de corpuscules abandonnés au cours des siècles par la comète de Biéla.

269. **Action du Soleil. Les comètes au voisinage du périhélie.** Les particules qui forment la queue des comètes, sont soumises à deux forces : l'une répulsive proportionnelle à leur surface et due à ce qu'on appelle la *pression de radiation*; l'autre attractive proportionnelle à leur masse. Elles sont toutes deux en raison inverse du carré des distances du centre lumineux et attirant. Le rapport des deux forces diffère donc suivant la densité de la matière; Brédéchine admet les trois rapports : 11 pour les queues formées d'hydrogène; 1,3 pour celles constituées par des hydrocarbures; 0,2 pour celles formées de fer à l'état de division moléculaire.

L'action du Soleil sur la queue d'une comète peut donc être répulsive au total, si l'état de division de la matière est suffisant et si la densité des corpuscules est assez petite. C'est en partant de ces principes qu'on explique la désagrégation des comètes au voisinage du périhélie. La répulsion l'emporte sur les corpuscules les plus légers; d'où formation des *queues normales*, toujours opposées au Soleil. L'attraction l'emporte sur les corpuscules relativement pesants : d'où formation de *queues*

normales, dirigées vers le Soleil, origines probables des courants météoriques dont l'existence se traduit par les pluies *d'étoiles filantes* (§ 270).

Étoiles filantes.

270. **Définition de l'apex.**

Nous savons que le centre d'inertie de la Terre décrit une trajectoire

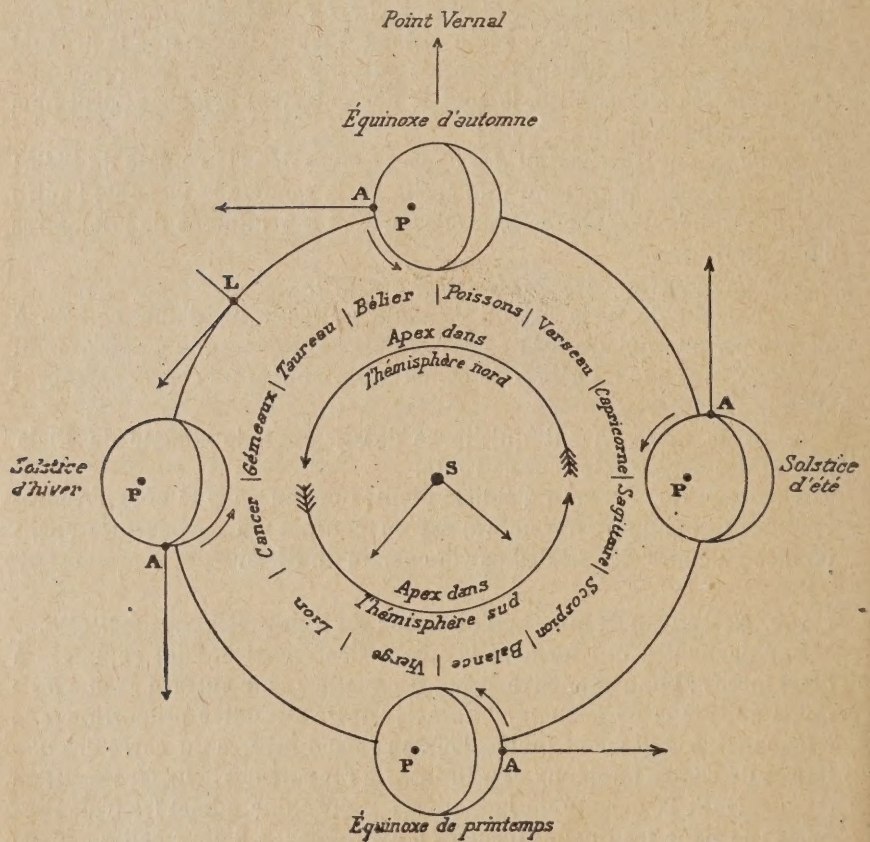


Fig. 208.

elliptique dans le plan écliptique. Un arc de cette trajectoire dont la longueur est de l'ordre du diamètre terrestre, peut être assimilé à une droite qui est par conséquent un diamètre terrestre. A chaque instant il coïncide avec la verticale d'un lieu; le zénith de ce lieu est l'*apex* ou le *point de mire*.

La trajectoire elliptique terrestre différant très peu d'un cercle, les coordonnées de l'apex sont faciles à déterminer approximativement. Ce

sont celles d'un Soleil fictif qui retarderait de trois mois sur le Soleil vrai.

Il est sur l'écliptique à 90° du Soleil, à l'ouest du Soleil, vers la droite d'un observateur dont la tête est au pôle nord et qui regarde le Soleil.

La déclinaison de l'apex est donc celle qu'avait le Soleil trois mois avant le jour considéré; son ascension droite est celle que le Soleil possède actuellement, moins six heures.

Quand le Soleil est dans un signe (22° du Scorpion au 15 novembre, par exemple), l'apex est trois signes avant (vers le 22° degré du Lion, par conséquent).

Les coordonnées de l'apex au 15 novembre 1915 sont très sensiblement celles du Soleil au 15 août.

$$D = +14°19', \qquad \text{Æ} = 9^h36^m.$$

En raison de la correspondance qui existe entre les déclinaisons et les latitudes géographiques, le 15 novembre 1916, l'apex passe du zénith des lieux dont la latitude est $+14°\ 19'$.

L'apex est dans l'hémisphère nord du solstice d'été au solstice d'hiver; il est dans l'hémisphère sud du solstice d'hiver au solstice d'été.

L'apex, étant à droite du Soleil, passe avant lui au méridien; il culmine à six heures du matin.

Comme exercice le lecteur vérifiera qu'à une approximation plus grande, l'apex fait avec le Soleil vers la droite l'angle (en radiant) :

$$\alpha = \pi : 2 + e \sin (L - L_0).$$

L_0 est la longitude du périgée, L est la longitude actuelle du Soleil. Transformons en angles :

$$\alpha = 90° + 57' \sin (L - L_0).$$

Sur la figure 208 sont inscrits les signes; il faut bien entendu les supposer sur une circonférence de rayon très grand par rapport au rayon de celle qui figure schématiquement la trajectoire terrestre. Le lecteur ne confondra pas les signes et les constellations (§ 26).

271. Lois de Coulvier-Gravier.

1° — Coulvier-Gravier a énoncé trois lois déduites uniquement de l'observation.

Le nombre horaire moyen des étoiles filantes va croissant de six heures du soir à six heures du matin; il y a donc maximum à six heures du matin, les observations étant impossibles pendant le jour.

De juillet à janvier on voit plus d'étoiles filantes que de janvier à juillet.

On voit plus d'étoiles filantes venant de l'est que de l'ouest, tandis que moyennement il en vient autant du nord que du sud.

Bien que le contraire ait d'abord paru évident, montrons que ces lois prouvent l'origine *cosmique* des étoiles filantes, en contradiction avec l'hypothèse qui localise l'origine de ces étoiles là où on les voit.

Imaginons une sphère creuse S très grande dont toute la surface interne lance uniformément des corpuscules, normalement vers l'intérieur : le centre de cette sphère occupé par la Terre *supposée immobile* est uniformément bombardé ; le nombre des projectiles reçu par l'unité de surface est partout le même, dans le même temps. Supposons au contraire la Terre mobile dans le sens TA ; cherchons comment la distribution des projectiles à sa surface est modifiée par le mouvement.

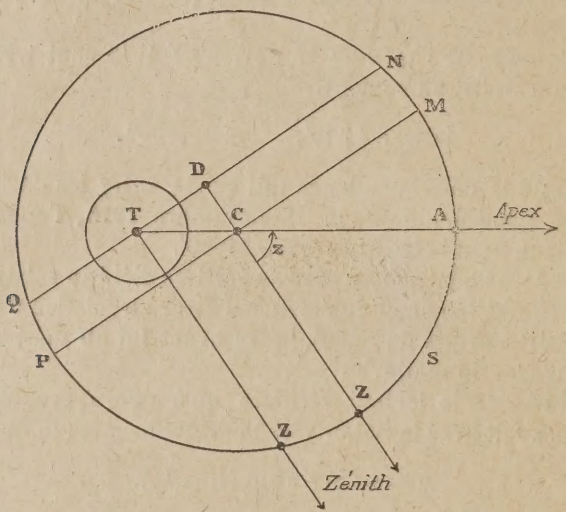


Fig. 209.

Au lieu de mouvoir la Terre, nous pouvons donner aux projectiles des vitesses égales et des signes contraires. Ils ne se rencontrent plus au point C ; ils viennent tous passer au point T situé à une distance $\overline{CT} = v$ en sens inverse du mouvement terrestre, distance telle que v : V soit égal au rapport de la vitesse v de la Terre sur sa trajectoire et de la vitesse V des projectiles. Nous posons $\overline{CA} = V$.

2° — Loi de distribution moyenne.

Pour trouver la loi de distribution moyenne à la surface de la Terre, il suffit donc de chercher le rapport des aires découpées sur la surface terrestre et sur la sphère S par un cône d'angle solide petit et de sommet T.

Le calcul général est sans intérêt en raison de la manière d'observer. On mesure en effet le nombre n de projectiles qui tombent en un temps donné dans l'hémisphère visible du lieu d'observation, quand le zénith de ce lieu est à une distance z de l'apex.

Dans le même temps le nombre total envoyé par la sphère S est N.

Pour trouver le rapport n : N, menons par le point T un plan diamétral normal à CZ. On a :

$$\frac{n}{N} = \frac{\text{aire MZP} + \text{aire zone MNPQ}}{\text{aire de la phère.}}.$$

L'aire de la zone MNPQ $= 2\pi \cdot \frac{\overline{CD}}{V} = 2\pi \frac{v}{V} \cos z.$

D'où : $$\frac{n}{N} = \frac{2\pi}{4\pi}\left(1 + \frac{v}{V}\cos z\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{v}{V}\cos z\right). \qquad (1)$$

Si le zénith ou le nadir coïncident avec l'apex, on a :

$$\frac{n}{N} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{v}{V}\right).$$

Pour v petit devant V, le quotient est à peu près le même dans les deux cas. Pour v très grand par rapport à V, l'une des valeurs est négative c'est-à-dire inacceptable; ce qui signifie que certains points de la surface terrestre ne reçoivent rien du tout. De toute manière l'observation permettra de déterminer le rapport v : V.

3° — Les lois de Coulvier-Gravier vont maintenant d'elles-mêmes.

Puisque l'apex passe au méridien d'un lieu vers six heures du matin (heure locale), c'est alors que, toutes choses égales d'ailleurs, il tombera moyennement plus de météorites. En effet c'est alors que l'angle z est minimum.

Puisque l'apex est dans l'hémisphère nord du solstice d'été au solstice d'hiver, c'est de juillet à janvier que, toutes choses égales d'ailleurs, il s'approchera le plus du zénith d'un point de cet hémisphère : d'où l'augmentation constatée.

C'est pendant la nuit qu'on observe; on a l'apex à l'est, puisqu'en raison du mouvement diurne, il ne doit passer au méridien qu'à la fin de la nuit : d'où la troisième loi de Coulvier-Gravier.

Enfin on peut comparer à la formule les nombres déduits des observations groupées par heures, ou ce qui revient au même, par distances z de l'apex au zénith du lieu d'observation.

Soit l la latitude du lieu, D la déclinaison de l'apex, H l'angle qui sépare les plans horaires passant par le lieu et par l'apex :

$$\cos z = \sin l \,.\, \sin D + \cos l \,.\, \cos D \,.\, \cos H. \qquad (2)$$

Coulvier-Gravier a déterminé par l'observation les nombres n de projectiles qui tombent dans l'hémisphère visible du lieu où il observait, de 5^h à 6^h du soir, de 6^h à 7^h,... de 6^h à 7^h du matin : d'où 14 *nombres horaires*. Les formules (1) et (2) les représentent quand on pose v : V = 1,45, nombre voisin de 1,414 qui correspond à la vitesse cométaire (§ 163).

Pour v : $V = 1{,}414$, le lecteur vérifiera que l'hémisphère dont le zénith coïncide avec l'apex ($z = 0$), reçoit environ six fois plus d'étoiles dans le même temps que l'hémisphère dont le nadir coïncide avec l'apex ($z = 180°$).

272. **Théorie de Schiaparelli.**

Dans ce qui précède nous envisageons les chutes de météorites en moyenne; considérons maintenant séparément les *essaims*, *pluies...*, *périodiques*.

A certaines dates (13 novembre, 10 août, 20 avril, 27 novembre,...), le nombre des météorites augmente à tel point qu'on les compte par milliers. Pour certains essaims la période est annuelle; pour d'autres la pluie se produit bien tous les ans, mais avec une abondance périodique. Ainsi pour les Léonides, la période est de 33 ans environ.

On est donc naturellement amené à considérer les météorites comme formant des courants, comme remplissant des *tubes géométriques* permanents qui coupent notre trajectoire et que nous traversons tous les ans.

Puisque les météorites arrivent dans notre atmosphère avec la vitesse cométaire, il faut que les orbites soient des ellipses très allongées, sur lesquelles la durée de révolution est longue en vertu d'une des lois de Képler. Comme nous rencontrons le courant tous les ans, ce ne sont pas les mêmes groupes d'astéroïdes, les mêmes portions du courant *matériel* que nous coupons d'une année à l'autre. Enfin comme nous traversons le tube en quelques jours, parfois en quelques heures, sa section est petite : d'où le nom de *courant filiforme* qu'on lui a donné. En Astronomie quelques milliers de kilomètres ne sont que la largeur d'un fil.

Ainsi nous devons imaginer un tube dont les génératrices sont des ellipses très allongées. Dans ce tube quasi invariable se déplace, suivant les lois de la gravitation, de la poussière d'astre. Certains de ces tubes sont coupés par notre trajectoire; quand nous les traversons, les corpuscules tombent dans notre atmosphère, s'échauffent par frottement et constituent les *étoiles filantes*.

Le tube géométrique n'est pas absolument fixe dans l'espace; il subit des perturbations de même que les orbites des planètes. Le lecteur ne le confondra pas avec le courant qui le remplit, courant qui se meut suivant les lois de Képler et dont la densité peut être extrêmement variable d'un point à l'autre : les corpuscules sont ici en rangs serrés, plus loin au contraire en tirailleurs. C'est grâce à cette non-uniformité de la densité que nous parvenons à fixer la période du courant, la durée de révolution des corpuscules.

273. **Radiant.**

1° — Toutes les étoiles d'une même pluie semblent diverger d'un même point du ciel qui reste le même d'année en année : on lui donne

le nom de *radiant*. Cette radiation *divergente* est un simple effet de perspective : les trajectoires des météorites sont parallèles, les portions *visibles* de ces trajectoires peuvent être considérées comme des droites parallèles; mais nous savons que des parallèles semblent converger au loin. La preuve du parallélisme des trajectoires se trouve dans le fait que des observateurs très éloignés les uns des autres trouvent le même radiant pour le même essaim.

Voici quelques radiants définis par leurs ascensions droites et leurs déclinaisons.

NOMS	DATES	Æ	D	ÉTOILE VOISINE
Léonides.	13 novembre.	149°	+ 23	ζ Lion.
Perséides	10 août.	44	+ 56	η Persée.
Lyrides	20 avril.	271	+ 33	104 Hercule.
Andromédides	27 novembre.	25	+ 43	γ Andromède.

Pour qu'une pluie soit visible en un lieu, il est à peu près nécessaire que le radiant soit au-dessus de l'horizon et le Soleil au-dessous.

2° — Nous admettons pour les corpuscules la vitesse cométaire; nous connaissons à chaque instant la vitesse de la Terre; nous déterminons la position du radiant, c'est-à-dire la direction *apparente* de la trajectoire *visible* des météorites : il s'agit de déterminer sa direction vraie.

C'est un petit problème de mouvement relatif.

Soit l, L, la longitude et la latitude astronomiques du *radiant absolu*; soit l', L', la longitude et la latitude astronomiques du *radiant relatif*. Soit V' la vitesse relative. Soit x et y les coordonnées héliocentriques de la Terre sur l'écliptique.

Écrivons que la vitesse absolue est égale à la vitesse relative plus la vitesse d'entraînement. L'on a :

$$\begin{aligned} V\cos l\,.\cos L &= V'\cos l'\,.\cos L' + \frac{dx}{dt}, \\ V\cos l\,.\sin L &= V'\cos l'\,.\sin L' + \frac{dy}{dt}, \\ V\sin l &= V'\sin l'. \end{aligned} \qquad (1)$$

Additionnons les carrés :

$$V^2 = V'^2 + v^2 + 2V'\cos l'\left(\frac{dx}{dt}\cos L' + \frac{dy}{dt}\sin L'\right).$$

D'où V', puis l de la troisième équation (1), puis L de l'une des deux premières.

Connaissant la position du radiant vrai, nous avons l'inclinaison de l'orbite. Quand à la longitude de son nœud (intersection avec l'éclip-

tique), elle est fournie par la date du phénomène, nœud descendant si la latitude du radiant est négative, nœud ascendant si elle est positive.

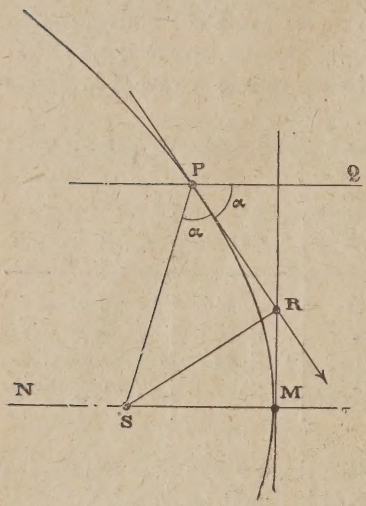


Fig. 210.

3° — Trajectoire parabolique.

Admettons que la trajectoire est parabolique.

On en connaît le foyer S, un point P et la tangente PR en ce point.

Faisons QPR = SPR; nous avons la direction PQ de l'axe, par suite cet axe même NSM.

Abaissons SR normalement sur la tangente: du point R ainsi déterminé abaissons RM normalement sur l'axe : nous avons le sommet M de la parabole (périhélie) qui est ainsi complètement déterminée.

Mais la trajectoire n'est pas une parabole. Connaissant la période, la troisième loi de Képler donne le grand axe a de l'ellipse qui se confond avec la parabole au voisinage du Soleil.

L'ellipse est ainsi complètement déterminée.

274. Léonides.

1° — Précisons le sens des paragraphes précédents en insistant sur un groupe important d'étoiles filantes, les *Léonides*.

Nous coupons leur orbite chaque année pendant un intervalle de quelques jours dont le milieu est la nuit du 13 au 14 novembre.

A ce moment les coordonnées de l'apex sont à peu près :

$$A = 142° \qquad D = 15°;$$

ce sont les coordonnées solaires trois mois avant.

Les coordonnées du radiant relatif sont :

$$A = 149° \qquad D = 23°,$$

peu différentes comme on voit de celles de l'apex.

La conclusion est que le plan de l'orbite des Léonides est très incliné sur l'écliptique; elles sont animées d'un mouvement rétrograde; on a $i = 162°$. Nous allons presque à leur devant; la vitesse relative ne doit pas différer beaucoup de la somme des vitesses, c'est-à-dire de 70 kilomètre à la seconde. La figure 211 représente schématique notre trajectoire quasi circulaire et une partie de la trajectoire elleptique très allongée des Léonides.

Si le lecteur se reporte à la figure 202, il verra que c'est toujours l'hémisphère sud de la Terre qui doit toucher le premier le courant des Léonides. Connaissant l'inclinaison de l'axe terrestre par rapport à l'orbite, il pourra même calculer sur quel parallèle la pluie d'étoiles filantes doit commencer.

2° — Les pluies de Léonides reviennent avec une intensité particulière tous les 33 ans *environ*. On en signale de très intenses en 1799, en 1833, en 1866; en 1899 cependant la pluie fut médiocre. Il faut conclure de là que la périodicité du mouvement de translation sur l'orbite est de 33 ans *environ*; corrélativement l'orbite est très allongée. Tous les ans nous coupons bien le tube orbital au même point; mais, lors de notre retour en ce point, ce ne sont pas les mêmes portions du courant qui l'occupent; ce ne seraient les mêmes, après un certain nombre d'années révolues, que si la période du mouvement des Léonides sur leur orbite était ce nombre *exact* de nos années sidérales.

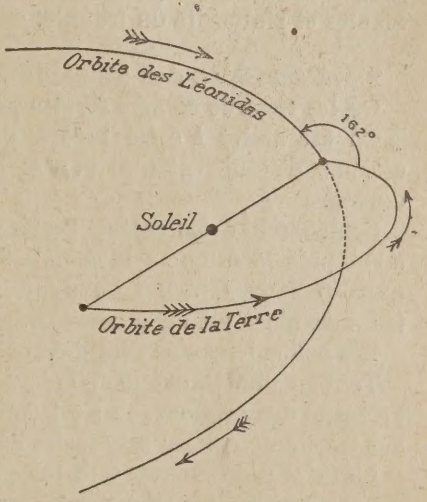


Fig. 211.

Puisqu'un certain nombre de fois successivement la pluie a été particulièrement intense après 33 ans, nous pouvons bien conclure que la période est de 33 ans *environ*, sans pour cela nous étonner que la périodicité des pluies intenses ne se maintienne pas. Nous devons simplement conclure que la période diffère un peu de 33 ans (on admet 33 ans un quart), que la partie dense du courant n'a pas une longueur très longue, ou encore qu'une portion du courant s'est rencontrée particulièrement maigre en 1899. Il est plus que probable que nous coupons chaque année le courant dans des régions qui ne sont jamais les mêmes, le nombre 33,25 n'étant qu'approché. S'il était exact, nous reviendrons dans les mêmes portions du courant tous les 133 ans; ce qui ne paraît pas vrai.

3° — Les anciennes chroniques signalent des pluies particulièrement intenses d'étoiles filantes qu'il est possible de rattacher aux Léonides. En comparant leurs dates, on trouve que *par rapport à un équinoxe fixe* la longitude du nœud de leur orbite croît de 50″,4 environ par an; par rapport *à l'équinoxe vrai* elle croît donc de 102″,6.

Par exemple la longitude héliocentrique terrestre au moment de la pluie était de 51° en 1833 par rapport à l'équinoxe de 1833; elle était seulement de 24° en l'an 902 : par rapport à l'équinoxe de l'an 1902;

c'est dire qu'en l'an 902 la pluie exceptionnelle attribuable aux Léonides eut lieu le 18 septembre. Elle eut lieu le 21 octobre en l'an 1366.

On a trouvé la cause de cette perturbation dans l'action troublante de Jupiter et de Saturne : ce qui est la confirmation de la période admise, trente-trois ans un quart, puisque de la période on conclut le grand axe de l'orbite; par suite on peut déterminer les planètes troublantes et l'intensité du trouble.

275. **Formation des courants filiformes.**

On les regarde comme formés par les débris des comètes.

On est arrivé à cette théorie par la comparaison des orbites des essaims d'étoiles filantes et des orbites de certaines comètes périodiques.

Schiaparelli ayant calculé l'orbite des Perséides (10 août) la reconnut à peu près identique à la comète de Tuttle portée au catalogue sous le numéro 1862 III. Il trouva de même que l'orbite des Léonides (13 novembre) est celle de la comète de Tempel (1866 I).

Les coïncidences se sont depuis multipliées.

Tout en admettant que de l'identité des trajectoires, on peut conclure l'identité des origines, on s'est demandé si de la non-identité actuelle des trajectoires, il est nécessaire de conclure à des origines différentes.

La théorie de Schiaparelli bute en effet sur des difficultés considérables. Sur quelques milliers d'essaims catalogués, on n'en connaît que quatre dont les trajectoires soient indubitablement celles des comètes. Faut-il admettre qu'une comète spéciale est à l'origine de tous les essaims? faut-il admettre des millions de courants météoriques distincts dans notre système planétaire, aucune raison n'étant valable pour les supposer particulièrement condensés autour de notre orbite?

Brédéchine a tenté d'assouplir la théorie de Schiaparelli. Il s'agit d'expliquer comment la désagrégation des comètes au passage par leur périhélie (§ 269), peut, à chacun de leurs retours, produire de *nombreux* essaims, ayant les inclinaisons et les périodes les plus différentes. Le nombre des essaims pourrait être ainsi d'un autre ordre de grandeur que celui des comètes génératrices; corrélativement il serait impossible de conclure que l'origine est différente parce qu'actuellement les trajectoires diffèrent.

Bolides et aérolithes.

276. **Position de la question.**

On appelle *bolide* un météore constitué par un globe de fer incandescent visible en plein jour ou qui, la nuit, peut être aperçu à de très grandes distances.

Tandis que les étoiles filantes ne laissent autant dire jamais trace de

leur passage, l'apparition des bolides est ordinairement accompagnée de la chute d'une masse plus ou moins volumineuse qu'on appelle *aérolithe*, pierre tombée du ciel. Le bolide éclate avec grand bruit; la pierre tombe après cette détonation.

Les aérolithes sont parfois composés de fer pur; parfois au fer est associée une matière pierreuse. Il est très rare que le fer soit absent.

La question fondamentale est de savoir s'il faut assimiler les bolides aux étoiles filantes, malgré que les pluies les plus intenses d'étoiles ne produisent pas de chute de matière ou n'en produisent que très exceptionnellement. Les bolides ne seraient-ils que des étoiles assez volumineuses pour qu'il reste quelque chose de la matière à l'arrivée sur la surface terrestre?

277. **Orbite d'une masse détachée d'une planète par une explosion.**

1° — On s'est demandé à quelles conditions une masse lancée hors d'une planète peut jouer vis-à-vis de nous le rôle de bolide. Le problème se dédouble : à quelle condition la masse peut-elle jouer le rôle de planète ou de comète? à quelle condition pouvons-nous la rencontrer?

Si l'on veut qu'elle joue le rôle de comète ou de planète à longue période, il faut lui communiquer une vitesse considérable.

Raisonnons pour la Terre. Nous avons vu qu'abstraction faite des frottements, il fallait fournir une vitesse de 11 kilomètres environ pour vaincre l'action de la pesanteur. En admettant une trajectoire parabolique, il faut que la vitesse soit de 42 kilomètres. Laissons de côté l'action de la Terre et les frottements, c'est donc une vitesse de $42 - 30 = 12$ kilomètres à fournir si le projectile doit partir vers l'apex, dans le sens du mouvement terrestre (la Terre a une vitesse d'environ 30 kilomètres sur sa trajectoire), une vitesse de $42 + 30 = 72$ kilomètres, si le projectile est lancé vers l'antiapex, une vitesse comprise entre 12 et 72 kilomètres pour toutes les inclinaisons de l'orbite variant en 0° et 180°.

Avec ces vitesses la masse détachée de la Terre joue le rôle de comète; son orbite est sinon une parabole, du moins une ellipse très allongée; par suite la période est longue. Évidemment cette orbite coupe la nôtre, au moins tant que les perturbations ne l'ont pas trop modifiée : il n'est donc pas impossible qu'après un nombre plus ou moins grand de révolutions, nous nous trouvions juste au point d'intersection des orbites, lors du passage de cette minuscule planète ou comète, comme on voudra, qui jouera par rapport à nous le rôle de bolide.

2° — Mais comme les plus faibles vitesses sont plus probables que les plus grandes, si les bolides sont originaires de la Terre ou de la Lune, il y a des chances pour que leurs orbites soient parcourues dans le sens direct et que leurs plans soient peu inclinés sur le plan de la nôtre. Or

en étudiant les radiants absolus des bolides, on trouve justement qu'ils se groupent au voisinage de l'antiapex. Ils nous arrivent presque exclusivement par derrière, si l'on peut dire, en nous rattrapant dans le sens même de notre mouvement de translation. Tel est le grand argument de ceux qui soutiennent l'origine planétaire des bolides, plus précisément qui les croient détachés de la Terre et de la Lune à une époque très antérieure à l'époque actuelle, alors que les volcans terrestres et lunaires étaient en pleine activité.

En effet, disent-ils, si les bolides ne sont que de grosses étoiles filantes, conséquemment s'ils nous viennent de régions ultra-planétaires par l'intermédiaire d'une comète capturée par notre système et désagrégée, en moyenne elles doivent nous tomber dessus, comme les autres étoiles filantes, indifféremment dans toutes les directions. Par suite leurs radiants relatifs doivent être six fois plus nombreux dans l'hémisphère de l'apex que dans celui de l'antiapex (§ 271).

Or c'est presque l'inverse que nous constatons.

Lumière zodiacale.

278. **Lumière zodiacale.**

1° — Voici l'observation de Cassini qui a découvert le phénomène.

Il observait le 18 mars 1683, c'est-à-dire deux jours avant l'équinoxe, vers $7^h\ 45^m$ du soir, c'est-à-dire une demi-heure après la fin du crépuscule.

A cette date le Soleil est dans la *constellation* des Poissons.

Cassini remarqua que le Bélier et le Taureau étaient beaucoup plus lumineux que d'habitude. La lumière (qui était bornée à l'occident par

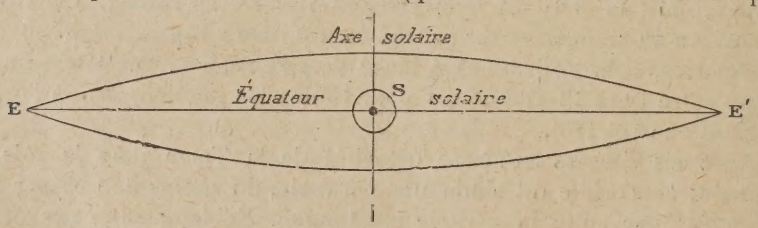


Fig. 212.

des brouillards) s'étendait le long du zodiaque, couvrait les Pléiades et finissait en pointe à la tête du Taureau.

La lumière suivit le mouvement du ciel vers l'occident, comme aurait fait un immense nuage lumineux lié au Soleil.

Cassini conclut que le Soleil possède une *chevelure*; la clarté du jour la rend invisible pendant que le Soleil est sur l'horizon. On n'en voit que les parties assez éloignées du Soleil lorsqu'il est sous l'horizon. C'est

parce que les crépuscules sont en mars les plus courts de l'année que la lumière est le plus facilement visible, le Zodiaque était alors le plus droit possible sur notre horizon. Il serait inutile de chercher la lumière zodiacale à Paris en juin et juillet où les crépuscules durent quasiment toute la nuit. De même elle est noyée dans la lumière de la Lune, particulièrement quand celle-ci est pleine.

Ainsi dès la première observation, Cassini fixe les conditions de visibilité du phénomène. Il trouve que suivant les époques, la lumière

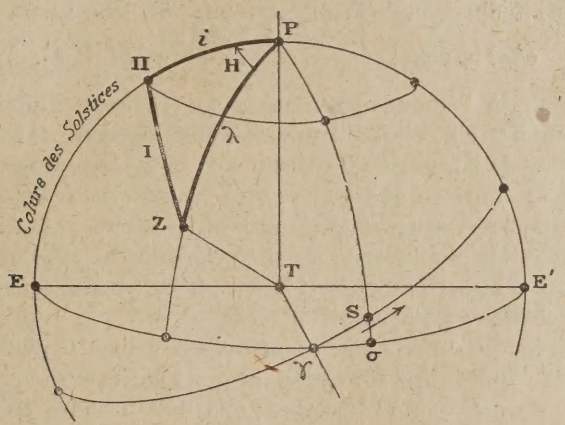


Fig. 213.

s'étend plus ou moins loin. En avril 1683 elle allait jusqu'aux cornes du Taureau.

Cassini imagine le Soleil enveloppé d'une immense lentille biconvexe lumineuse; le plan équatorial de cette lentille coïnciderait sensiblement avec le plan équatorial du Soleil qui fait 7° environ avec l'écliptique.

2° — Précisons ce que dit Cassini sur l'obliquité de l'écliptique par rapport à l'horizon. Soit λ la colatitude du lieu dont Z est le zénith ($\lambda = 41° 10'$ pour Paris); soit i l'inclinaison de l'écliptique sur l'équateur ou la distance $\overline{\Pi P}$ des pôles de ces plans (23° 27').

Dans le triangle sphérique ZΠP, on a :

$$\cos I = \cos i \,.\, \cos\lambda + \sin i \,.\, \sin\lambda \,.\, \cos H.$$

I est la distance du zénith Z au pôle de l'écliptique; c'est l'inclinaison de l'écliptique sur l'horizon du lieu.

En un jour sidéral, Π fait un tour autour de P.

I varie entre les limites $\lambda - i$ pour $H = 0$, et $\lambda + i$ pour $H = 180°$.

A Paris ces limites sont 17° 43' et 64° 37'.

Mais l'instant où l'inclinaison I prend une valeur donnée dépend de la date et de l'heure.

Soit Æ l'ascension droite du Soleil.

Le plan PΠE est le *colure des solstices.*

Le plan horaire du Soleil PS_σ fait avec lui l'angle :

$$\overline{E\sigma} = 90^\circ + \text{Æ}$$

dans le sens direct. Quand le plan PΠE fait l'angle H avec le méridien du lieu, le plan horaire du Soleil fait l'angle

$$h = H - (90 + \text{Æ}).$$

D'où pour l'inclinaison de l'écliptique sur l'horizon :

$$\cos I = \cos i \,.\, \cos\lambda - \sin i \,.\, \sin\lambda \,.\, \sin(\text{Æ} + h).$$

Par exemple, à l'équinoxe du printemps ($\text{Æ} = 0$), l'inclinaison est maxima pour $h = 90^\circ$, c'est-à-dire à 6 heures du soir.

C'est le sens de la phrase de Cassini « le zodiaque est le plus droit à l'égard de notre horizon qu'il puisse être » *pour l'heure choisie.*

Si l'on veut observer la lumière zodiacale le matin, il faut que l'inclinaison soit alors le plus grande possible. Faisons $h = 270^\circ$ ou 18 heures (6 heures du matin); pour avoir $\text{Æ} + h = 90^\circ$, il faut faire $\text{Æ} = 180^\circ$, c'est-à-dire observer à l'équinoxe d'automne.

3° — Si la lentille lumineuse a son équateur dans le plan équatorial du Soleil, il résulte du § 156 qu'on la voit par la tranche (minimum d'épaisseur) fin mai et fin novembre; elle doit prendre son maximum d'épaisseur fin février et fin août.

Il résulte du même paragraphe que fin mai la partie visible qui est à l'orient du Soleil, décline vers le nord de l'écliptique, de manière que la ligne médiane EE′ fasse un angle d'environ 7° avec l'écliptique. Effectivement en mai 1683 Cassini trouve qu'elle va jusqu'au « genouil méridional de Persée ».

279. **Origine de la lumière zodiacale.**

1° — La lumière zodiacale observée près de l'équateur s'étend fort loin du Soleil, parfois à plus de 50°. On ne peut pas la considérer comme une atmosphère du Soleil du sens que nous préciserons dans notre Cours de *Géographie mathématique*, puisqu'elle s'étend au delà des orbe de Mercure et de Vénus. Une atmosphère solaire devrait, par définition, avoir un mouvement de rotation égal à celui du Soleil; elle devrait faire un tour en 25 jours environ; dans ces conditions la force centrifuge l'emporterait sur l'attraction pour ses parties extérieures.

On est donc amené à considérer la lumière zodiacale comme due à la lumière solaire réfléchie sur de la poussière d'astre *tournant planétairement autour du Soleil.* Chacun des petits corps se meut pour son propre compte, sous l'influence de l'attraction solaire; son mouvement est du reste perturbé par l'action de tous ses compagnons. Nous verrons qu'on se représente de même la structure de l'*anneau de Saturne.*

Nous démontrerons que le rayon polaire d'une *atmosphère* au sens

strict du mot ne peut pas être au rayon équatorial dans un rapport moindre que 2 : 3, tandis que la lentille lumineuse qui envoie la lumière zodiacale, est beaucoup plus aplatie. Son rayon équatorial ne peut pas être plus grand que la moyenne distance d'un astre qui tournerait autour du Soleil en 25 jours environ; elle serait donc fort loin d'atteindre l'orbe de Mercure dont la durée de rotation est de 88 jours.

2° — La théorie précédente n'est cependant pas absolument certaine. Voici une observation de Jones qu'elle ne peut expliquer. « J'ai été assez heureux pour me trouver deux fois près de la latitude nord 23° 28′, quand le Soleil était au solstice d'hiver. Dans cette situation à minuit, l'observateur voit l'écliptique à angle droit de son horizon, allant de l'est à l'ouest. »

Reprenons la formule du § 278. Il y faut faire $h = 12^h$, $A = 18^h$.

D'où : $\qquad A + h = 30^h, \qquad \sin(A + h) = 1.$

D'où : $\qquad I = i + \lambda = 90°.$

L'écliptique coïncide donc avec le premier vertical, ce qu'une figure montre du reste immédiatement. « J'eus l'extraordinaire spectacle d'une lumière zoodiacale visible simultanément à l'horizon est et ouest, de 11 heures du soir à 1 heure du matin, plusieurs nuits consécutives. Il semble que le fait ne peut être expliqué que par un anneau nébuleux *ayant la Terre pour centre* et gisant à l'intérieur de l'orbite de la Lune. » Si grand en effet qu'on suppose l'anneau *entourant le Soleil*, s'il ne contient pas la Terre, il ne peut être visible au-dessus de l'horizon d'un observateur placé comme il vient d'être dit. Si au contraire l'anneau à la Terre pour centre, il se trouve éclairé simultanément par le Soleil sur plus de sa moitié : par suite les deux bouts d'un diamètre peuvent être simultanément visibles. Au reste Cassini avait déjà observé la lumière zodiacale à l'occident et à l'orient successivement la même nuit : l'époque la plus favorable est le solstice d'hiver. Voici son observation.

Le 4 décembre, à 6 heures et demie du soir, le Soleil étant dans la *constellation* de Scorpion, la lumière zodiacale couvrait le Capricorne et allait se perdre dans le dos du Verseau. Le 5 décembre, à $4^h\ 40^m$ du matin, la lumière zodiacale couvrait la Balance, mais ne passait pas la ceinture de la Vierge. Sa longueur à partir du Soleil était à peu près égale à la longueur qu'elle avait eu le soir en sens opposé. « Ainsi toute la longueur de la lumière entre son extrémité orientale qui avait paru le soir et l'occidentale qui paraissait le matin, était d'environ 170°.

Un anneau de 170° d'angle apparent, ayant pour centre le Soleil, doit s'étendre quasiment jusqu'à la Terre. Même conclusion que ci-dessus : ou la lentille d'astéroïdes a pour centre la Terre; ou, ayant pour centre le Soleil, il comprend l'orbe de la Terre.

Certains observateurs trouvent que la ligne moyenne du phénomène ne passe pas par le Soleil, que l'angle avec l'écliptique varie beaucoup avec la sison. Bref la théorie de la lumière zodiacale est très incertaine.

LA LUNE

CHAPITRE I

PLAN ORBITAL ET MOYENS MOUVEMENTS

Plan orbital.

280. Plan orbital.

1° — Il n'était pas difficile de reconnaître que la Lune se déplace dans le champ des étoiles, et fait un tour en un mois environ; la difficulté que le Soleil oppose à cette étude, en noyant les étoiles dans sa lumière,

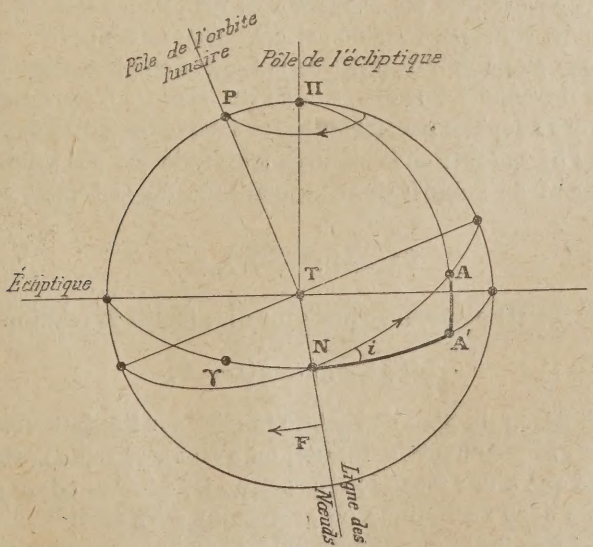


Fig. 214.

n'existe plus ici. Il n'était pas davantage difficile de reconnaître que la Lune décrit une trajectoire sensiblement plane et dont le plan, passe par le centre de la Terre, en rapportant ses positions successives sur un

globe céleste. Ces notions ont été connues de tous temps; les plus anciens philosophes n'ont pas hésité sur la nature du mouvement de la Lune.

Il s'agit de vérifier la planéité de l'orbite et de fixer la position du plan. Nous allons montrer que la Lune se meut dans un plan qui passe par le centre de la Terre et tourne autour de ce point; ce qui, à la vérité, est une manière de dire que la trajectoire n'est pas plane. Mais suivant la méthode ordinaire en Astronomie (variation des constantes), la rotation du plan étant lente par rapport à la révolution de la Lune (la Lune tourne 250 fois environ autour de la Terre pendant que le plan fait un tour), on préfère considérer la trajectoire comme plane, quitte à dire que le plan est mobile.

2° — Prenons pour plan de référence sinon absolument fixe, du moins très près de l'être, le plan de l'écliptique, plan que décrit le centre du Soleil dans son mouvement annuel apparent. La position du centre A de la Lune projeté sur la voûte céleste sera déterminée par ses coordonnées écliptiques géocentriques (fig. 214):

$$\text{la longitude } L = \overline{\gamma A'}, \qquad \text{la latitude } \beta = \overline{A'A}.$$

Supposons mesurées pour un certain instant les coordonnées équatoriales de la Lune, ascension droite et déclinaison : les formules du § 23 permettent de calculer les coordonnées écliptiques géocentriques correspondantes. Nous pouvons donc les admettre connues.

Supposons plane la trajectoire de la Lune. Son plan coupe l'écliptique suivant la droite TN qui est la *ligne des nœuds*. L'expérience montre que la Lune se déplace parmi les étoiles dans le sens direct, sens NA; N est le *nœud ascendant*; on désigne sa longitude $\overline{\gamma N}$ par symbole Ω.

Au moment de l'observation la longitude de la Lune et sa latitude sont :

$$\overline{\gamma A'} = L, \qquad \overline{A'A} = \beta.$$

Si la courbe est plane, on a pour tous les temps la relation :

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg} i \,.\, \sin(L - \Omega).$$

i est l'inclinaison du plan de l'orbite lunaire sur l'écliptique.

3° — Dès la plus haute antiquité, on s'est aperçu que l'orbite lunaire n'est plane que d'une manière approchée. La détermination du passage de la Lune dans l'écliptique ne présentant aucune difficulté (même à l'œil nu d'après les étoiles qui jalonnent l'écliptique), on a tout de suite remarqué que le nœud rétrogradait sensiblement d'un signe tous les 18 mois. Si le nœud ascendant est aujourd'hui dans le Bélier, il sera après 18 mois dans les Poissons, après 3 ans dans le Verseau, de manière à faire moyennement un tour complet en sens rétrograde (sens F) en 18 ans 2/3, plus exactement en 6 793,5 jours moyens; le tour est compté

par rapport à un équinoxe fixe. En raison de la rétrogradation de la ligne des équinoxes, la ligne des nœuds coïncide avec elle à des intervalles moyens un peu plus grands.

Comme première approximation, dans son mouvement autour de la Terre, la Lune reste donc dans un plan passant par la Terre, incliné de 5° 8′ 43″ sur l'écliptique.

Comme seconde approximation, ce plan tourne de manière que la

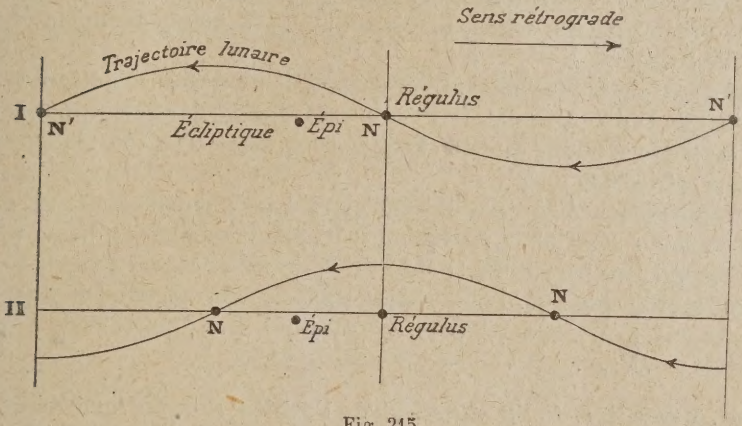


Fig. 215.

ligne d'intersection avec l'écliptique (ligne des nœuds) fasse un tour en 6 793,5 jours.

Il revient au même de dire que le pôle P du plan de l'orbite lunaire se déplace, dans le sens de la flèche, d'un mouvement uniforme, sur un petit cercle dont le centre est le pôle II de l'écliptique et dont le rayon est :

$$i = 5° 8′ 43″.$$

4° — La longitude *tropique* du nœud ascendant (c'est-à-dire comptée à partir de l'équinoxe mobile qui correspond au temps t) est :

$$259° 7′ 51″ — 69\,629″ t ;$$

t est exprimé en années juliennes à partir du midi moyen, pour le méridien de Greenwich, le 1er janvier 1900.

Réduisons tout en secondes ; nous trouvons :

$$932{\cdot}871″ — 69\,629″ t.$$

D'après cette formule le nœud ascendant coïncide avec le point vernal pour $t = 13{,}4$, c'est-à-dire au voisinage d'avril 1913.

5° — Les occultations des étoiles conduisent aux mêmes résultats. Par exemple, on constate que parfois la Lune occulte Régulus (α du

Lion) qui est en plein sur l'écliptique. Elle est évidemment alors proche de son nœud. Posons que c'est le nœud ascendant N (fig. 209, I).

Peu à peu elle cesse d'occulter Régulus, elle passe au-dessus. Quatre ans et demi après la première observation, sa trajectoire est à 5° au-dessus. Le nœud ascendant est alors à 90° de Régulus. La trajectoire s'est déplacée en bloc de 90° dans le sens rétrograde, de I à II.

La distance de l'orbite à Régulus diminue; elle s'annule neuf ans après la première observation. Quand elle occulte Régulus, la Lune est alors voisine de son nœud descendant N'; son nœud ascendant est à 180° de Régulus.

Dans sa course mensuelle la Lune passe alors au-dessous de Régulus; ... et ainsi de suite. Au bout de 18 ans deux tiers, la trajectoire projetée sur la sphère céleste a glissé le long de l'écliptique d'un tour entier dans le sens rétrograde.

Les phénomènes se reproduisent alors dans le même ordre : il sont très faciles à constater, puisqu'on voit simultanément la Lune et les repères qui sont les étoiles. Il n'est du reste pas nécessaire que la Lune occulte l'étoile pour que l'observation soit aisée sans appareil de mesure : il suffit qu'elle passe assez près. C'est ce qui arrive par exemple pour l'Épi de la Vierge.

281. **Variation de l'inclinaison de l'orbite; non-uniformité de la rétrogradation des nœuds.**

Nous trouvons ici une application des considérations du § 120.

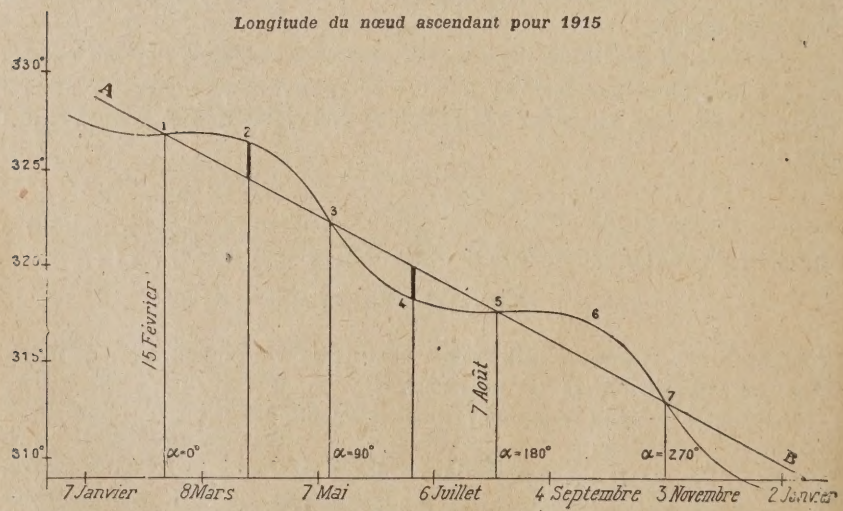


Fig. 216.

1° — Nous savons *qu'en moyenne* les nœuds de la Lune rétrogradent 3' 10",63 par jour. La courbe représentative est la droite AB de la

figure 210. Les jours sont marqués de 60 en 60; du 7 janvier 1915 au 8 mars par exemple, la rétrogradation moyenne est :

$$328° 43' 55'',3 - 325° 33' 17'',3 = 3° 10' 38'',00,$$

nombre qui est bien 60 fois le nombre ci-dessus donné.

A partir de ce nombre calculons la révolution synodique des nœuds par rapport au Soleil, autrement dit, le temps qui s'écoule entre deux passages consécutifs du Soleil par le nœud ascendant.

Le moyen mouvement solaire est *direct* et de

$$59' 8'' = 3\,548''.$$

Le mouvement relatif est

$$3\,548 + 191 = 3\,739.$$

La révolution synodique moyenne est :

$$1\,296\,000 : 3\,739 = 346^{j},62.$$

Il est facile de voir d'après la position des nœuds qu'en 1915 le Soleil

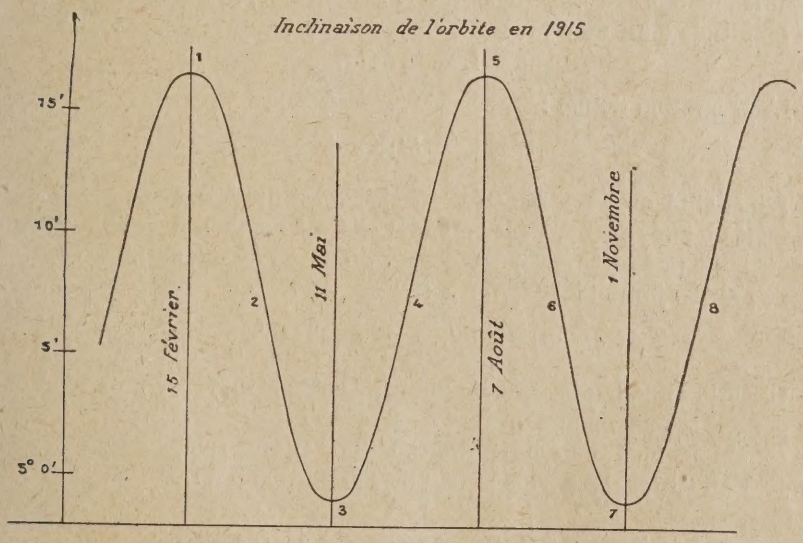


Fig. 217.

est dans le nœud ascendant le 15 février; il est dans le nœud descendant le 7 août, 173 jours après.

2° — Variation de l'inclinaison.

Déterminons les maximums de la latitude, c'est-à-dire la latitude quand la Lune est à 90° de ses nœuds : cette latitude mesure l'inclinaison, du plan de l'orbite sur l'écliptique.

L'observation prouve que l'inclinaison n'est pas constante. Elle pré-

sente une oscillation dont la période est de 173 jours et l'amplitude de 9 minutes environ. Soit α la distance en longitude du Soleil au nœud, comptée naturellement dans le sens direct.

L'inclinaison i est représentée par une formule telle que :

$$\operatorname{tg} i = \operatorname{tg} i_0 (1 + a \cos 2\alpha).$$

L'inclinaison est maxima quand le Soleil est dans les nœuds de la Lune ($\alpha = 0$, $\alpha = \pi$); elle est minima quand le Soleil est à 90° des nœuds de la Lune.

On peut exprimer la même chose sous une autre forme. Rappelons que le maximum de la latitude s'observe quand la Lune est à 90° de ses nœuds. Si alors elle est en conjonction ou en opposition (nouvelle lune ou pleine lune), l'inclinaison est voisine de 5°; en effet le Soleil est alors à 90° des nœuds. Au contraire, à l'instant où la latitude devient maxima, si la Lune est en quadrature (le Soleil est dans les nœuds), le maximum observé est de 5° 18′.

3° — Rétrogradation non uniforme des nœuds.

Si les nœuds rétrogradaient d'une manière uniforme, on aurait pour la longitude d'un nœud :

$$L = L_0 - bt.$$

L'observation donne :

$$L = L_0 - bt + c \sin 2\alpha.$$

L'inégalité ou équation (terme $c \sin 2\alpha$) est nulle quand le Soleil est dans les nœuds ou à 90° des nœuds; elle est maxima ou minima dans les octants (à 45, 135, 225, 315 degrés du nœud ascendant).

Si t est en jours moyens, on a :

$$b = 3' 10'',63 \qquad c = 1° 40'.$$

C'est dire que la plus grande *inégalité* entre le moyen mouvement des nœuds et le mouvement vrai est de $\pm$ 1° 40′.

Calculons la vitesse de rétrogradation. Il faut remplacer 2α par sa valeur en temps. La période étant de 173 jours, on a :

$$2\alpha = 2\pi \frac{t}{173}, \qquad \frac{dL}{dt} = -b + \frac{2\pi c}{173} \cos 2\alpha.$$

On vérifiera que pour $\cos 2\alpha = 1$, la vitesse est quasi nulle : la courbe représentative est horizontale. C'est ce que montre la figure 216.

282. **Représentation simultanée des deux inégalités.**

1° — Tycho qui découvrit ces inégalités, trouva qu'on peut les représenter simultanément par le déplacement du pôle sur un épicycle.

La figure 218 montre le système céleste (vue du dehors) au voisinage du pôle Π de l'écliptique. Si les inégalités n'existaient pas, le pôle P de

l'orbite lunaire décrirait autour de Π, dans le sens rétrograde, un petit cercle d'environ 5° 9′ de rayon ΠP.

Représentons en 1, 2, 3,... 9, les grands cercles dans lesquels se trouve le Soleil après 0, 1, 2,... 8, huitièmes de sa révolution synodique par rapport aux nœuds de la Lune. Au bout d'une révolution, le cercle qui contient le Soleil n'est revenu qu'en Π9 en raison de la rétrogradation PP′ des nœuds de la Lune.

Le cercle ΠA passe par le nœud ascendant au début de la révolu-

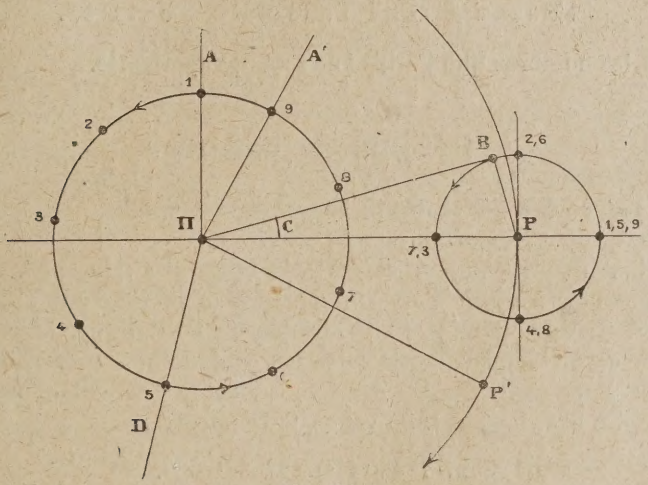


Fig. 218.

tion; le cercle ΠA′ passe par le nœud ascendant à la fin de la révolution.

Le pôle de l'orbite lunaire se déplace uniformément sur un petit cercle dont le rayon vaut 9′ environ et dont le centre P décrit uniformément le cercle ΠP. Il fait un tour en 173 jours environ, c'est-à-dire en une demie révolution synodique des nœuds.

2° — Le lecteur vérifiera que toutes les circonstances précédemment décrites sont ainsi représentées. Commençons la discussion.

Le Soleil est en 1; le pôle de l'orbite lunaire est en 1 : l'inclinaison est maxima; l'inégalité de rétrogradation est nulle puisque le pôle vrai se trouve sur le même grand cercle ΠP que le pôle moyen.

Le Soleil va de 1 à 2 : l'inclinaison diminue; elle est mesurée par la distance Π2. La rétrogradation vraie est plus petite que la moyenne, puisque le pôle va sur le petit cercle dans le sens direct. Il faut retrancher le mouvement direct sur le cercle, du mouvement rétrograde que possède le centre du cercle.

Et ainsi de suite. Le lecteur ne peut pas se tromper, les mêmes numéros d'ordre sont répétés sur les figures 216, 217, 218.

Il y a donc concordance qualitative.

3° — Vérifions la concordance quantitative. Il est clair qu'elle existe pour l'inclinaison du fait que le rayon de l'épicycle est de 9′ : la variation totale de l'inclinaison est 18′, comme les observations l'exigent.

Évaluons l'inégalité de la rétrogradation.

Elle est égale à la moitié du plus grand angle que font les grands cercles passant par Π et tangents au petit cercle.

Dans le triangle sphérique rectangle ΠPB on a :

$$\sin c = \sin 9' : \sin 5° 9' = 0{,}0291, \qquad c = 1° 40'.$$

Mais les nombres que j'utilise ne sont qu'approchés.

Révolutions lunaires.

283. **Durée des révolutions lunaires moyennes.**

1° — Révolution sidérale.

Pendant une *révolution sidérale*, la longitude géocentrique de la Lune comptée à partir d'un équinoxe fixe (à partir d'une étoile) croît de 360°. En admettant la fixité absolue de l'écliptique, la révolution sidérale est le temps compris entre les conjonctions successives de la Lune et d'une étoile (égalité des longitudes, la Terre étant prise pour origine des coordonnées). Sa valeur moyenne est :

$$27^j\,7^h\,43^m\,11^s = 27^j{,}3216609.$$

Le moyen mouvement diurne est $13° 10' 45'' = 47435''$.

Nous verrons qu'il existe une accélération séculaire de 7″,74.

2° — Révolution tropique.

Au lieu de compter les longitudes à partir d'un équinoxe fixe, comptons-les à partir de l'équinoxe vrai que nous savons variable. En raison de sa précession (*rétrogradation*), la révolution dite *tropique* est un peu plus courte que la révolution sidérale. Elle a pour valeur :

$$27^j\,7^h\,43^m\,5^s = 27^j{,}3215816.$$

3° — Révolution synodique.

C'est le temps qui s'écoule moyennement entre deux conjonctions ou deux oppositions successives du Soleil et de la Lune. Le Soleil se meut dans le sens direct et fait à peu près 1° par jour (30° ou un signe par mois). La Lune doit le rattraper : la révolution synodique est donc plus grande que la sidérale d'environ un douzième. Elle vaut :

$$29^j\,12^h\,44^m\,3^s = 29^j{,}5305881.$$

On la calcule immédiatement à partir des moyens mouvements en longitude de la Lune et du Soleil, 47 435 et 3 548 secondes.

Le moyen mouvement relatif est :

$$47\,435 - 3\,548 = 43\,887.$$

La révolution synodique est $1\,296\,000 : 43\,887$.

4° — RÉVOLUTION ANOMALISTIQUE.

C'est le temps qui s'écoule entre deux passages au périgée (à partir duquel se compte les *anomalies*). Comme le périgée lunaire est animé d'un mouvement *direct*, la révolution anomalistique est un peu plus grande que la sidérale. Elle vaut :

$$27^j\,13^h\,18^m\,33^s = 27^j,5545520.$$

5° — RÉVOLUTION DRACONITIQUE.

C'est le temps qui s'écoule moyennement entre deux passages de la Lune par son nœud ascendant (ou descendant). Le nœud *rétrogradant* d'une manière assez rapide, la révolution draconitique est la plus courte de toutes :

$$27^j\,5^h\,5^m\,36^s = 27^j,2122178.$$

Les nœuds rétrogradent à peu près deux fois moins vite que n'avance le périgée; la différence révolution sidérale — draconitique est donc à peu près deux fois moindre que la différence révolution anomalistique — sidérale.

284. **Détermination du moyen mouvement tropique.**

Je ne me lasserai pas de donner des exemples numériques; les professeurs oublient vraiment trop comment les nombres dont ils se servent, ont été déterminés; ils oublient le caractère spécial de l'Astronomie, de se faire automatiquement précise au cours des siècles. Dans deux mille ans, on établira la loi d'Ohm par l'expérience comme on le fait aujourd'hui, avec une précision qui ne dépendra que des appareils qu'on possédera. Au contraire les moyens mouvements lunaires, par exemple, sont très bien déterminés par les observations *d'une précision médiocre* que nous ont léguées les anciens. Leurs théories sont indifférentes; leurs observations sont précieuses. Naturellement on nous rase avec leurs théories, l'enseignement néglige leurs observations.

J'emprunte mes nombres à Cassini.

1° — Il utilise *d'abord* les éclipses totales suivantes de la Lune; elle était alors évidemment en opposition (fig. 137), sa longitude différait de 180° de celle du Soleil. Sa latitude était nulle, mais peu importe.

9 septembre 1718. .	$8^h\,4^m$	longitude du Soleil	166° 40′
29 août 1719.	$8^h\,32^m$	—	155° 47′

Intervalle entre les observations $354^j\,18^m$.

Chemin parcouru par la Lune (en longitude) sur l'écliptique :

$$13 \times 360° - 10°\,53'.$$

D'où pour la *révolution sidérale ou tropique* comme on voudra :

$$27^j\ 7^h\ 6^m.$$

Le résultat est grossièrement approché ; il est évidemment bien inutile de tenir compte de la variation de la ligne des équinoxes. Mais le résultat est assez approché pour permettre de comparer des observations plus lointaines sans risquer de se tromper d'une révolution.

2° — Cassini utilise alors les éclipses des :

15 mars 1699 . . . . 7h 23′ soir longitude du Soleil 355° 30′
27 — 1717 . . . . 3h 16′ matin — 6° 21′

L'intervalle est de

$$(18 \times 365 + 4)^j \quad \text{plus} \quad 11^j\ 7^h\ 53^m = 6\,585^j\ 7^h\ 53^m.$$

Divisant ce temps par $27^j\ 7^h\ 6^m$, on trouve 241 + un quart, *par suite* 241 révolutions + 10° 51′. La valeur rapprochée ci-dessus trouvée sert à fixer le nombre 241. D'où enfin pour la *durée moyenne tropique* (les longitudes sont comptées à partir de l'équinoxe mobile) :

$$27^j\ 7^h\ 43^m\ 6^s.$$

Voici déjà à 1s près le nombre actuellement admis.

3° — Cassini ne s'en tient pas là.

Il utilise une éclipse rapportée par Ptolémée qui eut lieu à Babylone le 19 mars de l'année 720 avant J.-C. et dont le milieu fut visible à 9h 20m.

La longitude de Babylone par rapport à Paris est 2h 32m.

L'heure de Paris pour le milieu de l'éclipse est donc 6h 48m.

Cassini calcule la longitude du Soleil et trouve 351° 17′.

Il compare cette éclipse à celle du

20 septembre 1717 . . . . 6h 2m longitude du Soleil 177° 34′.

Il calcule qu'entre les deux éclipses se sont écoulés :

890 288 jours moins 46 minutes.

D'où au moyen du nombre approché ci-dessus trouvé :

32 585 révolutions + 186° 12′.

On trouve ainsi pour la *révolution tropique moyenne :*

$$27^j\ 7^h\ 43^m\ 5^s,$$

qui est le nombre de la *Connaissance des Temps*. Comme on le voit, ce n'est pas sorcier, et de ne pas être sorcier, c'est plus admirable.

La *révolution tropique* qui se présente naturellement, est déterminée par la longitude à partir des équinoxes *mobiles*, équinoxes qui correspondent aux temps mêmes des observations.

285. **Détermination des autres moyens mouvements.**

Les observations précédentes fournissent encore plus immédiatement la période synodique, puisqu'elles déterminent les temps de certaines oppositions. Il devient inutile de connaître les longitudes, le nombre de périodes synodiques entre deux oppositions étant entier par définition.

Entre les deux observations de 1718 et de 1719, il y a exactement 12 lunaisons. Ce qui donne le nombre grossièrement approché :

$$29^j\,12^h\,1^m\,30^s,$$

Entre les observations de 1699 et de 1717, il y a exactement 223 lunaisons. Ce qui donne le nombre beaucoup plus exact :

$$29^j\,12^h\,44^m\,5^s.$$

Enfin l'usage de l'observation des Chaldéens donne :

$$29^j\,12^h\,44^m\,3^s,$$

qui est le nombre de la *Connaissance des Temps*.

Le lecteur voit qu'il n'y a rien de mystérieux dans ces moyens mouvements : leur précision tient simplement à ce qu'on utilise des observations très anciennes qui éliminent les inégalités périodiques.

Il est clair que, connaissant le moyen mouvement des équinoxes, on passera aisément de la révolution tropique à la révolution sidérale; connaissant le moyen mouvement de la ligne des nœuds, on calculera aisément la révolution draconitique à partir de la révolution sidérale.

Au lieu de commencer les calculs par la révolution tropique, nous aurions pu les commencer par la révolution synodique; on passe alors à la précédente grâce à la connaissance du moyen mouvement solaire.

286. **Accélération séculaire tropique et sidérale.**

1° — Les calculs précédents des moyens mouvements supposent qu'on supprime toutes les inégalités en utilisant des observations assez éloignées. C'est légitime si toutes les inégalités sont à courtes périodes; ce ne l'est pas si quelques-unes sont séculaires, autrement dit, si leur période est assez longue pour que le plus long intervalle dont nous disposions, n'en comprenne qu'une fraction.

Si les inégalités disparaissent de la moyenne, la longitude moyenne *par définition* prend la forme :

$$L = L_0 + at. \qquad (1)$$

Soit t évalué en siècles de 36 525 jours (cent années juliennes); le coefficient a sera :

$$47\,435 \times 36\,525 = 1\,732\,563\,375 \text{ secondes.}$$

L'expérience montre que la formule (1) est insuffisante : on ne trouve pas la même valeur pour les moyens mouvements en utilisant les

observations les plus anciennes et les plus récentes, ou en comparant aux plus récentes les observations arabes effectuées vers l'an 1000.

On doit poser :

$$L = L_0 + at + bt^2.$$

La *Connaissance des temps* donne la formule :

$$L = 283^\circ\,31'\,40'',20 + 1\,732\,564\,410''\,t + 8'',85\,t^2,$$

t est évalué en siècles de 36 525 jours, L est la longitude tropique, c'est-à-dire comptée à partir de l'équinoxe moyen au temps t, lui-même compté à partir du 1er janvier 1900.

Le coefficient du terme en t^2 est *fort improprement* appelé *accélération*. L'accélération au sens strict du mot est le double de ce coefficient.

On donne parfois la longitude moyenne sous la forme :

$$L = L_0 + (307^\circ\,46'\,48'')\,t.$$

On retrouve ce nombre en retranchant de la variation 1 732 564 410 secondes, le nombre de secondes qui correspond aux 1 336 révolutions complètes contenues dans un siècle. La différence est de 307° plus quelque chose. En un siècle la longitude moyenne croît donc, si l'on veut, de 307°; on néglige alors un nombre entier de fois 360°.

2° — Fixons les idées sur la diminution de la période tropique

La vitesse est, en secondes par siècle (nombres ronds) :

$$1732 \,.\, 10^6 + 17{,}70\,t.$$

En 20 siècles la variation relative de vitesse est donc :

$$354 : (1732 \,.\, 10^6) = 2{,}05 \,.\, 10^{-7}.$$

Une période tropique de la Lune contient :

$$86\,400 \times 27{,}32 = 2{,}36 \,.\, 10^6 \text{ secondes de temps moyen.}$$

En 2 000 ans l'augmentation ci-dessus calculée de la vitesse diminue donc la période tropique de :

$$(2{,}36 \times 10^6) \times (2{,}05 \times 10^{-7}) = 0^s{,}484.$$

3° — Calculons le lieu moyen de la Lune il y a 2 000 ans. Suivant qu'on utilise ou qu'on néglige le terme en t^2, les résultats diffèrent de :

$$8'',85 \times \overline{20}^2 = 3\,540'', \text{ plus d'un degré.}$$

Ce raisonnement *qu'on trouve partout*, ne signifie rien, parce que si l'on supprime le terme en t^2, on doit modifier le coefficient du terme en t.

Il vaut mieux raisonner comme suit. Calculons les observations les plus anciennes et les plus récentes au moyen de la formule :

$$L = L_0 + at.$$

Il s'en faudra de plus d'un demi-degré que les observations équidistantes de ces extrêmes soient représentées.

4° — Le moyen mouvement *tropique* de la Lune s'accélère. Nous avons montré au § 187 que si les mouvements moyens tropiques des planètes s'accélèrent, cela tient presque uniquement au déplacement de l'origine ; le coefficient du terme en t^2 est en effet à peu près le même pour les grosses planètes. Corrigeons donc l'accélération du moyen mouvement *tropique* de la Lune du déplacement de la ligne des équinoxes. Employons pour cela le coefficient du terme en t^2 dans la formule relative à la Terre ; il reste pour *accélération séculaire sidérale* de la Lune :

$$8'',85 - 1'',11 = 7'',74,$$

qui représente une véritable accélération de notre satellite sur son orbite.

287. **Époque des moyens mouvements.**

Le terme constant de la formule donnant la longitude moyenne, est l'*époque*. On le détermine de manière que la longitude moyenne soit égale à la longitude vraie à une certaine *époque par nature arbitraire*.

Mais en raison du rôle que doit jouer l'*astre moyen en longitude*, il est avantageux qu'au cours de ses révolutions, la longitude de l'astre vrai s'écarte *autant par excès que par défaut* de la longitude moyenne.

Par exemple, Cassini détermine l'*époque* des moyens mouvements de la Lune par la condition que pour les éclipses de Lune, la différence de la longitude calculée et de la longitude observée soit nulle *en moyenne*. Il choisit les éclipses comme d'une observation plus aisée et plus précise, la Lune se trouvant alors au voisinage de l'écliptique. Le milieu de l'éclipse coïncide à peu près avec l'opposition, définie comme le lieu où les longitudes géocentriques solaire et lunaire diffèrent de 180°.

En utilisant les éclipses de 1600 à 1700, Cassini détermine l'époque à une certaine date. Il *pose* que le 10 décembre 1685, à $10^h\ 38^m\ 10^s$ du soir, la longitude de la Lune *moyenne* est 79° 8′ 55″.

L'époque n'a qu'une importance très secondaire ; c'est l'origine d'un astre fictif de comparaison. Changer l'époque, c'est purement et simplement ajouter une constante à la distance en longitude de l'astre vrai et de l'astre moyen. *La valeur numérique de l'époque est purement conventionnelle.* J'insiste parce que les astronomes, se plaçant au point de vue des calculs, attachent à l'époque une importance qu'en réalité elle n'a pas.

288. **Accélération séculaire sidérale.**

Nous venons de voir qu'elle est de 7″,74 par siècle. Ces pauvres huit secondes ont bien fait couler un baril d'encre depuis un siècle.

Expliquons brièvement les raisons de leur extraordinaire importance.

1° — Si les observations anciennes sont suffisamment exactes pour

donner le moyen mouvement, elles ne le sont pas pour donner l'accélération de ce moyen mouvement. Aussi les astronomes se sont-ils livrés à des discussions sans fin pour savoir ce qu'effectivement on peut tirer des observations des Chaldéens, d'Hipparque, de Ptolémée, des Arabes, et surtout des quelques observations d'éclipses solaires *totales* qui sont relatées par les historiens grecs ou arabes. Ces dernières sont si vaguement décrites qu'on ne sait ni l'heure, ni la date, ni le lieu exact, ni même si vraiment les éclipses furent totales. A la rigueur il suffirait de savoir qu'elles furent totales et où elles ont eu lieu pour les pouvoir dater; on hésite même sur ces données, tant les documents sont incomplets.

En tous cas, de leur discussion approfondie par Newcomb et Tisserand résulte que rien ne s'oppose à ce qu'on admette pour la Lune une accélération séculaire de 7 ou 8 secondes. Cette réponse négative a été pour les astronomes un vrai soulagement. Sur l'autorité de Baily et d'Airy, on admettait en effet que, pour les représenter, il fallait attribuer à la Lune une accélération séculaire de 12 à 13″, ce qui à la vérité était conforme aux *Tables* de Hansen, les meilleures qu'on eût vers 1850, mais ce qui présentait, comme nous allons le voir, de graves inconvénients.

2° — A cette époque en effet Adams en Angleterre, Delaunay en France reprenaient la construction de tables de la Lune. Ils trouvèrent qu'étant donnée la cause du phénomène (la diminution très lente de l'excentricité de l'orbite terrestre), l'accélération séculaire ne pouvait pas être supérieure à 6″,1; ce qui était la moitié du nombre généralement admis.

Ce fut l'occasion d'un duel oratoire épique entre Le Verrier et Delaunay : ils s'engueulèrent comme des chiffonniers. Je conseille de lire ça dans les *Comptes rendus* pour 1860; c'est du plus énorme bouffon. Delaunay avait parfaitement raison et disait des choses pleines de sens.

Voici son argumentation. Que les observations anciennes exigent 13″ pour l'accélération séculaire, ne prouverait qu'un point : l'existence d'une cause, encore inconnue, autre que la diminution de l'excentricité de l'orbite terrestre. La cause que nous connaissons, est incapable de produire plus de 6″ secondes d'accélération. Les calculs de Delaunay et d'Adams, effectués par des méthodes différentes, conduisent exactement aux mêmes résultats : il est impossible de douter de leur exactitude. Aussi bien une troisième méthode antérieurement proposée par Poisson fournit elle aussi le même nombre. Au reste, ajoute Delaunay, toute la critique des observations anciennes est à refaire.

Nous avons vu qu'effectivement on ne peut rien en tirer qui soit contraire à l'opinion de Delaunay et Adams.

Mais Le Verrier considérait comme un ennemi personnel quiconque osait développer en série une fonction perturbatrice! Il apportait dans le débat une mauvaise foi évidente.

En définitive il s'en faut de peu que le nombre donné par la théorie ne soit le nombre donné par les observations anciennes correctement discutées. A supposer qu'il existe un petit excès pour le nombre déduit des observations, on peut invoquer un très petit allongement du jour provenant de l'effet des marées (§ 187). C'est même le plus grand intérêt de l'accélération séculaire de la Lune de poser le problème de la constance du jour sidéral.

CHAPITRE II

MOUVEMENTS VRAIS

Inégalités en longitude

289. **Mouvement elliptique. Equation au centre.**

Les anciens reconnurent bien vite que la Lune ne se meut pas d'un mouvement uniforme sur son orbite. On appelle *inégalités en longitude* les termes qu'il faut *ajouter* à la *longitude moyenne* pour avoir la *longitude vraie.*

Après la découverte des lois de Képler on admit pour la Lune, comme pour les planètes, un mouvement elliptique. Cherchons d'abord ce qui résulte de ce mouvement, en laissant de côté ce qui vient le compliquer.

Supposons donc l'ellipse fixe dans son plan et de forme invariable. Déterminons de jour en jour le diamètre apparent de la Lune; nous connaîtrons ainsi les instants de sa plus grande et de sa plus petite valeur : elles déterminent sur le plan de l'orbite la position du grand axe de l'ellipse et le rapport de la plus grande distance à la plus petite. Ce rapport est égal à :

$$(1+e) : (1-e) = 0{,}0549;$$

e est l'excentricité.

Voyons ce qui résulte de cette valeur de l'excentricité pour les variations de l'anomalie vraie, comptée à partir du périgée (plus courte distance) dans le plan de l'orbite.

Nous avons la formule approchée (§ 84) :

$$\theta = \omega t + 2e \sin \omega t.$$

L'inégalité qui résulte de l'ellipticité de l'orbite (équation au centre) est donc le nombre 0,1098 transformé en angle, soit 6° 14′. Cela signifie que l'anomalie vraie de la Lune, 7 jours après son passage au périgée, est plus grande de 6° (en moyenne) que l'anomalie moyenne calculée à

l'aide du moyen mouvement. L'excès diminue ensuite, s'annule 14 jours après le passage au périgée (apogée, diamètre minimum). L'anomalie vraie est ensuite en défaut, l'astre vrai est en retard sur l'astre moyen en anomalie; le retard croît, devient maximum et égal à 6° (en moyenne) 7 jours après le passage à l'apogée. Il s'annule de nouveau au périgée (diamètre maximum).

Nous avons déjà dit (§ 283) que le périgée est animé d'un mouvement direct; il parcourt un peu plus de 3° par *révolution anomalistique* de $27^j,55$.

Étudions de plus près son mouvement.

290. Mouvement oscillatoire du périgée et variation de l'excentricité.

1° — MOUVEMENT SÉCULAIRE DU PÉRIGÉE LUNAIRE.

L'observation montre que le périgée de l'orbite lunaire est animé d'un mouvement direct. La période de ce mouvement par rapport à un équinoxe fixe est de $3\,232^j\,11^h\,14^m$ soit 8 années communes et 311 jours. Par rapport à l'équinoxe mobile la période n'est plus que de $3\,231^j\,8^h\,35^m$.

Le moyen mouvement diurne est de $+\,6'\,41'',05$.

Pour déterminer le périgée on se sert des diamètres lunaires.

L'excentricité de l'orbite lunaire est $e = 0{,}0549$.

La distance à la Terre varie donc dans le rapport :

$$(1+e) : (1-e).$$

Le diamètre apparent moyen est de $1\,867''$; en raison de l'excentricité il varie de $\pm 103''$.

Avant et après le passage à l'apogée ou au périgée, on cherche les points de l'orbite pour lesquels le diamètre apparent est le même : les distances de la Lune à la Terre sont alors les mêmes.

La bissectrice de ces positions est la ligne des apsides.

2° — MOUVEMENT OSCILLATOIRE DU PÉRIGÉE; VARIATION DE L'EXCENTRICITÉ.

On connaît depuis Ptolémée une inégalité qui s'explique par l'oscillation du périgée et l'oscillation connexe de l'excentricité. Au lieu de :

$$\pi = \pi_0 + at, \qquad e = e_0 = \text{constante},$$

il faut poser :

$$\pi = \pi_0 + at + b\sin 2\zeta, \qquad e = e_0(1 + \varepsilon\cos 2\zeta).$$

ζ est l'angle de la direction TS du Soleil avec la ligne des apsides TP. La période du phénomène est la moitié du temps qui s'écoule entre deux passages consécutifs du Soleil au périgée. Or le mouvement diurne moyen du Soleil est de $3\,548''$; le moyen mouvement diurne du périgée est de $401''$. Le mouvement relatif est

$$3\,548 - 401 = 3\,147''.$$

La durée de la période cherchée est : 1 296 000 : 3 147 = 412 jours. La période du phénomène étudié est moitié moindre, soit 206 jours environ.

Le phénomène se représente en supposant que le centre de l'orbite elliptique lunaire (orbite dont la Terre occupe un des foyers) décrit uniformément en 206 jours un petit cercle dont le centre C se déplace uniformément de manière à faire un tour en 9 ans.

Le grand axe de l'orbite conservant une valeur invariable, l'excentri-

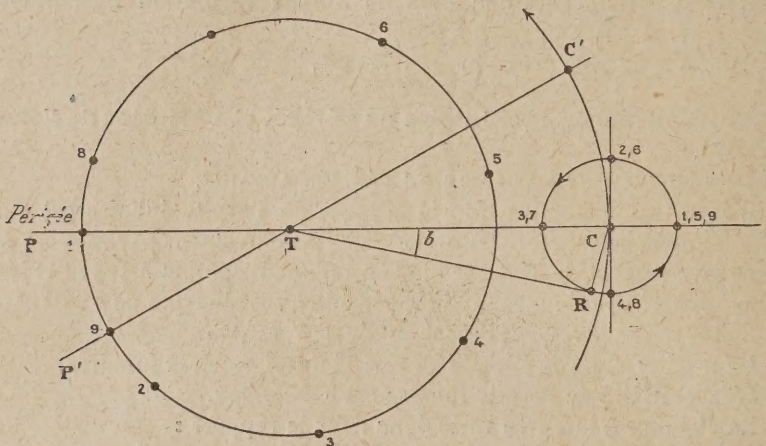


Fig. 219.

cité est représentée par la distance TR (distance du foyer au centre de l'ellipse). Si l'on prend $\overline{TC} = 549$, il faut faire $\overline{TR} = 117$.

L'inégalité maxima *b* dans la longitude est de 12° 20′.

3° — On trouve dans les anciens auteurs une manière d'exprimer le phénomène qu'il est utile d'expliquer.

La Lune est nouvelle ou pleine lorsque sa longitude géocentrique est la même que celle du Soleil ou en diffère de 180°. Quand il en est ainsi la ligne droite Terre, Soleil, projection de la Lune sur l'écliptique est ce qu'on appelle la *ligne des syzygies*. Si la Lune pleine ou nouvelle est périgée ou apogée, le Soleil est dans la ligne des apsides de l'orbite lunaire. L'excentricité de l'orbite possède alors sa valeur maxima ($\zeta = 0, 180°$).

Il revient au même de dire que l'excentricité est maxima quand la Lune est *en quadrature* (à 90° du Soleil) et dans ses moyennes distances, (à 90° de la ligne des apsides). Le Soleil est encore évidemment dans la ligne des apsides.

291. **Evection.**

1° — Nous avons dit ci-dessus que l'*équation au centre* qui résulte de l'ellipticité de l'orbite, est *moyennement* 6° 14′ = 374′.

L'excentricité variant entre les limites : $0{,}0549 \pm 0{,}0117$, l'équation au centre varie proportionnellement entre les limites 5° et 7° 28′.

La valeur à utiliser dépend de la distance angulaire actuelle du Soleil au périgée lunaire.

Cette variation de l'équation au centre se traduit par une inégalité spéciale et porte le nom d'*évection*. L'inégalité participe à la fois de la variation de l'anomalie (période 28 jours) et du déplacement solaire par rapport au périgée (période 412 jours; mais nous avons vu que la

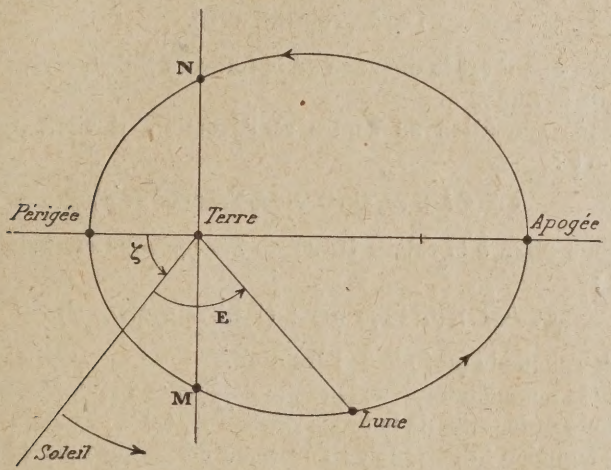


Fig. 220.

période de la variation du périgée et de l'excentricité est moitié moindre).

2° — Pendant longtemps dans le calcul de la position de la Lune, on tint compte *séparément* du déplacement de la ligne des apsides et du changement d'excentricité, ce qui compliquait singulièrement la construction des tables. Euler montra qu'un seul terme réunit les deux variations comme première approximation bien entendu.

Reprenons la formule donnant approximativement l'anomalie vraie (§ 84). Le terme périodique est $2e \sin \Theta$, où Θ est l'anomalie moyenne, supposée comptée à partir d'une origine fixe.

Explicitons la longitude du périgée ϖ.

Nous écrirons : $2e \sin (L - \varpi)$, où L est la longitude moyenne de la Lune.

Donnons à e et à ϖ de petites variations, il en résulte pour l'inégalité la variation :

$$I = 2de \cdot \sin(L - \varpi) - 2e_0 d\varpi \cdot \cos(L - \omega).$$

Remplaçons de et $d\varpi$ par leurs valeurs :

$$d\varpi = b \sin 2\zeta, \qquad de = e_0 b \cos 2\zeta.$$

L'inégalité I prend la forme :

$$2e_0 b \sin(L - \varpi - 2\zeta) = 2e_0 b \sin(\Theta - 2\zeta),$$

en rétablissant l'anomalie moyenne.

Introduisons la distance moyenne E entre la Lune et le Soleil (élongation). On a :

$$\Theta = \zeta + E, \qquad \Theta - 2\zeta = 2E - \Theta.$$

D'où la forme habituelle de l'inégalité :

$$I = 2e_0 b \sin(2E - \Theta).$$

Rappelons que E est la distance de la Lune au Soleil, Θ est l'anomalie moyenne de la Lune.

Réunissons l'équation au centre et l'évection, il vient pour l'anomalie vraie θ :

$$\theta = \Theta l + 2e_0 \sin\Theta + 2e_0 b \sin(2E - \Theta)$$

Admettons pour b la valeur $12° 20' = 740'$; posons $e = 0,0549$.

Il vient :

$$\theta = \Theta l + (6° 14') \sin\Theta + (1° 21') \sin(2E - \Theta).$$

3° — Cherchons la période de l'évection.

La période anomalistique de laquelle dépend Θ, est de $27^j,554$.

La période synodique de laquelle dépend E, est de $29^j,531$.

Conséquemment la période de l'évection est donnée par la formule :

$$\frac{1}{T} = \frac{2}{29,531} - \frac{1}{27,554}, \qquad T = 31,81 \text{ jours.}$$

Les deux termes périodiques ayant à peu près la même période, produisent des battements dont la période est précisément de 206 jours, période des oscillations de la ligne des apsides et de l'excentricité de l'orbite.

4° — L'évection s'annule pour la Lune apogée ou périgée ($\Theta = 0, 180°$), si le Soleil est en conjonction, en opposition ou en quadrature :

$$E = 0, 90, 180, 270.$$

Ptolémée avait déjà reconnu que l'équation au centre suffit à calculer la position de la Lune apogée ou périgée, à la condition que le Soleil soit sur la ligne des apsides ou à 90° de cette ligne.

Pour la Lune à 90° de la ligne des apsides (moyennes distances), l'évection est maxima quand le Soleil est en quadrature ($E = 90°, 270°$).

292. Equation annuelle.

L'inégalité dont la cause est le plus facile à découvrir, est appelée *équation annuelle*. Sa période est une année anomalistique (§ 260). Nous avons expliqué que la perturbation solaire (§ 252) est égale à la différence des actions du Soleil sur la Terre et sur la Lune. Le Soleil

diminue l'attraction terrestre sur la Lune, aussi bien quand la Lune est en L_1 que lorsqu'elle est en L_2. Cette diminution est naturellement plus grande à mesure que le Soleil est plus voisin de la Terre; nous savons qu'elle varie en raison inverse du cube de la distance.

Donc *en moyenne* (c'est-à-dire en négligeant les variations de vitesse sur chaque révolution lunaire), tout se passe comme si l'attraction terrestre était moindre au périhélie (1er janvier, anomalie solaire θ nulle)

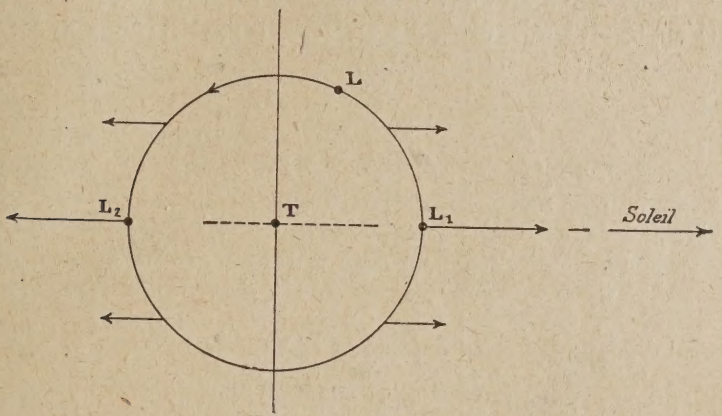


Fig. 221.

qu'à l'aphélie (1er juillet, anomalie solaire $\theta = 180°$). Le rayon moyen de la trajectoire lunaire est donc plus grand et la vitesse angulaire plus petite que la moyenne du 1er octobre ($\theta = 270°$) au 1er avril ($\theta = 90°$); le rayon est plus petit et la vitesse angulaire plus grande que la moyenne du 1er avril ($\theta = 90°$) au 1er octobre ($\theta = 270°$). C'est au 1er octobre et au 1er avril que le Soleil est à sa distance moyenne.

D'où résulte que la longitude vraie doit être le plus différente possible par défaut le 1er avril, par excès le 1er octobre, c'est-à-dire quand le Soleil est à ses moyennes distances de la Terre; la longitude vraie doit être égale à la longitude moyenne, au périhélie et à l'aphélie.

L'expérience, conforme à la théorie, montre qu'on tient compte de l'inégalité en question en posant pour la Lune :

$$\text{longitude vraie} = \text{longitude moyenne} - (11' 16'') \sin\theta;$$

θ est l'anomalie solaire moyenne comptée à partir du périhélie.

Explicitons le temps sous le sinus :

$$\text{longitude vraie} = \text{longitude moyenne} - (11' 16'') \sin\frac{2\pi t}{T}.$$

T = 365, si l'on prend le jour comme unité.

Dérivons cette formule :

$$\text{vitesse vraie en longitude} = \text{vitesse moyenne} - (11' 16'')\frac{2\pi}{T}\cos\theta.$$

Le second terme du second membre vaut à peu près :

$$-11'',6 \cos \theta.$$

Du fait de l'équation annuelle, la vitesse diurne de la Lune peut être en excès ou en défaut de près de 12″ sur la vitesse moyenne.

293. **Variation.**

1° — La variation est due à l'accélération *tangentielle* (§ 257).

En s'appuyant sur les principes ci-dessus rappelés, le lecteur vérifiera

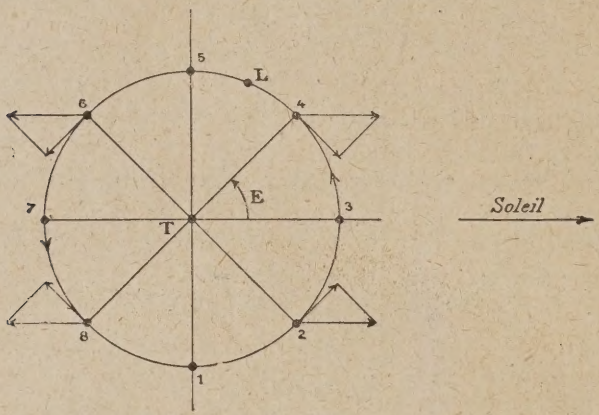


Fig. 222.

que la perturbation accélère le mouvement de 1 à 3 et de 5 à 7 (fig. 222); elle le retarde de 3 à 5 et de 7 à 1.

La vitesse est donc maxima en 3 et en 7; elle est minima en 1 et en 5 Elle est donc supérieure à la moyenne de 2 à 4 et de 6 à 8; elle est inférieure à la moyenne de 4 à 6 et de 8 à 2.

D'où résulte une inégalité de la forme $b \sin 2E$, où E est la distance angulaire de la Lune au Soleil.

L'inégalité est maxima en 4 et 8 ($E = 45°, 225°$); elle est minima en 6 et en 2 ($E = 135, 315°$).

L'observation donne

$$b = 39' 30''.$$

La période est la moitié d'un mois synodique, soit 14,77 jours. Pour $E = 0$, il y a conjonction; pour $E = 180°$, il y a opposition.

L'inégalité a donc ses plus grandes valeurs dans les *octants*.

Pour mettre la *variation* en évidence, on observe la Lune dans une position telle que l'*évection* s'annule. Par exemple, supposons la Lune à 90° du périgée ($\Theta = 90°$), et le Soleil à 45° du périgée ($E = -45°$).

La variation est maxima (en valeur absolue) : $2E = -90°$.

Mais l'évection s'annule :

$$2E - \Theta = -90° - 90° = -180°.$$

2° — L'observation seule a permis de découvrir les *quatre grandes inégalités*. Pour une première et encore très grossière approximation, nous devons poser pour la longitude (je rétablis les coefficients tels que les donnent des calculs plus exacts) :

$$\begin{aligned}
&\text{longitude vraie} = \text{longitude de l'époque} + (13^\circ\,10'\,35'')\,t\\
&\text{(équation au centre)} + (6^\circ\,17')\sin\Theta + 13'\sin 2\Theta + \dots\\
&\text{(évection)} + (1^\circ\,16')\sin(2\mathrm{E} - \Theta) + \dots\\
&\text{(variation)} + (39')\sin 2\mathrm{E} + \dots\\
&\text{(équation annuelle)} - (11')\sin\theta.
\end{aligned}$$

θ est l'anomalie moyenne du Soleil.

Nous allons voir que cette formule est encore grossièrement incomplète. A notre point de vue, peu importe. Je n'ai pas la prétention d'apprendre à mon lecteur à construire des tables de la Lune; j'ai la prétention plus haute de lui faire comprendre ce qu'est une inégalité, sans exiger qu'il dépense pour cela quelques années de sa vie.

Tables de la Lune.

294. Problème des trois corps.

1° — Soient trois corps de masse m_1, m_2, m_3, que nous assimilons à des points, c'est-à-dire dont les distances restent constamment très grandes par rapport à leurs dimensions. Ils s'attirent suivant des forces centrales proportionnelles aux produits des masses et en raison inverse du carré de la distance. A l'origine des temps, on donne leurs positions relatives et leurs vitesses en grandeurs et directions, ce qui revient à donner 18 nombres. Le problème dynamique est complètement déterminé puisque nous avons en tout 9 équations différentielles du second ordre, par conséquent 18 constantes arbitraires.

On demande de calculer pour un instant quelconque l'état du système.

Tel est l'énoncé du célèbre *problème des trois corps*.

Il est facile de poser les équations différentielles (§ 171); il est extraordinairement difficile d'en tirer la solution numérique, la seule en définitive qui nous intéresse pratiquement. Nous voulons en effet calculer les positions de la Lune à tout instant, les prévoir plusieurs siècles à l'avance (ce qui est de pure curiosité), mais surtout les calculer dans le passé pour contrôler les dates historiques au moyen des éclipses.

A la vérité il nous suffirait d'avoir une formule empirique, c'est-à-dire une série de termes en sinus et cosinus ayant pour arguments les sommes ou les différences des multiples de certaines périodes convenablement choisies. Il faudrait seulement que les coefficients de ces termes diminuassent assez vite pour rendre le calcul possible.

Mais outre que les savants répugnent à l'emploi de formules empiriques, dont les coefficients ne représentent rien, ne s'expriment pas en fonction des données mécaniques du problème, il n'est pas facile de découvrir par simple tâtonnement la forme de ces termes, surtout quand ils sont nombreux. L'arbitraire du tâtonnement s'exagère à mesure que le nombre des termes augmente; au surplus on n'est jamais sûr de ce qu'on fait; il reste dans l'esprit le doute qu'on pourrait obtenir une bien meilleure représentation avec moins de termes.

2° — On s'est d'abord contenté d'une solution bâtarde.

On a cherché la forme des intégrales développées en séries; d'où l'avantage d'être guidé dans le choix des périodes à faire entrer sous les signes sinus et cosinus. On s'est borné au nombre de termes qu'on a jugé suffisant; puis, de ces formes déterminées par la théorie, on a calculé au mieux les coefficients en s'appuyant sur un nombre suffisant d'observations aussi exactes que possible. La solution est donc théorique quant à sa forme, empirique quant à la valeur des coefficients.

En dehors des quatre grandes inégalités dont nous avons parlé ci-dessus, toutes les petites inégalités n'ont été découvertes que par l'intégration approchée des équations différentielles; les valeurs numériques de leurs coefficients n'ont été *d'abord* déterminées qu'en cherchant à représenter au mieux un grand nombre des meilleures observations.

On a procédé de cette manière au long du XVIII^e^ siècle.

Pour prendre un exemple, les formules demi-empiriques employées par Mayer ou Lalande pour calculer la longitude lunaire comprennent de 10 à 14 termes à coefficients numériques. Le résultat du calcul diffère de celui des observations de moins d'une minute.

3° — A la fin du XVIII^e^ siècle, on trouva que cette solution manquait de rigueur scientifique. Il est clair que si, à un certain instant pris pour origine, nous nous donnons les masses relatives du Soleil, de la Terre et de la Lune, leurs positions, leurs vitesses en grandeur et direction, le problème est complètement déterminé. A la seule condition qu'il soit permis de négliger les rotations et de considérer les astres comme des points (ce que prouve le raisonnement), nous pouvons nous passer de toutes observations ultérieures.

Le raisonnement est incontestable en théorie; reste à savoir ce qu'il vaut en pratique. Clairaut, d'Alembert et beaucoup d'autres doutaient qu'on parvînt jamais à fixer par la théorie seule les valeurs numériques de toutes les inégalités. Ils reconnaissaient toutefois combien peu satisfaisante était la solution qu'ils possédaient, non seulement parce que la représentation à une minute près n'a rien de remarquable, vu la précision possible des observations, mais encore parce qu'ils n'ignoraient pas les variations arbitraires qu'avaient subies les coefficients numériques des meilleures formules : rien n'assurait contre la nécessité de les rectifier, de les remanier à nouveau.

Laplace, Damoiseau, Plana, Pontécoulant, Delaunay, et plusieurs

autres savants du XIXe siècle montrèrent la possibilité de déduire les valeurs numériques des coefficients des seules données strictement suffisantes à la fixation du problème.

4° — Mais on peut se proposer la solution sous deux formes théoriquement très différentes : ou bien on se contente, à partir des données strictement suffisantes, de déterminer numériquement les coefficients des séries résolvant le problème; ou bien on se propose d'obtenir les expressions *littérales* des coordonnées de la Lune qui conviennent à tous les temps et n'aient besoin, pour être converties en tables, que de la substitution des valeurs numériques des éléments que la théorie doit nécessairement emprunter à l'observation.

Dans le premier cas on fait la *théorie de la Lune*, dans le second on fait la *théorie générale d'un satellite*. Vous et moi nous nous contenterions parfaitement de la première solution; convenons qu'un mathématicien ne peut décemment s'en déclarer satisfait : il ajouterait plutôt un satellite pour avoir le *problème des quatre corps*.

Dans le premier cas, les calculs sont numériques: dans le second on travaille sur des formules littérales, ce qui double à peu près le labeur.

Tout le monde conviendra que la théorie où les coefficients sont exprimés littéralement, est plus satisfaisante pour l'esprit, ne serait-ce que dans l'incertitude de la valeur exacte des éléments numériques strictement nécessaires pour construire les tables. Si l'on se borne à calculer les coefficients à partir de certaines valeurs choisies au mieux *à l'époque où l'on effectue les calculs*, tout le travail est à recommencer si l'on juge que certaines valeurs différentes seraient préférables, puisqu'on n'a pas conservé trace de la manière dont les coefficients se déduisent des données fondamentales ou se déduisent les uns des autres. Au contraire le calcul nouveau des coefficients est facile quand on connaît leurs expressions littérales.

En définitive *faire une théorie de la Lune*, c'est aujourd'hui chercher l'intégrale des équations du § 171 sous forme de séries en sinus et cosinus. Les arguments de ces lignes sont les sommes ou les différences des multiples de certains arguments élémentaires (en petit nombre). Les coefficients des divers termes sont exprimés littéralement en fonction des éléments strictement nécessaires pour que le problème soit dynamiquement défini.

5° — Le lecteur se tromperait étrangement s'il croyait qu'une telle théorie est unique. Elle serait unique si tous les auteurs s'étaient astreints à employer les mêmes coordonnées. Mais outre que chacun, toujours pour les meilleures raisons du monde, les a choisies autrement que les autres, rien ne force à poser que les arguments des sinus et des cosinus y varient proportionnellement au temps. On peut trouver plus avantageux de développer les perturbations suivant des formules où les arguments des sinus et des cosinus sont, par exemple, les anomalies vraies ou les anomalies excentriques des astres perturbateurs. Ces

quantités ne varient pas proportionnellement au temps. Peu importe, si l'on possède des développements assez rapidement convergents qui permettent de calculer les variables auxiliaires. Le calcul se fait alors en deux temps : on calcule d'abord les variables; on les substitue dans les formules donnant la grandeur cherchée.

De là résulte la possibilité de théories ayant des formes très différentes.

295. **Approximations aujourd'hui nécessaires.**

Ce que nous venons de dire de la Lune s'applique naturellement aux planètes. On imagine difficilement ce que représente de calculs l'établissement des formules permettant une précision comparable à celle des observations. Assurément ces formules sont belles; les gens qui les établissent méritent qu'on les pavoise de rubans et de titres honorifiques; toutefois, sauf pour les mathématiciens de profession, elles ne représentent pas l'ombre d'une idée nouvelle. Nous avons des équations faciles à poser; on cherche des solutions sous forme de séries de sinus et de cosinus dépendant des anomalies vraies, moyennes ou excentriques; les termes sont rangés suivant les puissances croissantes des excentricités et des inclinaisons qu'on suppose petites.

Le lecteur saura que le développement général de la fonction perturbatrice (§ 176) donné par Le Verrier contient 469 termes périodiques. Quand il s'agit de trouver la marche d'une planète, on applique ce développement successivement à la planète étudiée et aux divers astres perturbateurs.

Pour la Lune la difficulté s'accroît en raison de la rapidité de son mouvement dans le Ciel. Elle exagère les perturbations des planètes. D'où la nécessité de pousser plus loin le calcul des perturbations. Il faut de 20 à 30 ans de travail forcené pour construire une théorie de la Lune, à la condition bien entendu d'avoir des dispositions spéciales pour ce genre d'occupations. On considère aujourd'hui comme la plus complète la théorie de Delaunay.

Les inégalités de la longitude calculées par Delaunay sont au nombre de 452; les inégalités de la latitude au nombre de 419. Le nombre des termes partiels qui entrent dans la composition des inégalités (qui forment les coefficients des sinus et des cosinus) sont 1801 pour la longitude, 1407 pour la latitude.

Cela ne veut pas dire que les inégalités *de périodes différentes* sont aussi nombreuses. Mais étant données les variables $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, les sinus et cosinus contiennent en arguments $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots$; $\beta, 2\beta, 3\beta, \ldots$; $\alpha - \beta, 2(\alpha - \beta), \ldots$; $2\alpha - \beta, 2\beta - \alpha, \ldots$; d'autre part les coefficients sont formés de sinus et de fonctions algébriques du temps.

296. **Solution du problème des trois corps.**

Le lecteur a peut-être entendu dire que dans ces dernières années,

on a résolu le *problème des trois corps* : ce fut pour les mathématiciens un événement considérable. Mais il a pu lire dans les journaux de l'époque l'interview du plus intelligent mathématicien français qui, interrogé sur les conséquences pratiques d'une si belle découverte, n'a pu cacher qu'elles étaient nulles. Expliquons en quelques mots un aussi déconcertant paradoxe ; nous comprendrons par surcroît le genre de labeur auquel les mathématiciens se livrent aujourd'hui et la parfaite inutilité de leurs travaux pour l'avancement des sciences de la nature.

Les développements en série utilisés en Astronomie contiennent des fonctions périodiques du temps ; mais les inégalités séculaires sont représentées par des développements suivant les puissances croissantes du temps. Il est clair que le temps variant de $-\infty$ à $+\infty$, ils ne peuvent être convergents.

Pour avoir une solution satisfaisante, il faudrait donc posséder des développements convergents. *A priori* cela n'est pas impossible ; il suffit de supposer que les solutions sont des fonctions d'une variable auxiliaire x, développées suivant les puissances de cette variable qu'on assujettit à ne varier qu'entre ± 1 ; dans ces conditions les séries peuvent être convergentes. Il suffit d'admettre, d'autre part, que le temps est lié à la variable auxiliaire x de manière que x allant de -1 à $+1$, t aille continûment de $-\infty$ à $+\infty$. Le problème consisterait à calculer x à partir de t, puis à substituer x dans les développements convergents : d'où les valeurs des coordonnées des trois corps pour tous les temps passés et futurs.

La solution du problème des trois corps consiste à démontrer l'existence de ces développements convergents en fonction d'une variable auxiliaire, et à choisir la forme de cette variable auxiliaire.

Il n'y a qu'un malheur.

Je transcris une phrase de M. Émile Picard :

« En tout cas les formules [de M. Sundmann] paraissent impropres à mettre en évidence le caractère à peu près périodique de tant de phénomènes astronomiques, que les séries de type trigonométrique mettent, malgré leur divergence, si bien en évidence. » En d'autres termes, ces formules sont aussi peu intéressantes *au point de vue pratique* que le développement d'un sinus quand les arcs ne sont pas très petits. De même que personne ne lâcherait le sinus pour prendre son développement (qui est cependant parfaitement convergent), personne n'abandonnera les développements actuellement utilisés, malgré qu'ils ne soient pas. Quand ils ne représenteront plus suffisamment les phènomènes (dans quelques dizaines de siècles, vu la grandeur des coefficients des termes en t^2, t^3), on modifiera ces coefficients ; et tout sera dit.

Il va de soi que la beauté de la découverte mathématique de M. Sundmann ne fait pas question ; posons qu'elle est merveilleuse. Mais tant que les mathématiciens ne nous donneront pas autre chose, j'aurai le droit de dire que ce qu'ils font n'intéresse pas les physiciens.

Au reste le problème des trois corps n'est pas celui qui se pose en Astronomie, sauf pour la Lune; il y a toujours n corps en présence. Il faudrait résoudre le problème des n corps : une solution dans le genre de celle de M. Sundmann nous est encore plus indifférente, s'il est possible.

Ascensions droites et déclinaisons de la Lune.

Pour ne pas interrompre mon exposé, j'ai toujours raisonné par rapport à l'écliptique et au plan orbital de la Lune. Toutefois les données immédiates des observations sont *aujourd'hui* les coordonnées équatoriales, *ascension droite et déclinaison*. En lisant les paragraphes qui suivent, le lecteur comprendra pourquoi je n'en aie pas encore soufflé mot. Si les données immédiates sont aujourd'hui les ascensions droites et les déclinaisons, elles fournissent des résultats *bruts* d'une complication infinie, à partir desquels on n'aurait jamais rien découvert de simple.

Il est fort heureux que les anciens aient abordé le problème directement sur les coordonnées écliptiques. Du reste avec leurs mathématiques rudimentaires, ils n'auraient pu que difficilement passer des unes aux autres.

297. **Inclinaison du plan orbital sur l'équateur.**

1° — La figure 223 représente les pôles : E de l'équateur, Π de l'écliptique, P du plan orbital de la Lune. La longitude du nœud ascendant

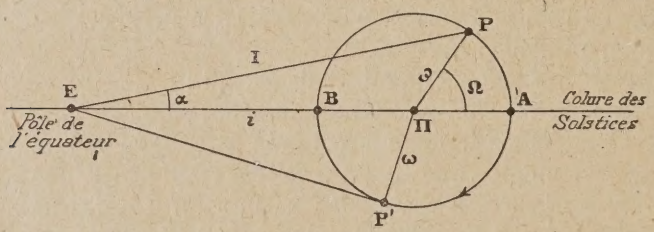


Fig. 223.

est représentée par l'angle Ω que fait le colure des solstices (grand cercle EΠA) avec le grand cercle ΠP.

L'inclinaison actuelle du plan orbital lunaire sur l'équateur est $I = \overline{EP}$:

$$\cos I = \cos i' . \cos\omega + \sin i . \sin\omega . \cos\Omega.$$

Ainsi l'inclinaison I est variable entre un maximun $\overline{EA} = i + \omega'$ et un minimum $\overline{EB} = i - \omega$.

Quand la ligne des nœuds coïncide avec la ligne des équinoxes et

quand le nœud ascendant coïncide avec le point vernal, γA est l'orbite lunaire projetée sur la sphère céleste vue du dedans. Elle est inclinée sur l'équateur de :

$$23° 27' + 5° 9' = 28° 36'.$$

Après un demi-tour de la ligne des nœuds sur l'écliptique, elle revient

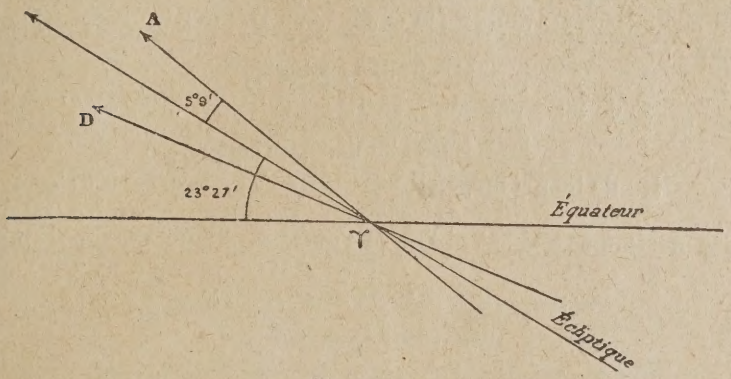


Fig. 224.

en coïncidence avec la ligne des équinoxes. Le nœud descendant coïncide avec le point vernal; γD est l'orbite lunaire projetée sur la sphère céleste vue du dedans. Elle est inclinée sur l'équateur de :

$$23° 27' - 5° 9' = 18° 18'.$$

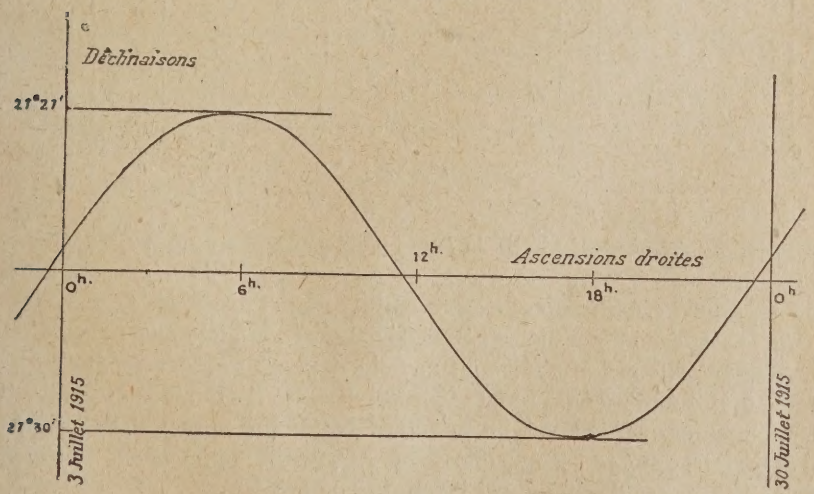


Fig. 225.

2° — Nous savons que le tour complet s'effectue en 18 ans 8 mois environ. Il résulte de ce qui précède que le maximum maximorum de la déclinaison est de 28° 36′ et le minimum minimorum de 18° 18′. Ils se

produisent lorsque la Lune est à 90° de ses nœuds, et lorsque simultanément les nœuds se trouvent sur la ligne des équinoxes : la longitude du nœud ascendant est 0 ou 180°. Il revient au même de dire qu'ils ont lieu quand la déclinaison est maxima ou minima pour la longitude 90 ou 180° de la Lune.

Par exemple je trouve dans la *Connaissance des Temps* pour 1915 les deux maximums suivants de la déclinaison D, pour les longitudes L de la Lune :

Mercredi 27 janvier.

3^h de temps moyen $D = 27° 58' 12''$ $L = 84° 43' 2''$

Lundi 20 décembre.

12^h de temps moyen $D = 26° 57' 11''$ $L = 82° 9' 37''$.

Ces maximums ne sont ni l'un ni l'autre maximum maximorum ; cor-

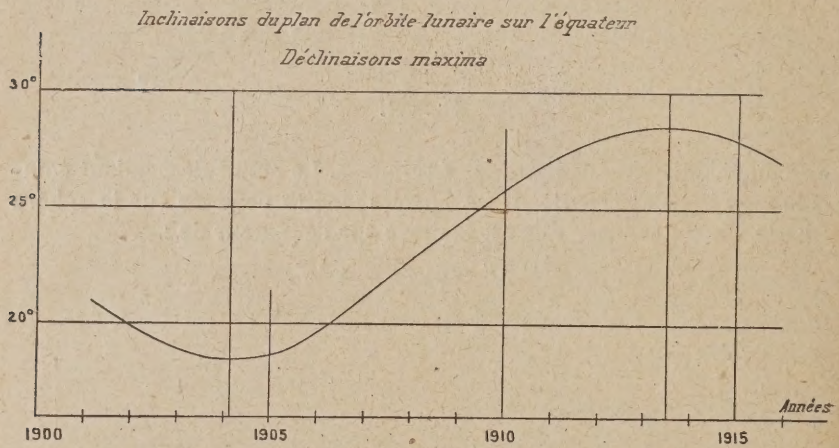


Fig. 226.

rélativement la longitude de la Lune n'est pas 90° au moment où ils se produisent. Le maximum s'écarte de sa plus grande valeur possible à mesure que la longitude correspondante diffère davantage de 90°.

3° — Reprenons les mêmes considérations sous une autre forme.

Pendant que la Lune fait un tour, elle est tantôt au-dessus de l'équateur, tantôt au-dessous. Dans le premier cas les déclinaisons sont positives comme pour le Soleil entre l'équinoxe de printemps et l'équinoxe d'automne ; dans le second elles sont négatives, comme pour le Soleil entre l'équinoxe d'automne et l'équinoxe de printemps.

Représentons en abscisses les ascensions droites, en ordonnées les déclinaisons. Au cours d'une lunaison nous trouvons une courbe analogue à une sinusoïde (fig. 225).

Recommençons ce travail pour une série de lunaisons. Nous trou-

vons une série de courbes dont les maximums oscillent entre les limites que nous avons ci-dessus posées.

Pour chaque révolution sidérale lunaire, le maximum de la déclinaison donne l'inclinaison I du plan de l'orbite sur l'équateur. Représentons ces maximums en fonction de Ω, c'est-à-dire du temps; nous obtenons une courbe *analogue* à une sinusoïde (fig. 226).

298. **Ascension droite du point de déclinaison nulle.**

1° — Cherchons l'ascension droite du point M où la Lune traverse

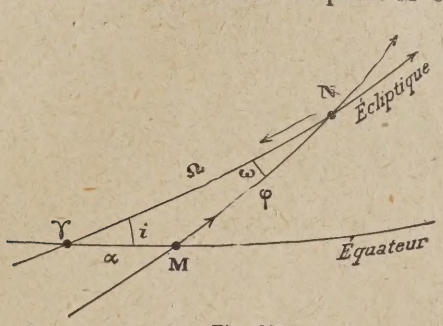


Fig. 227.

l'équateur. Montrons que, malgré le déplacement continu de la ligne des nœuds sur l'écliptique, ce point oscille sur l'équateur autour de la ligne des équinoxes, sans s'en écarter beaucoup.

La figure 227 représente une portion de la sphère céleste vue du dehors, tandis que pour la figure 224, l'observateur est censément sur la Terre.

$\alpha = \overline{\gamma M}$, est l'ascension droite du point M de déclinaison nulle.

Le triangle sphérique γNM donne :

$$\sin\alpha = \frac{\sin\omega}{\sin i}\sin\varphi.$$

ω et i sont constants; la valeur maxima de α a donc lieu pour

$$\varphi = \pm 90^\circ :$$

$$\sin\alpha = \pm\sin\omega : \sin i = \pm 13^\circ.$$

2° — Ainsi malgré le déplacement continu des nœuds sur l'écliptique, les ascensions droites des positions de la Lune pour lesquelles la déclinaison s'annule, restent voisines de 0^h pour le passage des déclinaisons négatives aux positives, de 12^h pour le passage des déclinaisons positives aux négatives.

α s'annule lorsque la ligne des nœuds coïncide avec la ligne des équinoxes ($\Omega = 0$ ou $= 180^\circ$).

Pour fixer les idées, j'ai représenté depuis 1901 l'ascension droite en

minutes de temps du point M pour lequel la déclinaison de la Lune s'annule en passant du négatif au positif.

Le maximum est voisin de 50 minutes (fig. 228).

Conformément à la figure 226, les nœuds de l'orbite lunaire sont sur la ligne des équinoxes en janvier 1904 et en avril 1913.

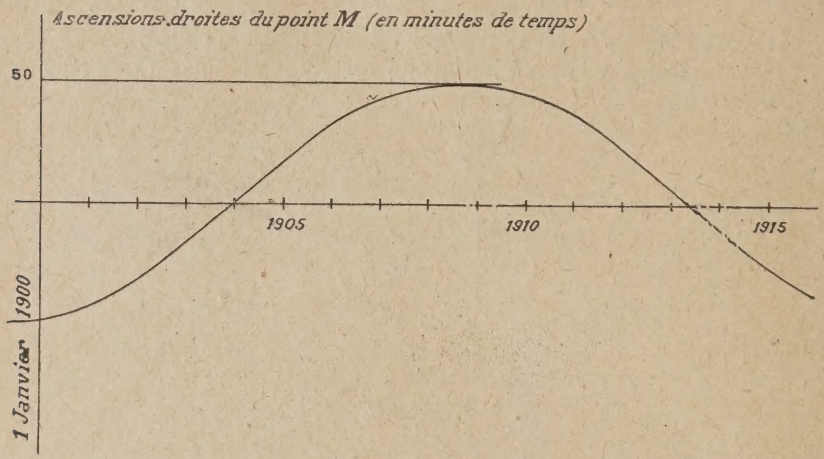


Fig. 228.

3° — On obtient naturellement le même résultat, mais avec plus d'évidence, sur le triangle polaire EΠP (fig. 223).

Le triangle est supposé vu du dehors.

Le triangle rectangle EΠP′ donne pour le maximum de α :

$$\sin\alpha = \pm \sin\omega : \sin i.$$

Il va de soi que le lieu du maximum de déclinaison (qui est à 90° de l'intersection du plan orbital avec l'équateur) oscille autour de l'ascension droite 6 heures ; le lieu du minimum de déclinaison oscille autour de l'ascension droite 18 heures.

Les 13 degrés trouvés plus haut correspondent à 52 minutes de temps. Le lieu du maximum de déclinaison oscille donc entre $5^h\ 8^m$ et $6^h\ 52^m$; le lieu du minimum oscille entre $17^h\ 8^m$ et $18^h\ 52^m$.

Pour le maximum maximorum ou le minimum minimorum l'ascension droite est 6^h ou 18^h.

299. **Jour lunaire moyen, jour lunaire vrai.**

1° — Appelons *jour lunaire vrai* le temps qui s'écoule entre deux passages consécutifs de la Lune au méridien.

Représentons les variations du jour lunaire d'un jour à l'autre pour les mois de janvier et de février 1915.

Voici les heures des passages au méridien de Paris en temps moyen; je ne conserve que les minutes :

1er janvier . .	$12^h\,30^m$	Différence	5	$15^h\,46^m$	46^m
2 — . .	12 22	52^m	6	16 32	46
3 — . .	14 12	50	7	17 18	46
4 — . .	15 0	48	8	18 6	48

Et ainsi de suite.

Calculons le *jour (lunaire) moyen.*

Le mouvement relatif moyen (en longitude) du Soleil et de la Lune est (§ 283), 3° :

$$43\,887'' = 12°\,11'\,27''.$$

Les astres faisant évidemment le même nombre de tours en ascen-

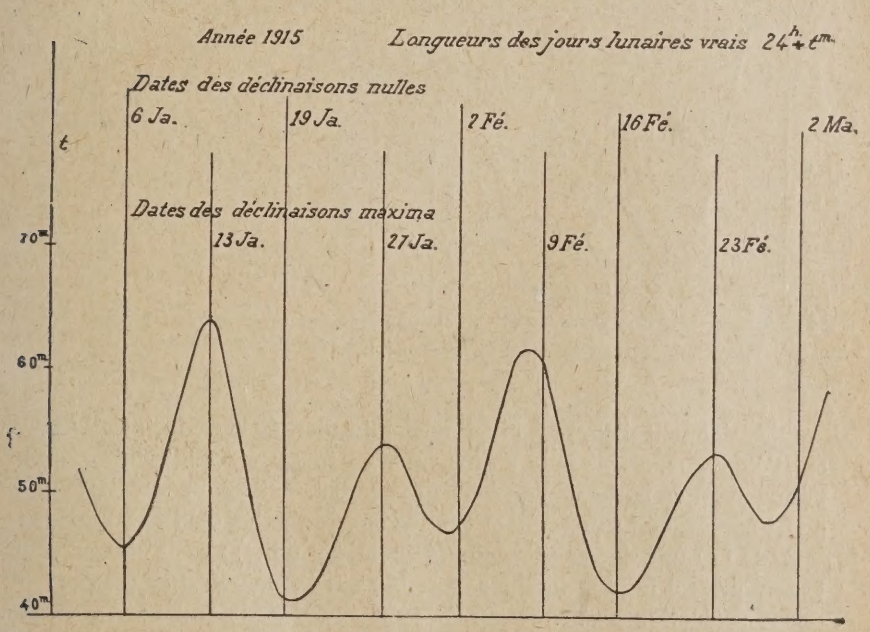


Fig. 229.

sion droite qu'en longitude, nous avons le même mouvement relatif moyen sur l'équateur.

Ainsi la Lune et le Soleil moyens en ascension droite étant simultanément au méridien, après un jour de temps moyen, le Soleil moyen revient dans le méridien, la Lune moyenne en est encore à 12° 11′ 27″.

Si la Lune se déplaçait aussi vite que le Soleil moyen, il lui faudrait $48^m\,46^s$ pour arriver au méridien. Mais sa vitesse est à celle du Soleil comme 360 — 12,2 est à 360, soit comme 0,966 est à 1.

Le jour lunaire moyen est donc :

$$24^h\ 50^m\ 29^s.$$

La figure 229 montre à quel point le jour vrai diffère du moyen. Entre les passages au méridien du 11 au 12 janvier et du 12 au 13 s'écoulent $24^h\ 64^m$ (la figure supprime les petites irrégularités) ; entre les passages du 19 au 20 et du 20 au 21, s'écoulent $24^h\ 41$ minutes.

Entre le minimum et le maximum, pour l'intervalle de temps considéré, la différence est de 23 minutes.

2° — Voyons à quoi tiennent ces variations énormes et fort irrégulières en apparence. Nous allons retrouver les considérations du § 130.

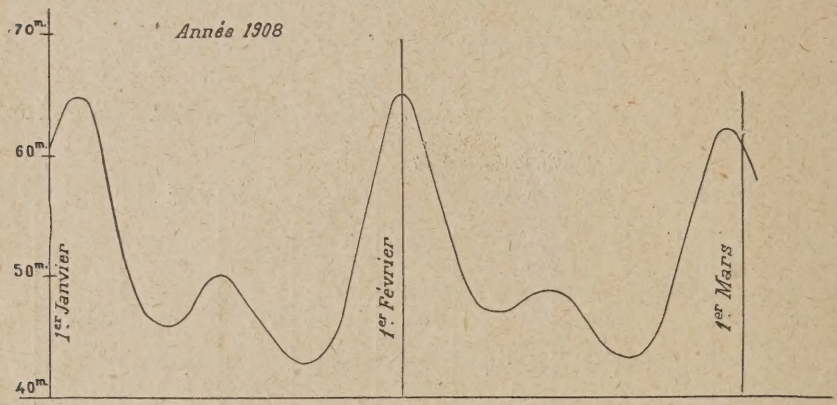


Fig. 230.

Elles tiennent d'abord à l'inclinaison du plan de la trajectoire lunaire sur l'équateur. Même si le mouvement en longitude était uniforme, le mouvement en ascension droite ne le serait pas. Le jour lunaire le plus court correspond évidemment (toutes choses égales d'ailleurs) au passage de la Lune dans l'équateur (déclinaison nulle) : c'est alors que la trajectoire est le plus inclinée possible sur l'équateur, par conséquent que la projection sur l'équateur du mouvement de la Lune à travers les étoiles est le plus petite possible.

Au contraire quand la déclinaison est maxima, la Lune se meut parallèlement à l'équateur : son mouvement propre se projette en vraie grandeur. D'un jour à l'autre l'ascension droite varie au maximum : le jour passe par un maximum.

3° — Si seule intervenait l'inclinaison du plan orbital sur l'équateur, les maximums seraient, sinon égaux entre eux, du moins peu variables ; de même pour les minimums. Ce n'est pas ce que montre la figure 229. Les maximums sont nettement plus grands et plus petits de deux en deux, de même pour les minimums.

Cela tient à ce que le mouvement angulaire sur l'orbite est fort loin d'être uniforme.

Le lecteur voit maintenant la complexité du phénomène : il dépend des positions relatives de l'intersection du plan de l'orbite avec l'équateur, et de la ligne des apsides dans le plan de l'orbite. Autant dire que chaque mois donne une figure particulière, jamais la même.

La figure 230 représente les jours vrais au début de 1908; l'échelle est la même que dans la figure 229. Un des maximums a quasiment disparu.

Évidemment nous sommes loin du jour moyen de $24^h\,50^m\,29^s$.

Ces figures montrent bien la brusquerie des variations: en 4 jours

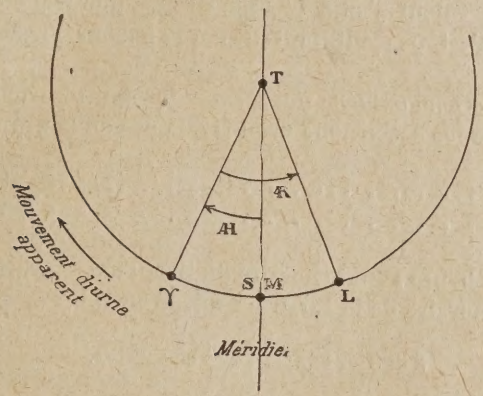


Fig. 231.

l'excès du jour vrai lunaire sur 24 heures de temps moyen passe de 43^m à 65^m.

4° — CALCUL DE L'HEURE DU PASSAGE AU MÉRIDIEN.

On donne l'ascension droite de la Lune tous les jours à midi moyen; on demande l'heure de passage au méridien.

Ce problème montre l'emploi du *Temps sidéral à midi moyen.*

Soit à calculer l'heure du passage au méridien de Paris le 16 avril 1915.

La *Connaissance des Temps* nous apprend qu'à midi moyen le 16 avril le *temps sidéral* (angle horaire du point vernal) est $1^h\,34^m\,10$. Ce même 16 avril à midi moyen l'ascension droite de la Lune est $2^h\,54^m\,21^s$. La distance de la Lune du méridien est donc $1^h\,20^m\,11^s$.

Il serait faux de dire que la Lune passera au méridien à $1^h\,20^m\,11^s$ du soir, parce que sa vitesse en angle horaire n'est pas celle du Soleil moyen; son angle horaire ne varie pas de 15° par heure de temps moyen.

Évaluons donc sa vitesse horaire. Pour cela utilisons les données suivantes :

16 avril à midi moyen. . . . . $\text{Æ} = 2^h\,54^m\,21^s$
17 — — . . . . . $\text{Æ} = 3\;\;44\;\;13$

Donc au lieu que son angle horaire augmente de 24^h en 24 heures de temps moyen, elle n'a tourné que de $23^h\,10^m\,8^s = 83\,408$ secondes.

Sa vitesse horaire est inférieure à celle du Soleil moyen dans le rapport $834 : 864 = 1 : 1{,}036$.

Donc pour tourner de l'angle :

$$1^h\,20^m\,11^s = 4\,811^s,$$

elle mettra : $4\,984^s = 1^h\,23^m\,4^s,$

nombre très approché du nombre exact $1^h22^m45^s$.

Mais dans ce calcul j'admets une vitesse uniforme en ascension droite, ce qui n'est pas suffisant dès qu'on veut l'exactitude de la seconde.

A la vérité la *Connaissance des Temps* permet un calcul plus exact puisqu'elle donne les ascensions droites d'heure en heure :

0^h. . . . . $\mathrm{A} = 2^h\,54^m\,21^s$
1 . . . . . $\mathrm{A} = 2\;\;56\;\;23$

Pendant cette heure l'angle horaire du Soleil moyen varie de 3 600 secondes; l'angle horaire de la Lune ne varie que de :

$$3\,600 - 122 = 3\,478 \text{ secondes.}$$

Le rapport des vitesses est 1,035, plus exact que le rapport utilisé ci-dessus.

5° — Remarque.

Le jour lunaire étant (en moyenne) de 50 minutes plus grand que le jour solaire moyen, certaines dates ne voient pas la Lune passer au méridien. Il suffit pour cela qu'elle y soit passé à la date n un peu avant midi; elle y repassera à la date $n+2$ un peu après midi (temps astronomique). Si nous raisonnons dans le temps civil (le jour commence à minuit), on remplacera midi par minuit.

Par exemple, la Lune passe au méridien le 28 avril 1915 à $23^h\,7^m$ ($11^h\,7^m$ du soir).

Elle n'y passe pas le 29.

Elle y repasse le 30 avril à minuit 5^m ($0^h\,5^m$).

Pour la même raison, certaines dates n'ont pas de lever de Lune, d'autres n'ont pas de coucher.

300. **Calcul approché de la variation du jour lunaire vrai.**

1° — Il est intéressant de faire pour le jour lunaire ce que nous faisons aux §§ 128 et 129 pour le jour solaire.

L'obliquité du plan de l'orbite lunaire sur l'équateur terrestre a pour valeur moyenne $23°\,27'$; elle varie entre $23°\,27' \pm 5°\,9'$.

A partir de cette donnée, calculons l'équation de quinzaine pour l'ascension droite, par la méthode du § 128. On a :

$$\cos(18^\circ 18') = 0{,}949 = 1 - 0{,}051, \qquad p = 88'$$
$$\cos(23^\circ 27') = 0{,}917 = 1 - 0{,}083, \qquad p = 143'$$
$$\cos(28^\circ 36') = 0{,}878 = 1 - 0{,}122, \qquad p = 210'$$

en posant : $$\text{Æ} = \omega t - p \sin 2\omega t.$$

La variation qui résulte de cette formule pour le jour lunaire, est :

$$\frac{d\text{Æ}}{dt} = \omega - 2\omega p \cos 2\omega t.$$

Prenons pour période :

$$2\pi : \omega = 27{,}32 \text{ jours}; \qquad \omega = 0{,}230.$$

Les trois valeurs $2\omega p$ sont :

en angles		en temps	
	$2\omega p = 41'$		$2^m 44^s$.
	$= 66'$		$4\ 24$
	$= 97'$		$6\ 28^s$

2° — Passons à la seconde cause principale de variation du jour vrai lunaire, l'excentricité de l'orbite. Admettons l'excentricité :

$$e = 0{,}0549.$$

L'équation au centre est :

$$\theta = \omega t + 0{,}1098 \,.\, \sin \omega t = \omega t + 378' \sin \omega t.$$

D'où :

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega + 378'\, \omega \sin \omega t = \omega + 87' \sin \omega t.$$

Transformé en temps le coefficient de $\sin \omega t$ vaut $5^m 48^s$.

Les deux inégalités sont décalées l'une par rapport à l'autre d'une manière variable. Au surplus l'une est en ascension droite, l'autre en anomalie. Mais pour le but que nous poursuivons, il suffit de les superposer.

Nous déduisons de là comme plus grand écart à la moyenne en un sens ou en l'autre :

$$6^m 28^s + 5^m 48^s = 12^m 16^s.$$

L'écart entre le jour vrai maximum maximorum et le jour vrai minimum minimorum peut donc dépasser 24 minutes.

Ce calcul, grossièrement approché, étant données les multiples inégalités de la Lune, fournit cependant une bonne approximation.

3° — L'ordre de grandeur de la variation du jour vrai n'est pas le même pour la Lune et pour le Soleil. Cela tient évidemment à ce que l'obliquité de l'orbite sur l'équateur terrestre peut devenir plus grande pour la Lune, et à ce que l'excentricité de l'orbite est trois fois plus grande environ.

Mais cela tient surtout à ce que dans la différentiation, nous multiplions les coefficients de l'inégalité par ω qui est environ 13 fois plus grand pour la Lune que pour le Soleil. En effet la période de révolution sur son orbite est environ 13 fois plus courte pour la Lune.

301. Levers et couchers de la Lune.

1° — Calculons la variation diurne de la déclinaison lunaire.

L'arc θ parcouru sur l'orbite en un jour est moyennement de $13° 11'$.

Soit i l'inclinaison du plan de l'orbite. Près de la ligne d'intersection des plans de l'orbite et de l'équateur, on a pour variation de la déclinaison diurne ΔD :

$$\Delta D\ (= \sin \Delta D) = \sin i \,.\, \sin(13° 11') = 0{,}228 \,.\, \sin i.$$

D'où pour les inclinaisons extrêmes du plan de l'orbite sur l'équateur :

$$i = 18° 18', \qquad \Delta D = 4° 6',$$
$$i = 28° 36', \qquad \Delta D = 6° 16'.$$

Ce calcul est fait avec la variation moyenne d'anomalie.

Si le périgée lunaire est dans l'équateur terrestre (ce qui arrive deux fois tous les 9 ans), la variation diurne d'anomalie est notablement plus grande que la moyenne : corrélativement la variation diurne de déclinaison atteint 7 degrés.

2° — Ces variations énormes de déclinaison compliquent le calcul des levers et couchers de la Lune; elles produisent en outre des phénomènes singuliers.

Les angles horaires H de lever et de coucher (arcs semi-diurnes) sont donnés par la formule (§ 13) :

$$\cos H = -\operatorname{tg}\lambda \,.\, \operatorname{tg} D.$$

La déclinaison D à utiliser est celle qui correspond au passage de la Lune dans le plan horaire H pour le lieu considéré, c'est-à-dire celle de la Lune pour l'heure du lever ou du coucher que précisément nous calculons.

Voici un exemple pour fixer les idées.

Je prends mes nombres dans l'*Annuaire du Bureau des Longitudes*, le commencement du jour est donc à minuit.

Passage signifie passage au méridien de Paris.

Les ascensions droites et les déclinaisons sont données pour minuit moyen.

Je transcris quelques lignes.

	Lever.	Passage.	Coucher.	$\mathcal{R}$	D.
	—	—	—	—	—
9 mai 1915.	$2^h 20^m$	$8^h 22^m$	$14^h 38^m$	$23^h 20^m$	$-1° 49'$
10 —	2 34	9 3	15 47	0 4	$+3$ 54
11 —	2 48	9 44	16 56	0 47	$+9$ 23

Par hypothèse j'ignore les heures de lever et de coucher; je veux les calculer pour le 10 mai 1915.

Comme je ne sais rien de l'heure de ces phénomènes, je commence mon calcul en prenant pour déclinaison celle qui correspond à minuit ($0^h\,0^m\,0^s$) du 10 mai et à minuit du 11. Je trouve ainsi pour $\lambda = 48°\,50'$:

$$D = 3°\,54', \quad \cos H = -0{,}0782, \quad H = 94°\,29';$$
$$D = 9°\,23', \quad \cos H = -0{,}1900, \quad H = 100°\,57'.$$

Donc la Lune se lèvera ou se couchera dans des plans horaires faisant avec le méridien un angle voisin de ces angles.

Pour aller plus loin, il faut les réduire en temps.

Ce serait une erreur grossière que de le faire en admettant une vitesse de 15° à l'heure. Les nombres donnés permettent une approximation bien meilleure.

En effet le 20 mai le passage au méridien a lieu à $9^h\,3^m$; le 11 il a lieu à $9^h\,44^m$. Donc le jour vrai vaut $24^h\,41^m = 1\,481$ minutes, pendant lesquelles la Lune parcourt $360° = 21\,600'$

Une minute d'angle correspond donc à

$$1\,481 : 21\,600 = 0{,}0686 \text{ minute de temps.}$$

Transformons nos angles en temps à ce taux :

$$94°\,29' = 5\,669' \qquad 5\,669 \times 0{,}0686 = 389' = 6^h\,29^m$$
$$100°\,57 = 6\,057' \qquad 6\,057 \times 0{,}0686 = 416' = 6\;\;56.$$

Il faut ce temps à la Lune pour parcourir les arcs semi-diurnes calculés.

Mais nous savons qu'elle passe au méridien le 10 mai à $9^h\,3^m$.

Suivant l'hypothèse sur la déclinaison, elle se lève donc et se couche aux heures suivantes.

	Lever.	Coucher.
$D = 3°\,54'$	$2^h\,34^m$	$15^h\,32^m$
$D = 9°\,23'$	$2\;\;7$	$15\;\;59$.

Nous sommes maintenant en état de refaire notre calcul et d'obtenir une meilleure approximation.

La déclinaison passe de 3° 54' à 9° 23' en 24 heures de temps moyen; elle varie de 429' en $1\,440^m$, soit de 0',3 par minute de temps.

L'heure du lever étant assurément voisine de $2^h\,34^m$, nous obtiendrons une meilleure approximation en prenant pour déclinaison :

$$D = 3°\,54' + 0',3 \times 154 = 4°\,40'.$$

L'heure du coucher étant voisine de $15^h\,32^m$, nous obtiendrons une meilleure approximation en prenant pour déclinaison :

$$D = 3°\,54' + 0',3 \times 932 = 8°\,34'.$$

Le lecteur refera le calcul avec ces nouvelles données. Il ne trouvera pas exactement les nombres de l'*Annuaire* parce que je ne tiens pas compte de la parallaxe.

3° — Les variations énormes de la déclinaison lunaire peuvent donc amener d'un jour à l'autre une variation paradoxale des heures de lever et de coucher.

C'est ce que montre le tableau transcrit plus haut. Les passages au méridien retardent de 41 minutes ; les levers ne retardent que de 14 minutes, les couchers de 9 minutes.

Pour des latitudes plus élevées, il peut arriver que la Lune se lève deux jours de suite exactement à la même heure et à la même minute, bien que son passage au méridien retarde de 50 minutes. Voir plus loin, § 306.

4° — Pour calculer la vitesse de la Lune en angles horaires pour le jour considéré, je me suis servi des passages au méridien. J'aurais pu employer les ascensions droites.

La variation d'ascension droite en 24 heures moyennes est de 43 minutes ; c'est dire qu'en 24 heures moyennes la Lune a fait seulement en ascension droite un angle de

$$1\,440 - 43 = 1\,397 \text{ minutes.}$$

Sa vitesse en ascension droite est à celle du Soleil moyen comme :

1 397 : 1 440, rapport qui est égal au rapport utilisé plus haut :

1 440 : 1 481, à l'approximation de ces calculs qui n'ont d'autre but que de fixer les idées du lecteur.

CHAPITRE III

PHASES. SÉLÉNOGRAPHIE

Phases. Année lunisolaire.

302. Position de la question.

1° — Dans le chapitre précédent nous avons expliqué quelles difficultés présente l'établissement des *Tables de la Lune*, c'est-à-dire des tables permettant de calculer, à une époque quelconque passée ou future, la longitude et la latitude géocentriques du centre du disque lunaire supposé complet. Nous avons considéré la Lune comme un point. Or nous savons tous que la Lune possède un diamètre apparent sensible et que son disque n'apparaît pas toujours en entier; cherchons les causes de ces variations.

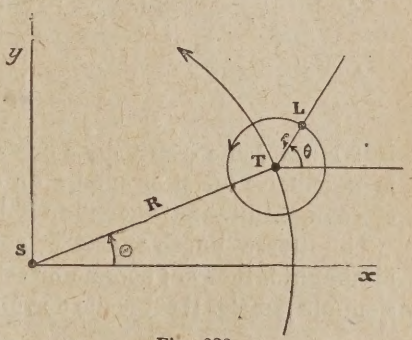


Fig. 232.

Le disque lunaire ne présente pas un aspect uniforme : l'étude de la topographie lunaire (ou *sélénographie*) mérite de nous arrêter quelques instants. Les variations de la partie vue (*librations*) fournissent des indications sur la rotation de la Lune autour d'un axe passant par son centre de gravité.

2° — Cherchons d'abord la forme générale de la trajectoire lunaire par rapport à des axes de directions invariables *passant par le centre du Soleil.*

Pour simplifier admettons que la Lune reste toujours dans l'écliptique.

Le rayon de la courbe quasi circulaire que décrit la Lune autour de la Terre, est 388 fois plus petit que la distance de la Terre au Soleil.

Conséquemment bien que la Lune fasse environ 13 tours autour de la Terre pendant que la Terre fait un tour autour du Soleil, sa vitesse linéaire propre est petite par rapport à la vitesse d'entraînement : elle est en moyenne 29 fois plus petite.

3° — Partant de là, représentons le mouvement de la Lune.

Comme première approximation, nous devons combiner deux mouvements circulaires de même sens.

Les équations d'un tel mouvement sont :

$$x = \mathrm{R}\cos mt + r\cos nt, \qquad \Theta = mt,$$
$$y = \mathrm{R}\sin mt + r\sin nt, \qquad \theta = nt.$$

D'où pour le rayon vecteur ρ et la vitesse linéaire v :

$$\rho^2 = \mathrm{R}^2 + r^2 + 2\mathrm{R}r\cos(n-m)t,$$
$$v^2 = m^2\mathrm{R}^2 + n^2r^2 + 2mn\mathrm{R}r\cos(n-m)t.$$

Le rayon vecteur oscille entre un minimum $\mathrm{R} - r$ et un maximum

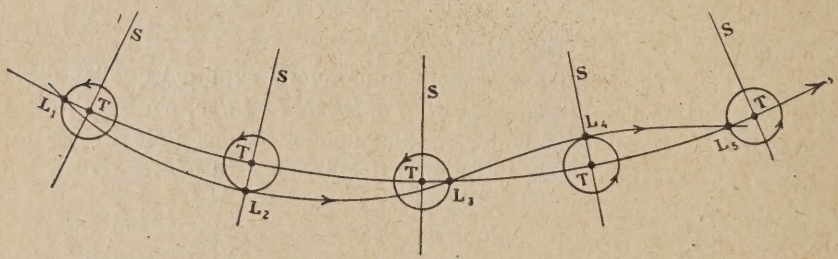


Fig. 233.

$\mathrm{R} + r$: la Lune décrit donc une courbe sinueuse de part et d'autre de la trajectoire quasi circulaire du centre de la Terre; elle se rapproche et s'éloigne alternativement du Soleil.

La vitesse linéaire oscille entre un maximum $m\mathrm{R} + nr$, et un minimum $m\mathrm{R} - nr$; comme nr est beaucoup plus petit que $m\mathrm{R}$, elle ne s'annule jamais. Il est facile de vérifier que l'angle

$$x\mathrm{SL} = \operatorname{arc\,tg}(y : x),$$

varie toujours dans le même sens.

La figure 233 représente schématiquement la courbe décrite.

En L_2 la Lune est en opposition, en L_4 elle est en conjonction.

En L_1 et L_3, la Lune est en quadrature.

De L_1 à L_5 s'écoule un mois synodique.

En L_1 la Lune est dans son *premier quartier*; elle est *pleine* en L_2. Le *dernier quartier* arrive en L_3; la Lune est *nouvelle* en L_4,

A l'échelle de la figure, l'écart entre la courbe sinueuse et la trajectoire du centre de la Terre est très exagéré. La courbe tourne toujours sa concavité vers le Soleil (au contraire de ce que représente la

figure 233). Pour le montrer, on calculera son rayon de courbure. Dans l'expression simple obtenue, on substituera les valeurs numériques $n : m = 13$. R : $r = 388$. On vérifiera que le rayon de courbure ne peut devenir infini.

303. **Résolution in abstracto du problème des phases.**

1° — Les phénomènes rentrent dans l'énoncé suivant.

Une sphère de centre L, opaque et de surface diffusante (Lune), se

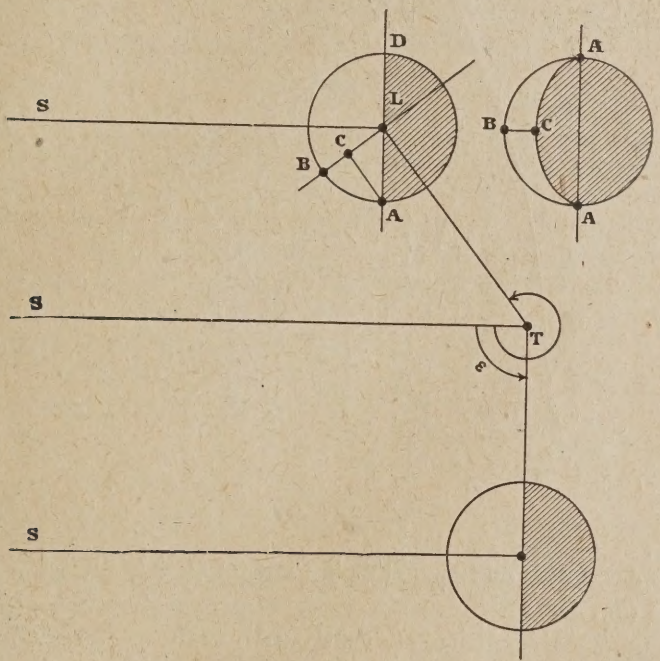


Fig. 234.

trouve devant un point lumineux très éloigné S (Soleil) qui en éclaire sensiblement un hémisphère. Elle est regardée par un observateur T (Terre) beaucoup plus rapproché que S, mais qui cependant la voit sous un diamètre apparent petit.

On demande ce que l'observateur T voit de la sphère L (fig. 234).

En raison de l'éloignement du point S, les droites LS, TS, sont sensiblement parallèles. Appelons ε l'angle marqué (distance angulaire des centres du Soleil et de la Lune vus de la Terre.

La lumière et l'ombre sur la sphère L sont limités par un grand cercle ALD qui se projette suivant une ellipse sur le plan BCL normal à TL. La partie éclairée vue par l'observateur T est limitée par le grand cercle de contour apparent, et par une moitié de cette ellipse (moitié comprise entre les extrémités du grand axe).

Soit R le diamètre apparent de la sphère L : les axes de l'ellipse sont :

$$R, \quad R\cos\varepsilon.$$

La largeur $\overline{BC}$ de la partie lumineuse est : $P = R(1 - \cos\varepsilon)$.

Dans le haut de la figure 228 on ne voit de la sphère qu'un *croissant*.

2° — Exprimons la distance angulaire des astres en fonction des

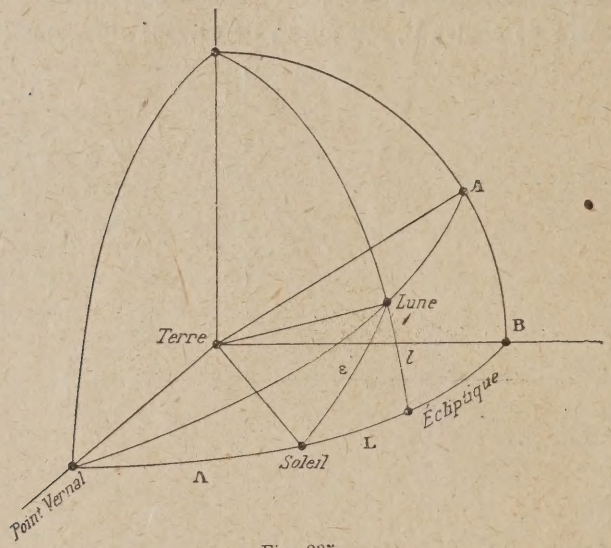


Fig. 235.

longitudes Λ et L du Soleil et de la Lune, et de la latitude l de la Lune.

On a (fig. 235) :

$$\cos\varepsilon = \cos(L - \Lambda).\cos l.$$

D'où pour la largeur de la partie éclairée visible :

$$P = R[1 - \cos(L - \Lambda).\cos l)].$$

La latitude l de la Lune reste toujours inférieure à 5° dont le cosinus est 0,996. Avec une grande approximation, on a donc simplement :

$$P = R[1 - \cos(L -)\Lambda].$$

Pour la conjonction ($L = \Lambda$), P est nul; la Lune est *nouvelle*.

Pour les quadratures, l'ellipse est évanouissante; la partie vue est un demi-cercle.

Pour l'opposition ($L = \Lambda \pm 180°$), l'ellipse se confond avec le cercle de contour apparent : la Lune est *pleine*.

Dans toutes les positions, la droite AA qui joint les *cornes*, est un diamètre du cercle de contour apparent (fig. 234).

Ce diamètre est normal au tableau de la figure 234, plan déterminé par les centres des trois astres T, L, S.

3° — A la vérité la Lune n'est pas dans l'écliptique. Conséquemment pour la conjonction définie par la condition : L = A, la largeur de la partie lumineuse n'est pas nulle; on a :

$$P = R(1 - \cos l).$$

La plus grande valeur que l puisse prendre, correspond à la position A de la Lune, à 90° de la ligne des nœuds du plan de son orbite; le Soleil est alors dans la direction TB (fig. 235). On a :

$$P = 0{,}004 . R.$$

Lors de la conjonction et de la position favorable, on verrait donc un mince croissant de Lune; la droite reliant les *cornes* serait parallèle à l'écliptique. De même lors de l'opposition, la Lune ne serait pas ronde; il en manquerait un mince croissant. Képler affirme effectivement que la Lune est visible *même en conjonction*, lorsque sa latitude est alors voisine du maximum, c'est-à-dire égale à l'inclinaison du plan de l'orbite lunaire sur l'écliptique. En admettant la réalité de l'observation de Képler, toujours est-il que des conditions atmosphériques spéciales sont nécessaires.

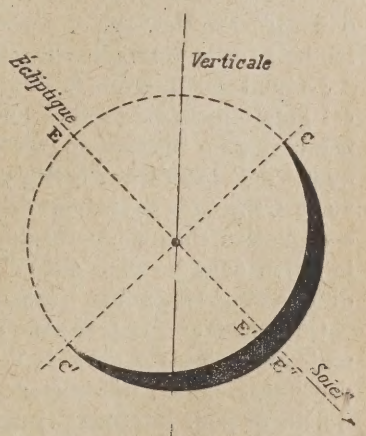


Fig. 236.

304. Phases de la Lune.

1° — La Lune se déplace parmi les étoiles d'environ 13° par jour, de l'ouest à l'est. En quelques heures on s'aperçoit du déplacement. Pour fixer les idées, rappelons que le diamètre apparent de la Lune est d'un demi-degré environ; en une heure la Lune se déplace donc par rapport aux étoiles d'un peu plus que son diamètre apparent.

Pour vérifier le phénomène, on prend comme terme de comparaison une étoile assez voisine de la Lune et située sur son parcours.

Si l'étoile est orientale, sa distance à la Lune diminue; si elle est occidentale, sa distance augmente.

Le Soleil se déplace aussi parmi les étoiles, dans le même sens que la Lune (sens direct), mais seulement d'un degré par jour environ, c'est-à-dire 13 fois moins vite que la Lune.

La différence L — A des longitudes géocentriques croît donc de 12° par jour environ.

Par définition, il y a *conjonction* quand $L = A$; il y a *opposition* quand $L = A \pm 180°$.

Nous avons remarqué qu'en raison de la petitesse de l'inclinaison du plan de l'orbite lunaire sur l'écliptique, $L - A$ mesure pratiquement la distance angulaire du Soleil à la Lune.

On appelle *âge de la Lune*, le temps qui s'écoule entre la conjonction (*néoménie*, *nouvelle Lune*) et l'instant de l'observation.

2° — Pratiquement la Lune reste invisible un ou deux jours avant et après la conjonction. Elle devient visible le soir, à l'occident, peu après le coucher du Soleil. Elle apparaît sous forme d'un croissant mince limité par un demi-cercle CE″C′ et une demi-ellipse CE′C′.

Les points C et C′ diamétralement opposés où ces courbes se tangentent, sont les *cornes*.

L'ellipse s'appelle *courbe terminatrice* ou *terminateur*; EE′E″ est la *droite de symétrie*. Les anciens avaient tout de suite reconnu que la droite de symétrie (droite normale à la ligne des cornes) est dirigée dans le grand cercle qui passe par les centres de la Lune et du Soleil. Ce grand cercle diffère peu de l'écliptique, à moins que l'élongation de la Lune par rapport au Soleil ne soit très petite. La ligne des cornes est donc *généralement* quasi normale à l'écliptique. Elle est généralement inclinée sur la verticale, elle peut même être horizontale (§ 305).

La lumière qu'envoie la Lune est d'autant plus faible que le croissant est plus mince, c'est-à-dire que la Lune est plus *jeune*; aussi ne commence-t-on à distinguer le croissant qu'après le coucher du Soleil et quand déjà l'épaisseur E′E″ est assez grande. Certains observateurs ont vu la Lune âgée seulement de 20 heures, c'est-à-dire 20 heures après la conjonction calculée, après que la Lune est passée en même temps que le Soleil dans un plan normal à l'écliptique. Il faut pour cela des conditions atmosphériques très particulières.

On admet que le croissant n'est ordinairement visible dans nos climats que 40 heures après la conjonction, ce qui, à raison de 30′ environ par heure, donne une distance angulaire de 20° entre la Lune et le Soleil, et pour le croissant une épaisseur de 0,06 du rayon apparent. Faut-il encore qu'il ne soit pas noyé dans la lumière solaire directe et même dans celle du crépuscule; c'est dire que le Soleil doit être couché et assez loin sous l'horizon.

Les Arabes commencent leurs mois à la nouvelle Lune (§ 307), pratiquement quand la Lune réapparaît. Ils arrivent ainsi à tricher un peu sur le commencement de leur carême (mois de Ramadan). Rien n'est amusant comme de les voir regarder immédiatement après le coucher du Soleil si, oui ou non, la Lune est visible.

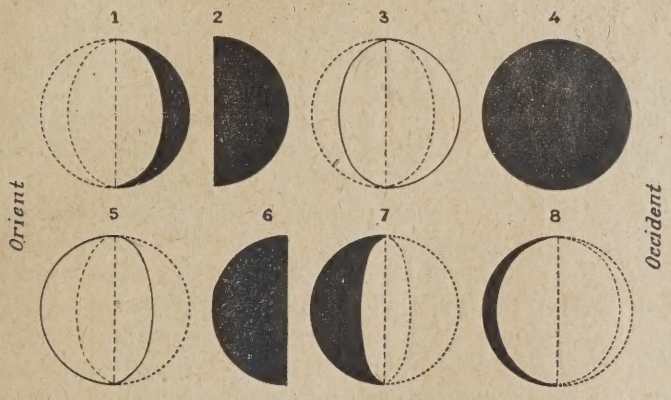
En Algérie l'Observatoire a beau leur donner l'heure exacte de la conjonction, ils n'en veulent croire que leurs yeux. Ils peuvent ainsi tricher d'un jour. La première fois que, non prévenu, j'assistai à ce spectacle, dans le Sud algérien, je me demandais vainement ce que la

foule pouvait bien regarder dans le ciel. Malheureusement pour leur estomac, dès le Soleil couché, la Lune apparut en très mince croissant. Même comédie pour la fin du Ramadan; mais les yeux sont alors plus perçants.

Nous savons que le croissant est théoriquement visible en conjonction lorsque la latitude de la Lune est alors voisine de sa valeur maxima 5°.

Le soir où le croissant devient visible après le coucher du Soleil, il est tout près de l'horizon.

Dans son mouvement apparent diurne qui résulte de la rotation de



1 *Lune jeune*. 2 *Premier quartier*. 4 *Pleine Lune*.
6 *Dernier quartier*. 8 *Vieille Lune*.

Fig. 237.

la Terre, il continue sa marche vers l'occident, restant à peu près à la même distance du Soleil; il se couche donc moins d'une heure après être devenu visible.

3° — Les jours suivants la Lune devient visible un peu plus tôt après le coucher du Soleil; le croissant plus large est plus lumineux. Angulairement plus éloigné du Soleil, la Lune se couche plus longtemps après lui. Pour ces deux raisons le temps qu'elle reste visible, augmente.

Après 7 jours environ, la différence des longitudes L — A devient égale à 90°; la Lune est en *quadrature*, c'est le *premier quartier*. Elle apparaît comme un demi-cercle dont le côté courbe est tourné vers l'occident; c'est-à-dire vers le Soleil. Elle passe au méridien vers six heures du soir.

Nous reviendrons plus loin sur l'angle que fait sa droite de symétrie avec l'horizon.

4° — La Lune grossit de jour en jour et s'éloigne angulairement du Soleil.

Sept jours après le premier quartier, elle est *pleine*. Elle se lève à peu près quand le Soleil se couche ; elle passe 12 heures après lui au méridien. Le Soleil l'éclaire de face : elle est *en opposition*. C'est alors que l'ombre de la Terre tomberait dessus et ferait une éclipse de Lune si la Lune se mouvait exactement dans l'écliptique.

5° — Après la pleine Lune, pendant le *déclin*, les phénomènes se reproduisent en sens inverse. La Lune diminue, se présente comme un demi-cercle : c'est le *dernier quartier*. Elle passe au méridien 6 heures avant le Soleil : sa partie ronde est tournée vers l'orient. Elle est en *quadrature*.

Le *décours* continue.

Elle devient un croissant dont les cornes sont comme toujours du côté opposé au Soleil, c'est-à-dire ici vers l'occident. Elle se lève le matin peu avant le Soleil ; elle finit par se lever si peu avant lui et par être simultanément si mince, qu'elle devient invisible. La période du phénomène est accomplie ; la Lune redevient nouvelle.

Si elle se mouvait exactement dans l'écliptique, à chaque conjonction elle intercepterait les rayons solaires : il y aurait éclipse de Soleil. Mais l'obliquité du plan de son orbite sur l'écliptique rend le phénomène beaucoup plus rare, surtout pour un lieu déterminé.

304 *bis*. **Lumière cendrée.**

1° — C'est un phénomène d'observation vulgaire que pendant quelques jours avant et après la nouvelle Lune, en dehors du croissant très lumineux, le disque entier de la Lune est visible. La faible lumière qu'il émet, est connue sous le nom de *lueur ou lumière cendrée*. Les phénomènes d'*irradiation* (voir mon Cours sur *la Vision*, etc.) produisent deux apparences singulières : le disque semble bordé d'un trait lumineux plus vif ; son diamètre paraît notablement plus petit que celui du croissant brillant.

La lumière cendrée devient plus visible quand on cache le croissant par un écran, quand par exemple on se place près d'un mur. On distingue alors les grandes taches de la Lune, telles que la Mer des Crises (voir plus loin).

On explique aisément la lumière cendrée en remarquant que la Terre vue de la Lune à des phases identiques à celles de la Lune vue de la Terre, mais décalées d'une demi période. Quand la Lune est *nouvelle* pour nous, la Terre est *pleine* pour la Lune. C'est ce que montre la figure 237 *bis* ; on supposera la distance des astres considérablement plus grande par rapport aux diamètres choisis ; le rapport de ces diamètres n'est pas correct. La figure correspond à l'élongation de 45° ; il s'en faut de trois jours et demi en plus ou en moins que la Lune soit nouvelle.

La lumière que la Terre envoie à la Lune, par suite la lumière que la Lune renvoie à la Terre (*après deux diffusions*), décroît à partir de la

nouvelle Lune. C'est cependant vers le troisième jour, avant et après celle-ci, que la lumière cendrée est le plus visible : cela tient à ce que la Lune est alors plus distante du Soleil, plus dégagée de ses rayons.

A l'œil nu la lumière cendrée disparaît avant les quadratures. Mais

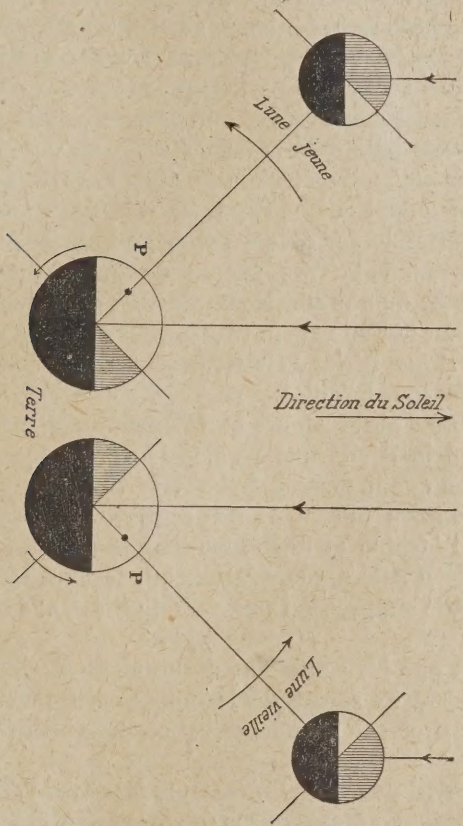


Fig. 237 *bis*.

avec des lunettes d'assez grandes ouvertures et en cachant la partie très lumineuse, on distingue le disque entier deux ou trois jours après le premier quartier et avant le dernier.

2° — La lumière cendrée pose de curieux problèmes.

Le rayon lunaire est les 272 millièmes du rayon terrestre; il a 1 737 kilomètres. L'aire d'un grand cercle lunaire est donc environ 13,48 fois plus petite que l'aire d'un grand cercle terrestre. Comme les deux astres sont sensiblement à la même distance du Soleil, l'intensité lumineuse de la Terre *considérée comme source* est 13,48 fois l'intensité de la Lune, *à supposer la lumière diffusée de même par les deux astres.*

Dans cette hypothèse l'éclairement de la Lune par la *pleine Terre* est 13,48 fois l'éclairement de la Terre par la *pleine Lune*. Rien d'étonnant à ce que la *nouvelle Lune* soit visible pour nous, alors même qu'on douterait de la visibilité de la *nouvelle Terre* pour la Lune.

En fait, de l'inégalité des pouvoirs diffusifs moyens des continents et des océans (les réflexions irrégulières sur les vagues sont l'équivalent d'une diffusion), résulte que l'éclat de la Terre vue de la Lune doit varier périodiquement avec une période d'un jour environ. Un habitant de la Lune, regardant la Terre, reconnaîtrait sa rotation à la variation des éclats aux divers points de la partie brillante, mais aussi bien à la variation de l'intensité globale (éclairement de la surface lunaire).

Corrélativement quand la Lune renvoie vers nous une partie de la lumière reçue, l'éclat de ses divers points doit varier péridioquement suivant que la portion de la Terre servant de source correspond principalement aux océans ou aux continents, suivant encore que le ciel de la partie brillante pour la Lune est pur ou chargé de nuages.

Il semble en effet que l'éclat de la Lune éclairée par la Terre (lumière cendrée) varie d'un jour à l'autre.

Galilée et nombre d'observateurs soutiennent qu'en moyenne elle est plus vive pendant le déclin que pendant la croissance. Ils donnent comme explication que la portion de la Terre visible de la Lune quand elle passe au méridien moyen de nos contrées, renferme *pendant le déclin* l'Europe, l'Afrique et l'Asie, tandis que pendant la croissance elle contient l'Océan Atlantique. C'est ce que la figure 237 *bis* montre immédiatement; elle suppose la Lune à 45° du Soleil et dans le méridien P. de Paris.

On admet donc que les continents diffusent plus que les océans (ce qui n'est pas évident en raison de la lumière réfléchie par l'eau); on admet que la diffusion sur les nuages est encore plus grande que pour les continents.

3° — En définitive pour un observateur, placé près de la Terre hors de notre atmosphère, regardant constamment la Lune, la lumière cendrée varie (en moyenne) avec une période d'un jour (plus exactement la période est le temps que met la Lune à revenir au même méridien), cela quelle que soit la phase de la Lune. Le phénomène est compliqué par l'état variable de l'atmosphère aux divers points du globe; mais cette complication disparaîtrait dans la moyenne. L'expérience permettrait de déterminer les pouvoirs diffusants moyens des divers fuseaux terrestres.

L'observation réelle est gênée par le fait que la Lune passe sous notre horizon et que l'atmosphère locale intervient.

Arago comparait l'éclat de la portion cendrée de la Lune à celle de la partie directement éclairée, partie d'un éclat constant ou à peu près tel. Il éliminait ainsi l'influence de l'atmosphère locale. Il trouve que suivant les jours le rapport passe de 4000 à 7000. De la lecture même d'Arago

résulte qu'il n'avait pas grande confiance dans ses résultats; je ne sais s'ils ont été repris.

Remarque. — Vénus présente le phénomène de la lumière cendrée.

305. Angle de la ligne des cornes avec un vertical.

1° — Résolvons d'abord le problème suivant : *quel est actuellement l'angle de l'écliptique avec le méridien du lieu* P *où nous sommes?*

Il ne dépend évidemment que de l'angle horaire actuel du point vernal par rapport à notre méridien. Calculons-le.

Sous la rubrique *Temps sidéral à midi moyen*, la *Connaissance des Temps* donne pour tous les jours, à midi moyen de Paris, l'angle horaire Æ_0 du point vernal par rapport au méridien de Paris (§ 12).

Soit L la longitude *ouest* (évaluée en temps, 24 heures pour 360°) du lieu où nous sommes. A midi moyen de Paris, l'angle horaire du point vernal pour ce lieu est :

$$\text{Æ} = \text{Æ}_0 - \text{L}.$$

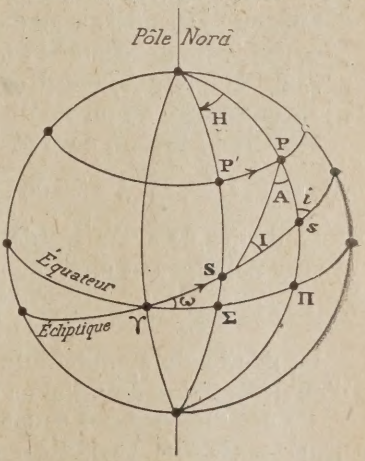


Fig. 238.

Mais par hypothèse nous voulons l'angle horaire α du point vernal pour l'heure h de temps moyen par rapport à notre méridien. A compter du midi moyen de Paris, le Soleil moyen doit parcourir l'angle horaire $\text{L} + h$; ce qui correspond à l'intervalle $\text{L} + h$ de temps moyen, puisque la longitude L est exprimée en temps.

Mais le jour sidéral est plus court que le jour de temps moyen; dans le même temps le point vernal parcourt un angle plus grand que ne fait le Soleil moyen : le facteur est 1,0027379 (§ 2). Bref à l'heure h de temps moyen pour notre méridien de longitude *ouest* L, l'angle horaire α du point vernal est :

$$\alpha = \text{Æ}_0 - \text{L} + 1{,}0027379\ (\text{L} + h)$$
$$\alpha = \text{Æ}_0 + 0{,}0027379\,\text{L} + 1{,}0027379\,h.$$

Comme première approximation on posera :

$$\alpha = \text{Æ}_0 + h.$$

Si l'heure de temps moyen est celle d'un fuseau horaire, nous devons considérer la longitude réelle L et la longitude L′ du lieu fictif qui donne l'heure. La formule devient :

$$\alpha = \text{Æ}_0 - \text{L} + 1{,}0027379\ (\text{L}' + h).$$

Ceci posé, le triangle rectangle $s\gamma\pi$ donne :

$$\cos i = \sin\omega \,.\, \cos\alpha;$$

est l'angle qui fait l'écliptique avec notre méridien, un temps moyen h après le midi moyen de notre méridien.

2^o — La droite de symétrie de la partie éclairée de la Lune (droite normale à la ligne des cornes) est dans le plan déterminé par la Terre, la Lune et le Soleil. Comme il ne s'agit que de calculs approchés pour fixer nos idées, confondons ce plan avec l'écliptique; posons que la ligne de symétrie de la Lune est dans l'écliptique.

Lorsque la Lune passe dans notre méridien, quel que soit son âge, sa droite de symétrie fait donc avec ce méridien l'angle i ci-dessus déterminé. Pour le calculer approximativement, il nous suffit de connaître l'heure h de passage de la Lune à notre méridien.

Par exemple à un équinoxe et à six heures du soir ou du matin :

$$\mathcal{H}_0 = 0^o, 180^o, \quad h = \pm 90^o, \quad \alpha = \pm 90^o, \quad \cos i = 0, \quad i = 90^o.$$

La droite de symétrie de la Lune est donc horizontale.

Aux solstices et à six heures du soir ou du matin :

$$\mathcal{H}_0 = 90^o, 270^o, \quad h = \pm 90^o, \quad \cos i = \pm \sin\omega.$$

Le droite de symétrie de la Lune fait avec l'horizon l'angle ω d'environ 23^o dans un sens ou dans l'autre.

En définitive suivant la date de l'observation, lorsque la Lune passe dans le méridien, sa droite de symétrie fait avec l'horizon un angle qui varie entre les limites $\pm 23^o$. La ligne des cornes fait avec le méridien un angle qui varie entre les mêmes limites.

3^o — Passons au problème général.

Regardons dans un vertical défini par l'azimut A.

$\pi P = \lambda$ mesure la latitude du lieu. Posons $\overline{s\pi} = D$. On a :

$$\operatorname{tg} D = \operatorname{tg}\omega \,.\, \sin\alpha;$$

$$\cos I = \cos A \,.\, \cos i + \sin A \,.\, \sin i \,.\, \cos(\lambda - D).$$

I est l'inclinaison cherchée.

En particulier pour le premier vertical ($A = 90^o$) on a :

$$\cos I = \sin i \,.\, \cos(\lambda - D).$$

$\sin i$ n'est jamais très différent de 1. Pour peu que $\lambda - D$ soit petit, l'angle I est lui-même petit. Donc la droite de symétrie fait avec l'horizon un angle assez grand : d'où l'aspect représenté par la figure 230.

Il arrive que la droite de symétrie soit verticale.

Par exemple aux équinoxes, à six heures du soir ou du matin, le méridien coupe normalement l'écliptique ($i = 90^o$).

Plaçons-nous en un lieu qui soit sur l'écliptique ($\lambda = D$); on a :

$$\cos I = 1, \qquad I = 0.$$

La droite de symétrie de la Lune supposée dans le premier vertical est dans ce vertical; la ligne des cornes est horizontale. C'est ce qui arrive approximativement quand, au voisinage d'un équinoxe, un lieu de latitude voisine de 23° regarde la nouvelle Lune à l'occident ou la vieille à l'orient.

305 *bis*. **Bord observable de la Lune en déclinaison.**

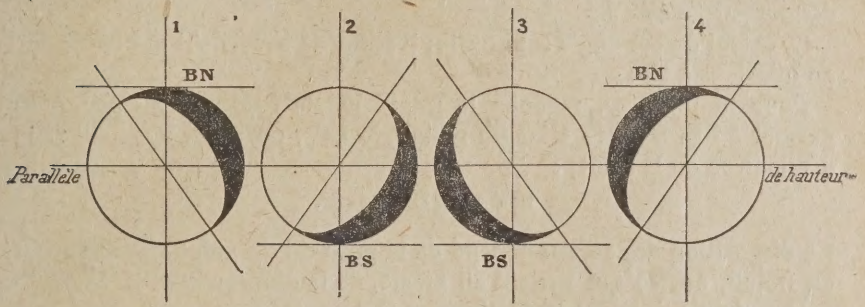


Fig. 238 *bis*.

Nous avons trouvé l'angle que fait la ligne des cornes avec le vertical

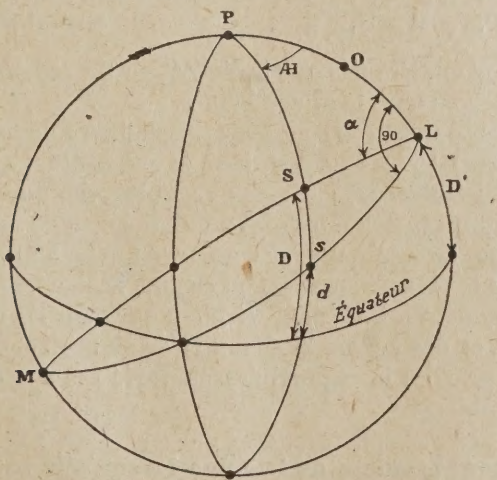


Fig. 238 *ter*.

quand la Lune est dans le méridien; nous négligions l'angle que fait avec l'écliptique le plan de l'orbite lunaire.

Le même problème se pose pour la détermination du bord observable en déclinaison dans la lunette méridienne. La figure 238 *bis* montre

qu'on ne peut généralement amener la coïncidence d'un fil de déclinaison qu'avec un des bords du Soleil, tantôt le bord sud, tantôt le bord nord.

La détermination *a priori* de ce bord est donnée par une inégalité facile à établir.

Soit P (fig. 238 *ter*) le pôle de l'équateur, L la Lune dans le méridien, S le Soleil dont l'angle horaire est $\mathcal{H}$. La droite de symétrie de la Lune est dirigée suivant le grand cercle LSM (ce serait l'écliptique si la Lune était rigoureusement dans l'écliptique). La disposition des cornes par rapport au méridien du lieu d'observation O, est donc définie par l'angle α.

Le calcul de cet angle est inutile; il suffit de savoir s'il est supérieur ou inférieur à 90°.

Pour le montrer, menons le grand cercle LsM passant par L et normal à PL. Dans le triangle rectangle LPs, on a (en appelant D′ la déclinaison de la Lune) :

$$\operatorname{tg} d = \operatorname{tg} D' . \cos \mathcal{H}.$$

La disposition des cornes dépend de la position du point *s* par rapport au Soleil, ou, ce qui revient au même, de la différence entre la déclinaison *d* du point *s*, et la déclinaison D du point S.

La figure montre que pour $\mathcal{H}$ compris entre 0 et 180° on a :

$\alpha < 90$,	$d < D$,	bord observable boréal (figure 1),
$\alpha > 90$,	$d > D$,	— australe (figure 2).

Le lecteur n'oubliera pas que le ciel est vu du dedans dans la figure 238 *bis*, du dehors dans la figure 238 *ter*.

D'après la disposition choisie pour le Soleil, la Lune est au voisinage du premier quartier. De jour en jour $\mathcal{H}$ augmente, la Lune se déplaçant parmi les étoiles dans le sens direct plus vite que le Soleil. Pour $\mathcal{H} = 0$, la Lune et le Soleil passent simultanément au méridien : c'est la nouvelle Lune. La figure 238 *ter* correspond donc à la figure 238 *bis*, 1.

d conserve la même valeur si l'on change le signe de $\mathcal{H}$; le méridien est plan de symétrie. Le lecteur vérifiera que pour les mêmes déclinaisons D′ et D, et des angles $\mathcal{H}$ égaux et de signes contraires, le même bord est observable; la règle ci-dessus posée est applicable quel que soit $\mathcal{H}$.

306. **Hauteur maxima de la Lune lorsqu'elle est pleine. Lune de Moisson.**

1° — Au cours d'une révolution sidérale la déclinaison de la Lune oscille entre un maximum et un minimum dont les valeurs, sensiblement égales et de signes contraires, dépendent de position de la ligne des nœuds de son orbite. Corrélativement pour un point P de la surface terrestre, lors de son passage du méridien, la hauteur de la Lune au-

dessus de l'horizon oscille entre un maximum et un minimum qui correspondent aux directions PM et Pm. On a pour limites :

$$EPM_2 = EPm_2 = 28^\circ 36' \qquad EPM_1 = EPm_1 = 18^\circ 18'.$$

2° — Ceci posé, l'observation vulgaire montre qu'au voisinage du solstice d'été, la Lune *pleine* passe au méridien à la hauteur minima; au voisinage du solstice d'hiver, elle y passe à la hauteur maxima; ces hauteurs maxima et minima correspondent à la position actuelle de la ligne des nœuds.

Autrement dit, en juin-juillet, la Lune pleine reste près de l'horizon;

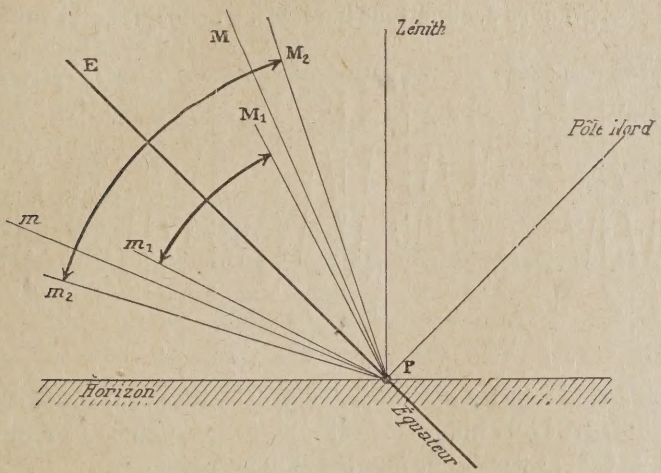


Fig. 239.

en décembre-janvier, la Lune pleine passe quasiment au zénith des lieux dont la latitude est voisine de 45°. Je connais des amateurs de promenades au clair de Lune, furieux de ce que, lors des belles nuits d'été, la Lune pleine se montre incapable de monter un peu haut dans le ciel, comme lassée de la chaleur du jour.

L'explication du phénomène résulte de ce que *la Lune pleine est en opposition et que le plan de son orbite diffère peu de l'écliptique.*

3° — Posons d'abord que ce plan coïncide avec l'écliptique.

Dans l'opposition, les déclinaisons de la Lune et du Soleil seraient égales et de signes contraires.

Or au solstice d'été la déclinaison solaire est *boréale* et maxima; donc la déclinaison de la Lune pleine serait *australe* et maxima; au passage par le méridien d'un lieu de latitude boréale, la Lune pleine serait donc le moins possible élevée sur l'horizon.

L'inverse aurait lieu pour le solstice d'hiver.

Le fait que la Lune ne se meut pas dans l'écliptique complique le phénomène sans en modifier l'allure. Au § 298 nous montrons que

l'intersection du plan de l'orbite lunaire avec l'équateur oscille autour de la ligne des équinoxes sans s'en éloigner beaucoup. Comme seconde approximation, imaginons que ce plan passe constamment par la ligne des équinoxes, mais oscille autour de sa position moyenne qui est écliptique. Il est clair que les phénomènes restent les mêmes, à la différence près que les hauteurs maxima et minima varient dans le cours du cycle de 18 ans 8 mois (§ 284).

La figure 240 représente la variation de la déclinaison lunaire au cours de l'année 1915 et la position des pleines lunes. En juin-juillet elles ont lieu pour les plus grandes déclinaisons australes; en décembre-janvier, pour les plus grandes déclinaisons boréales. Quelle que soit l'année, une

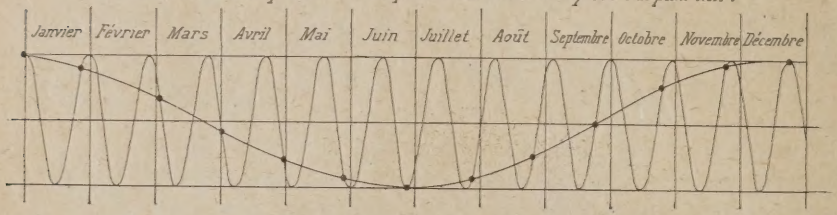


Fig. 240.

courbe analogue relie les positions des pleines lunes sur la courbe des déclinaisons. La seule différence est que les maximums et minimums oscillent de part et d'autre de leur position moyenne.

4° — LUNE DE MOISSON.

L'explication de ce que les Anglais appellent la *Lune de Moisson* est analogue. On a remarqué que vers l'équinoxe d'automne (époque de la moisson en Angleterre), la Lune *pleine* se lève pendant plusieurs jours à la même heure (§ 301, *3°*), tandis que dans le reste du même mois lunaire, la différence entre les heures de deux levers successifs s'élève jusqu'à $1^h\,15^m$.

Quand le Soleil est dans l'équinoxe d'automne, la Lune *quand elle est pleine*, est dans l'équinoxe de printemps.

Pour simplifier supposons qu'elle se déplace dans l'écliptique; comme elle va dans le sens direct, sa déclinaison croît d'un jour à l'autre le plus possible, de même qu'alors la diminution de la déclinaison solaire est maxima. Nous sommes donc dans le cas du § 301, *3°*.

Inversement quand le Soleil est dans l'équinoxe de printemps, la Lune *quand elle est pleine*, est dans l'équinoxe d'automne. C'est donc alors que sa déclinaison décroît le plus vite; deux levers consécutifs de Lune peuvent différer de beaucoup plus de 50 minutes.

Voici les nombres pour 1915 et pour Paris (*Ann. du B. des L.*).

Pleine Lune le 31 mars à $5^h\,58^m$ (temps civil).

	Levers.	Différence.	Couchers.	Différence.
	—	—	—	—
29 mars.	16h 23m		4h 42m	
30 —	17 46	83m	4 58	16m
31 —	19 11	85	5 15	17
1er avril	20 39	89	5 34	19
2 —	22 9	90	5 57	23

Pleine Lune le 23 septembre à 9h 35m (temps civil).

	Levers.	Différence.	Couchers.	Différence.
	—	—	—	—
21 septembre. .	17h 1m		3h 7m	
22 — . .	17 17	16m	4 23	76m
23 — . .	17 32	15	5 38	75
24 — . .	17 48	16	6 51	73
25 — . .	18 6	18	8 3	72

Les équinoxes ont lieu le 21 mars et le 23 septembre.

On remarquera que la Lune se lève au voisinage de l'équinoxe d'automne avant que le Soleil ne se couche.

Nous avons vu que l'effet s'exagère quand croît la latitude du lieu d'observation, par exemple quand on passe de France en Angleterre.

Le phénomène varie suivant la position des nœuds de l'orbite lunaire (intersection du plan de l'orbite avec l'écliptique) par rapport à la ligne des équinoxes. Il est le plus et le moins marqué possible quand ces lignes coïncident.

La période est 18 ans 2/3. Rappelons que c'est en avril 1913 que la longitude du nœud ascendant est nulle ; le phénomène est alors le plus marqué. Il a été minimum en 1904.

307. **Années lunaires.**

1° — Dès les temps les plus anciens, on a groupé les jours en *mois lunaires* dont la durée (*lunaison*) est définie par les phases de la Lune. Le mois lunaire correspond à la *révolution synodique* de la Lune, intervalle de temps entre deux conjonctions successives de la Lune et du Soleil, entre deux *nouvelles lunes*.

Sa valeur *moyenne* est (§ 283) :

$$29^j\,12^h\,44^m\,2^s,8 = 29{,}530\,588 \text{ jours.}$$

Mais les saisons règlent la vie agricole ; l'année civile est définie par le retour du Soleil dans l'équateur, c'est la période *tropique* qui intervient ici.

Sa valeur est :

$$365^j\,5^h\,48^m\,46^s = 365{,}242\,199 \text{ jours.}$$

La grande difficulté que les anciens ont rencontrée dans la confection d'un calendrier, tient à ce que : d'une part, ils ne voulaient pas abandonner le mois lunaire qui est bien reconnaissable; d'autre part, ce mois n'est pas un sous-multiple exact de l'année tropique qu'il est beaucoup plus difficile de reconnaître et dont il fallut de longs siècles pour avoir la valeur à un quart de jour près.

A l'origine des temps historiques, les années furent donc toutes *luni-solaires*; par suite les calendriers furent d'une invraisemblable complication.

2° — Évidemment il existe une solution simple et élégante de ce casse-tête chinois : laisser résolument de côté le Soleil ou la Lune.

Nous avons adopté la seconde alternative : la majorité des Parisiens ignorent qu'il existe une Lune, qu'elle se lève, qu'elle se couche et qu'elle a des phases.

Ils se contentent de lui trouver une drôle de binette quand par hasard ils l'aperçoivent, ce qui est rare vu l'étroitesse des rues.

Les Arabes ont choisi la première alternative.

12 lunaisons font : 354,372.

30 années de 12 lunaisons font : $30 \times 354 + 11{,}16$ jours.

Les années arabes sont des années lunaires dont le commencement se trouve successivement dans toutes les saisons. Elles sont groupées par trentaines dont 19 dites *communes* sont de 354 jours; les 11 autres appelées *abondantes* en ont 355. Ces abondantes ont les numéros 2, 5, 7, 10, 13, 16, 18, 21, 24, 26, 29. Les mois sont alternativement de 30 et de 29 jours, sauf le dernier mois des années intercalaires qui est de 30 jours.

On remarquera que ce système laisse un déchet de 0,16 jour tous les 30 ans, de 1,6 jour tous les 300 ans.

Le cycle arabe de 30 ans contient donc 10 631 jours qui font 29 années juliennes de 365,25 plus 38,75 jours.

L'Hégire a pour origine le jour que Mahomet s'enfuit de la Mecque à Médine, vendredi 16 juillet 622; ce jour est le premier de l'an 1.

Les Arabes promènent donc leurs mois et leurs fêtes à travers toutes les saisons.

Par exemple leur carême ou *Ramadan*, qui est le neuvième mois de l'année, commençait le 6 septembre 1910; puis reculant de 11 jours par an, il commence le 13 juillet 1915.

L'année 1328 de l'hégire commença le 13 janvier 1910; l'année 1334 commença le 9 novembre 1915.

307 *bis*. **Noms de la Lune. Lune Rousse.**

La Lune prend son nom du mois dans lequel elle finit.

Le mois de février ayant 28 jours et la lunaison étant de 29,53 jours, il se peut que février n'ait pas de lune; il suffit pour cela que la Lune

finisse un peu après minuit le 28 février d'une année commune (temps civil). Pour la même raison un mois peut avoir deux lunes.

Une autre difficulté de nomenclature tient à la différence des méridiens. Les mois ne commencent pas au même instant en tous les lieux, tandis que la conjonction lunaire ne dépend évidemment pas de la longitude terrestre.

Les noms des lunes servent aux historiens à se reconnaître dans les dates qui sont souvent données par l'âge de la Lune.

Lune Rousse.

On appelle *Lune Rousse* la pleine lune de mai (lune qui commence en avril et finit en mai). On lui attribue dans les campagnes des méfaits dont elle est parfaitement innocente. Les plantes gèlent parfois quand brille la Lune Rousse (les bourgeons *roussissent*), parce que sa visibilité coïncide avec l'absence de nuages. A cette époque de l'année, un ciel pur ne va pas sans un refroidissement notable du sol et des plantes par rayonnement.

Pour expliquer le gel, on saura qu'une plante peut rayonner sa chaleur avec une intensité telle que sa température tombe à 8° au-dessous de celle de l'air ambiant. La plante gèle, alors que le thermomètre indique une température supérieure à zéro. Un matelas de nuages n'empêche pas le rayonnement des plantes, mais il le compense par un rayonnement inverse.

308. Années lunisolaires. Cycle de Méton. Nombre d'or.

Un grand nombre de peuples, parmi lesquels les Grecs, se sont efforcés de résoudre le casse-tête d'une année *lunisolaire*, c'est-à-dire de construire des groupements *solaires* de mois *lunaires*. Ils y sont parvenus tant bien que mal au moyen des *cycles*, dont le principal est le *Cycle de Méton* (430 avant J.-C.).

Méton reconnut qu'en 19 années solaires tropiques, il y avait 235 lunaisons :

235 lunaisons font	6 939,688 jours.
19 années tropiques font	6 939,602 —

La différence est de + 0,086 jours; ce qui fait 1 jour pour 221 ans.

Comparons au contraire aux années juliennes de 365,25 jours; 19 années juliennes font : 6 939,75 jours.

La différence est de — 0,062 jours; ce qui fait 1 jour pour 308 ans.

Les Grecs ont été conduits à faire leurs années; tantôt de 12 mois lunaires (354 j.), tantôt de 13 mois (384 j.); les mois ont tantôt 29, tantôt 30 jours. Dans un cycle de 19 ans, il y avait :

5 années de	355 jours	. . . . .	1 775 jours	
7 —	354 —	. . . . .	2 478	—
6 —	384 —	. . . . .	2 304	—
1 —	383 —	. . . . .	383	—

soit 12 années de 12 mois (144 lunaisons), 7 années de 13 mois (91 lunaisons) formant un total de 235 lunaisons et de 6 940 jours.

La découverte de Méton fut si profondément admirée qu'on en exposa le calcul en lettres d'or à Athènes; on appela *nombre d'or* le numéro d'ordre de l'année dans le cycle de 19 ans.

Après ces 19 ans, les conjonctions de la Lune et du Soleil se reproduisent sensiblement quand le Soleil est aux mêmes points du ciel, à égale distance de l'équinoxe en longitude.

309. **Epacte.**

On appelle *épacte* d'une année l'*âge de la Lune* au commencement de l'année. Par exemple, l'*épacte* de 1915 est 14.

Douze lunaisons font 354 jours 8 heures 48 minutes 36 secondes.

La différence avec une année julienne de 365 jours 6 heures est de 11 jours environ. L'épacte croît donc de 11 environ par an. La période du phénomène étant de 30 jours environ, quand on arrive au-dessus de 30, on retranche trente.

Voici comme exemple les épactes depuis 1900.

1900. . . . 29	1906. 5	1912. . . . 11
1901. . . . 10	1907. 16	1913. . . . 22
1902. . . . 21	1908. 27	1914. . . . 3
1903. . . . 2	1909. 8	1915. . . . 14
1904. . . . 13	1910. 19	1916. . . . 25
1905. . . . 24	1911. 30	1917. . . . 6

Voici la règle qu'il faut appliquer pour avoir l'âge de la Lune; sa complication tient à ce que les mois n'ont pas tous le même nombre de jours.

On fait la somme de l'épacte, du nombre de mois écoulés depuis mars inclusivement jusqu'au mois actuel inclusivement, enfin du quantième du mois. Si la somme est au-dessus de 30, on retranche 30 ou 29 suivant que le mois courant a 31 ou 30 jours. On a l'âge de la Lune.

Par exemple quel est l'âge de la Lune au 15 août 1915?

Épacte	14
Mois depuis mars	6
Quantième	15
Somme	35

Le mois d'août a 31 jours. L'âge de la Lune est 5. Elle est donc nouvelle le 10 août 1915. Effectivement l'*Annuaire du Bureau des longitudes* indique la néoménie pour la 10 août $22^h\ 52^m$, temps civil.

N'empêche que la méthode, très imparfaite, donne jusqu'à deux jours d'erreur. Il est préférable de consulter le calendrier.

Sélénographie.

310. Diamètre apparent. Sa mesure.

1° — Le disque de la Lune est circulaire, abstraction faite des petites irrégularités locales sur lesquelles nous reviendrons. On peut le montrer au moment des pleines lunes puisque le disque apparaît en

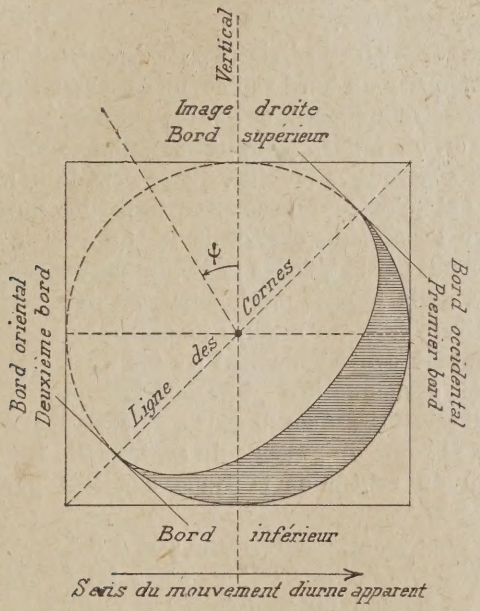


Fig. 240 *bis*.

son entier, ainsi qu'au moment des nouvelles lunes, lorsque le croissant est très délié, grâce à ce qu'on appelle la *lumière cendrée* (§ 304 *bis*).

Lorsque la Lune est à peu près en conjonction, la Terre tourne vers elle son hémisphère éclairé par le Soleil : elle diffuse donc la lumière solaire qui rend visible la partie de la Lune non directement éclairée. Par suite nous voyons le disque entier de la Lune. Les phénomènes d'irradiation interviennent : le cercle qui limite extérieurement le croissant paraît de plus grand diamètre que le cercle qui limite la partie indirectement éclairée par la Terre.

Au reste quelle que soit la phase, la partie visible de la Lune est toujours limitée par un demi-cercle de contour apparent.

2° — Pour fixer la position de la Lune, il faut déterminer la position du centre de son disque. Pour le Soleil, on détermine les ascensions droites et les déclinaisons des bords opposés; on prend respectivement la moyenne des résultats.

On ne peut opérer de même pour la Lune, puisque les bords qu'il faut faire tangenter par les fils verticaux et horizontaux du réticule de la lunette méridienne, ne sont pas généralement *tous deux* visibles.

Quand la Lune passe au méridien, le bord oriental est invisible de la nouvelle lune à la pleine lune; le bord occidental est invisible de la pleine lune à la nouvelle lune suivante. De même, hors des cas plus haut signalés, on ne peut observer que le bord inférieur ou le bord supérieur.

3° — Diamètre apparent.

Il devient donc nécessaire de diviser l'opération. On détermine le temps de passage au méridien du bord visible, ou sa déclinaison; d'autre part on mesure le diamètre apparent, *ce qui est toujours possible puisque la ligne des cornes est un diamètre.* On utilise un héliomètre, ou un micromètre à deux fils parallèles mobiles qu'on oriente normalement à la ligne des cornes et qu'on superpose aux pointes des cornes.

Pour mesurer l'ascension droite de la Lune, voici comment on procède. On connaît par hypothèse la valeur angulaire des écarts entre les fils verticaux de la lunette méridienne. On détermine les temps de passage aux divers fils. On mesure le diamètre apparent actuel du disque, en orientant convenablement les fils du micromètre. On sait donc où se serait à chaque instant projeté le bord invisible, par suite à quelle heure il serait passé au fil sans collimation. D'où le calcul (par une moyenne) de l'heure du passage du centre de la Lune sur ce fil.

La déclinaison du centre de la Lune s'obtient par une méthode analogue.

Je suppose que la lunette méridienne sert à déterminer le diamètre apparent; en fait on étudie séparément la loi de variation de ces diamètres avec un appareil approprié.

311. Variations du diamètre apparent. Distance de la Lune.

1° — Nous avons dit (§ 237) comment on détermine la distance de la Terre à la Lune, ou, ce qui revient au même, la *parallaxe horizontale.* C'est l'angle sous lequel un observateur, placé au centre de la Lune et supposé dans l'horizon d'un point de la surface terrestre, voit le rayon terrestre correspondant.

A chaque parallaxe correspond une distance du centre de la Terre au centre de la Lune; donc à chaque parallaxe correspond un diamètre apparent.

Soit α la parallaxe en secondes, δ le diamètre apparent également en secondes d'arc; soit a la distance en rayons terrestres. On a :

$$\alpha = 1{,}833\,\delta, \qquad \delta a = 112\,518.$$

Ainsi le diamètre apparent de 30′ ou de 1 800″ correspond à la distance a de 62,51 rayons terrestres, et à la parallaxe $\alpha = 3\,300''$.

2° — Le diamètre apparent de la Lune vue du centre de la Terre est

variable d'un jour à l'autre suivant la position de la Lune sur son orbite (§ 289).

Il varie même d'une façon sensible au cours d'une journée pour un observateur emporté par le mouvement diurne.

C'est ce que montre la figure 241.

Soit P un point à la surface de la Terre; sa latitude est λ. Il est entraîné par le mouvement diurne; appelons β l'angle que fait actuellement avec zTx le plan PTz. Comme approximation suffisante pour le

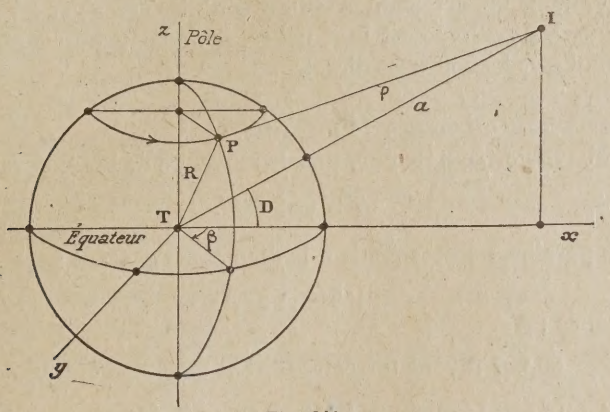


Fig. 241.

but poursuivi, supposons le centre de la Lune fixe dans le plan PTx; cela revient à négliger pour le jour considéré la variation de la déclinaison D et de l'ascension droite.

Pour la distance $\overline{PL} = \rho$, on trouve aisément :

$$\rho^2 = a^2 + R^2 - 2aR(\sin D \,.\, \sin\lambda + \cos D \,.\, \cos\lambda \,.\, \cos\beta).$$

Posons : $\alpha = R : a, \qquad \alpha' = R : \rho.$

En raison de la petitesse de α et de α', cette formule devient :

$$\begin{aligned} \rho &= a - R(\sin D \,.\, \sin\lambda + \cos D \,.\, \cos\lambda \,.\, \cos\beta), \\ \alpha' &= \alpha + \alpha^2(\sin D \,.\, \sin\lambda + \cos D \,.\, \cos\lambda \,.\, \cos\beta). \end{aligned} \qquad (1)$$

Ainsi ρ diminue d'une façon sensible depuis le lever de la Lune jusqu'à son passage au méridien ($\beta = 0$), pour croître à nouveau après ce passage. Pour discuter la grandeur de cette variation, on se rappellera que R est sensiblement le soixantième de a; d'où $\alpha = 0{,}0166$.

La plus grande variation a lieu pour un point de l'équateur, lorsque la déclinaison de la Lune est nulle :

$$D = \lambda = 0, \qquad \rho = a - R\cos\beta, \qquad \alpha' = \alpha + \alpha^2\cos\beta.$$

α est la parallaxe horizontale.

Admettons la valeur $\alpha = 0{,}0166$. On tire des formules (1) :

$$\alpha^2 = 0{,}000276 = 57''.$$

La formule précédente devient :

$$\alpha' = \alpha + 57'' \cos\beta.$$

Les calculs précédents supposent la Terre sphérique. On obtient des formules plus compliquées en la supposant aplatie. En 1734 Manfredi proposait même de déterminer la figure de la Terre par les parallaxes de la Lune. La méthode est ingénieuse, mais beaucoup moins précise évidemment que les mesures directes.

312. **Grandeur et masse de la Lune.**

La parallaxe horizontale équatoriale moyenne de la Lune est :

$$57'\,3'' = 3\,423''.$$

A cette parallaxe correspondent le diamètre apparent :

$$31'\,7'' = 1\,867'',$$

et la distance :

$$60{,}267 \text{ rayons terrestres} = 384\,395 \text{ kilomètres.}$$

D'où résulte que le rayon de la Lune (qui peut être considérée comme sphérique) est :

$$0{,}2723 \text{ du rayon terrestre} = 1\,737 \text{ kilomètres.}$$

Le volume de la Lune vaut 0,02025 de celui de la Terre.

On évalue la masse de la Lune à $1 : 81{,}4 = 0{,}0123$ de celle de la Terre. D'où la densité moyenne relativement petite 3,33 par rapport à l'eau (0,606 par rapport à la densité moyenne de la Terre qui est 5,53).

313. **Rotation de la Lune. Libration en longitude.**

1° — Dans la rotation de la Lune se présentent de singulières coïncidences.

Les pôles Π de l'écliptique, P de l'orbite, R de l'équateur lunaire sont à chaque instant dans le même plan, en négligeant bien entendu les inégalités périodiques qui affectent les nœuds et l'inclinaison de l'orbite. Le point R où l'axe de rotation de la Lune coupe la sphère céleste (pôle de rotation), se déplace donc autour du pôle Π de l'écliptique. Les valeurs moyennes des angles sont :

$$\Pi P = 5°\,8'\,48'', \qquad \Pi R = 1°\,28'\,45''.$$

Cela revient à dire qu'en moyenne l'équateur lunaire coupe un plan parallèle à l'écliptique suivant la ligne des nœuds ON de l'orbite.

2° — La Lune fait un tour autour d'un axe passant par son centre de gravité, exactement en une révolution sidérale :

27 jours 7 heures 43 minutes 11 secondes.

Sa vitesse de rotation est uniforme.

Reportons-nous à la théorie (§ 85) de ce que les anciens astronomes appelaient le *mouvement elliptique simple*. Représentons l'orbite elliptique dont les foyers sont la Terre T et le point F. De la loi des aires et de la rotation uniforme de la Lune autour de son axe, la droite résulte qu'elle présente toujours le même point A au foyer F. Donc vue de la Terre, elle ne présente pas continuellement le même aspect; elle semble soumise à une oscillation autour de son axe, oscillation dont la période est le mois sidéral : c'est la *libration* (balancement) *en longitude*.

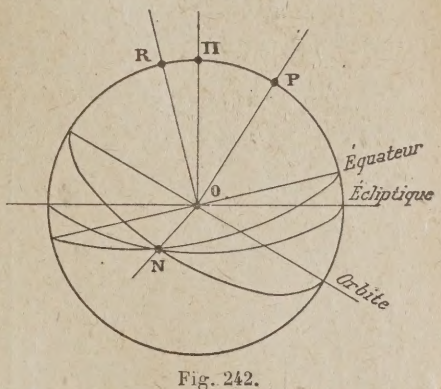


Fig. 242.

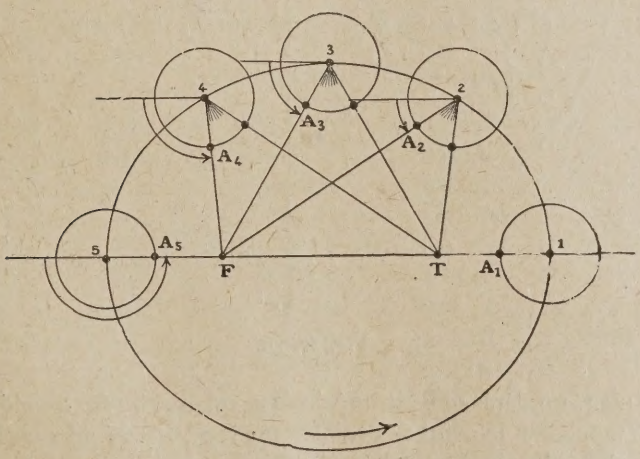


Fig. 243.

3° — L'amplitude de cette oscillation est l'angle dont, du point 3 de l'orbite, on voit la droite $\overline{FT} = 2c$, distance des foyers. D'où :

angle F3T $= 2c : a = 2$ fois l'excentricité.

L'excentricité de l'orbite lunaire est 0,0549. D'où angle F3T $= 6° 15'$. La libration en longitude nous montre donc, au delà de chaque bord

moyen du disque lunaire, deux fuseaux normaux à l'écliptique et dont l'angle peut atteindre 8° (en raison des inégalités).

Pendant une révolution sidérale un point de la surface lunaire s'écarte donc de sa position moyenne d'un angle qui, à cause des inégalités en longitude, peut atteindre 8° de part et d'autre.

A ce déplacement angulaire correspond sur le disque considéré

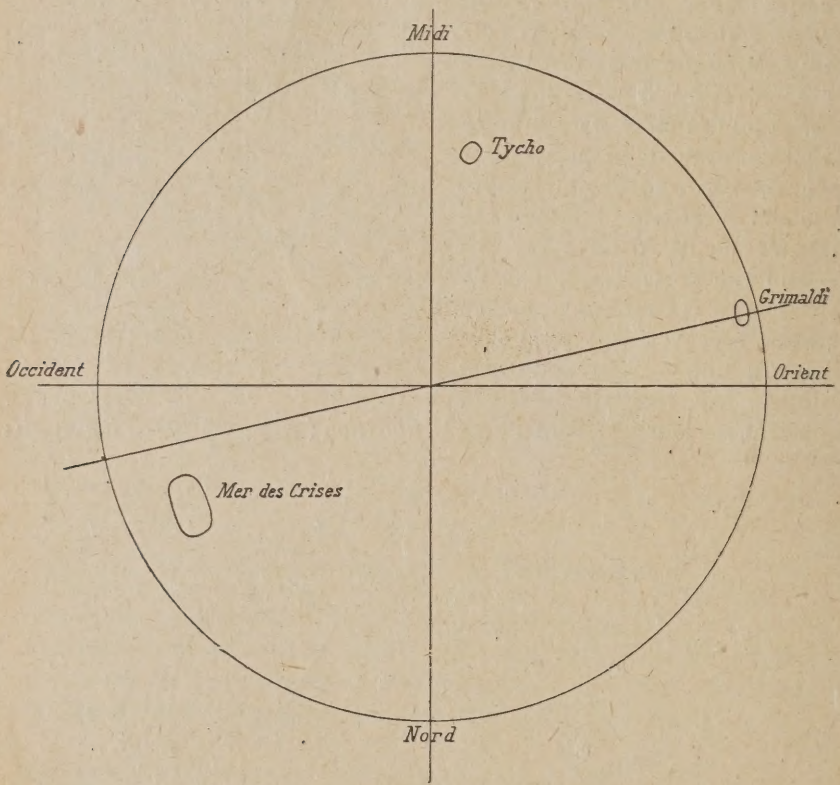


Fig. 243 *bis*.

comme plan, un déplacement linéaire qui est maximum quand, dans sa position moyenne, le point se projette sur le centre du disque. Le déplacement s'annule quasiment quand dans sa position moyenne, le point se projette sur le bord. Calculons la valeur maxima. On a :

$$\sin 8^\circ = 0{,}139.$$

L'amplitude du mouvement qui se projette alors en vrai grandeur, est 0,139 fois le rayon apparent du disque que nous prendrons de

$$15' 33'' = 933''.$$

On trouve ainsi : $130'' = 2' 10''$.

La distance des positions extrêmes est le double de l'amplitude; elle vaut 4'20".

4° — Voici la description du phénomène telle que la donne Galilée.

« Il y a dans la Lune deux certaines taches dont l'une est la Mer des Crises, au nord-nord-ouest [le lecteur saura qu'on représente toujours la Lune *renversée*, comme on la voit dans une lunette]; l'autre lui est presque diamétralement opposée [nous l'appelons Grimaldi]. La première se voit sans lunette comme une tache ovale. La seconde plus petite est située dans un espace assez clair.

« Ceci posé, l'une se rapproche du bord de l'astre quand l'autre s'en éloigne, de manière que la distance de la Mer des Crises au bord peut doubler. Grimaldi étant plus près du bord, la différence est plus sensible : sa distance au bord est quelquefois triple de ce qu'elle était auparavant. »

Nous considérons plus haut ce qui se passe sur le disque de la Lune *au cours d'une révolution sidérale*, sans tenir compte de ce que, *pour une révolution donnée*, on ne voit la Lune pleine qu'un instant. Mais à chaque révolution la pleine Lune se produit pour une position différente de la Lune sur son orbite; nous n'avons donc qu'à attendre un temps suffisant pour que l'hypothèse faite plus haut se trouve réalisée, c'est-à-dire pour voir la Lune *pleine* successivement en tous les points de son orbite.

Voici pour 1915 les heures des pleines lunes et les longitudes correspondantes :

		Heures.	Longitudes géocentriques.	
1er janvier	1915	0h 30m	100° 0′	Différences.
30 —	—	16 50	130 15	30° 15′
1er mars	—	6 42	160 12	29 53
30 —	—	17 47	189 26	29 14
29 avril	—	2 29	218 13	28 47
28 mai	—	9 42	246 30	28 17
26 juin	—	16 36	274 26	27 44
26 juillet	—	0 20	302 25	27 59
24 août	—	9 49	330 37	28 12
22 septembre	—	21 44	359 16	28 43
22 octobre	—	12 25	28 31	29 15
21 novembre	—	5 45	58 20	29 49
21 décembre	—	1 1	88 34	30 14

Aux mêmes dates et heures les longitudes solaires sont plus grandes de 180°.

314. Forme de la Lune.

Pour expliquer que la Lune tourne exactement de 360° autour de son axe pendant une révolution sidérale, on est forcé d'admettre l'une des

deux hypothèses suivantes. Si elle est sphérique, son centre d'inertie ne coïncide pas avec son centre de figure; elle n'est donc pas formée de couches concentriques séparément homogènes. Si elle est homogène, il est impossible qu'elle soit sphérique.

Il semble bien d'autre part que la Lune soit légèrement aplatie suivant la ligne des pôles. On est conduit à en faire un ellipsoïde à trois axes inégaux; le plus long est dirigé suivant la droite qui joint le centre de la Terre au centre de la Lune; le plus court est dirigé suivant l'axe de rotation.

315. Libration en latitude. Libration diurne.

1° — LIBRATION EN LATITUDE.

Nous avons dit que les normales à l'écliptique et à l'orbite lunaire

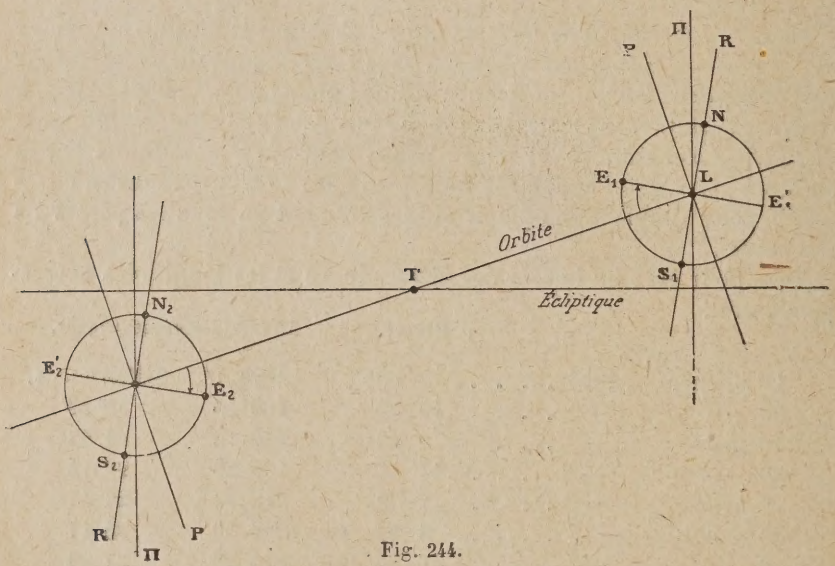


Fig. 244.

menées par le centre d'inertie de la Lune sont toujours dans le même plan avec l'axe de rotation de la Lune; de plus ces droites font entre elles des angles constants (§ 313).

Le plan du tableau passe par le centre de la Terre et est normal à la ligne des nœuds de l'orbite lunaire; il contient donc les droites LP, LΠ, LS.

Regardons comment se présente la Lune pour deux passages consécutifs dans ce plan, à environ 14 jours de distance. Il est clair que le point E de l'équateur lunaire est : pour le premier passage, à 6° 37′ au-dessus du plan de l'orbite; pour le second, à 6° 37′ au-dessous de ce plan. D'où un déplacement total de 13° environ. Dans le premier cas

on voit le pôle lunaire S_1; dans le second, on voit le pôle lunaire N_2 (traces sur la Lune de son axe de rotation).

On a $\sin(6° 37') = 0{,}115$.

L'amplitude maxima en latitude du déplacement d'un repère sur le disque lunaire est (§ 311) :

$$933'' \times 0{,}115 = 107'' = 1'\,47''.$$

La distance des positions extrêmes du repère est 3′ 34″.

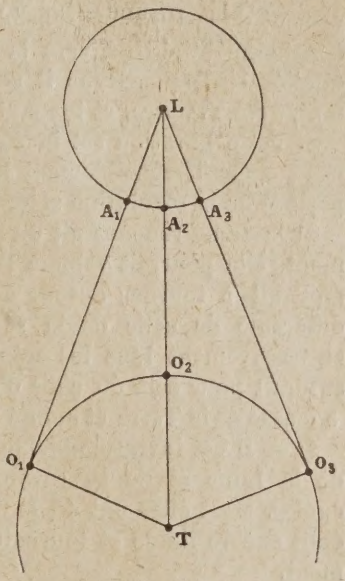


Fig. 245.

2° — La *libration diurne* vient de ce que l'observateur n'est pas au centre de la Terre. Il est facile de voir que, les centres des deux astres restant dans la même situation relative, en raison de la rotation terrestre, ce n'est pas toujours le même point de la surface de la Lune qui se projette sur le centre du disque pour un observateur entraîné par la rotation terrestre. C'est ce que montre immédiatement la figure 245 qui naturellement exagère les dimensions des deux sphères. L'amplitude de la libration diurne peut atteindre la parallaxe horizontale, c'est-à-dire près d'un degré.

On a : $\sin 57' = 0{,}017$; $933 \times 0{,}017 = 16''$.

La distance des positions extrêmes est 32″.

315 *bis*. **Libration réelle**.

1° — Imaginons la Lune comme un ellipsoïde allongé, nous présentant un des bouts de son grand axe. Elle constitue une sorte de pendule, en équilibre sous l'action de la Terre, et dont le point de suspension (centre d'inertie de l'astre) décrit l'orbite lunaire.

Nous savons que, par rapport à ce centre (§ 252), le bout le plus proche de l'ellipsoïde est attiré, le bout le plus éloigné est repoussé par la Terre.

Supposons que pour une raison quelconque, le grand axe de l'ellipsoïde lunaire soit écarté de sa position d'équilibre. L'attraction terrestre tendant à le ramener dans cette position, il se mettra à osciller. Comme les frottements sont nuls, l'amplitude de l'oscillation se maintiendra constante.

C'est à ce phénomène qu'on donne le nom de *libration réelle*.

A la vérité l'observation n'en montre pas trace. Il ne peut cependant

pas ne pas exister; en d'autres termes, il n'est pas possible que la rotation de la Lune soit rigoureusement uniforme. En effet si le mouvement de la Lune est sensiblement uniforme, son grand axe n'est pas constamment dirigé vers la Terre : c'est la *libration en longitude* étudiée ci-dessus. Donc il naît un couple dirigé tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre, et tendant à produire une libration réelle.

Si cette libration est insensible, c'est que le couple est trop faible pour changer sensiblement la vitesse de rotation en 14 jours (demi-période de la révolution sidérale).

Si la Lune rencontrait un petit astre qui la choquât dissymétriquement, elle pourrait vaincre l'attraction dirigeante de la Terre. Elle se mettrait à tourner autour de son axe de rotation avec une période différente de celle de la révolution sidérale : elle nous montrerait successivement tous les points de sa surface. Laplace a montré qu'il suffirait pour cela du choc d'un astre n'ayant qu'un cent millième de a masse de la Terre et animé de la vitesse cométaire.

2° — Il est invraisemblable qu'à l'origine les périodes de la rotation de la Lune et de sa révolution sidérale aient été rigoureusement égales. Mais elles ont dû le devenir, si l'on suppose qu'alors la Lune était encore fluide et tournait un peu plus vite qu'elle ne fait actuellement.

En effet il devait se produire à sa surface des *marées*. Autrement dit, sous l'influence de l'action de la Terre, elle ne restait pas sphérique; elle se transformait en un ellipsoïde dont le petit axe coïncidait avec l'axe de rotation, dont le grand axe était dirigé vers la Terre. Mais comme par hypothèse elle tournait plus vite qu'actuellement, le grand axe se déplaçait à l'intérieur de la matière de la Lune; d'où des déformations, des frottements considérables et une *diminution de la vitesse de rotation*, jusqu'au moment où cette vitesse est devenue précisément égale à celle que nous voyons. La Lune a dû se solidifier une fois sa forme stabilisée.

A la vérité, on discute pour savoir si, oui ou non, la Lune a la figure d'équilibre qu'elle aurait prise si elle avait été primitivement fluide. Je ne puis insister,

Nous avons vu que les marées terrestres sont invoquées pour expliquer au besoin un petit allongement du jour sidéral (§ 187).

316. Etude de la surface lunaire. Photographie.

1° — Voici longtemps que sous le nom de *Sélénographie*, on s'efforce d'étudier les particularités de la surface lunaire; l'emploi de la photographie a donné une impulsion nouvelle à ces études dont nous tâcherons d'apprécier l'utilité philosophique.

Nous savons que le diamètre lunaire vaut 3 473 kilomètres, pour un diamètre apparent moyen de $31' 7'' = 1\,867''$. Au voisinage du centre du disque lunaire, les longueurs superficielles se projettent en vraie gran-

deur : la seconde d'arc vaut donc environ 2 kilomètres, plus exactement 1 860 mètres (un mille marin environ).

Au quart du disque lunaire, la seconde d'arc vaut déjà 2 160 mètres, puisqu'on a $\cos 30° = 0{,}866$. Il est clair qu'au bord du disque la surface lunaire se projette de champ; une seconde d'arc vaut une longueur considérable.

2° — Faire une carte de la Lune, c'est représenter la Lune suivant un des systèmes de projection utilisés pour les cartes géographiques. C'est par conséquent prendre une sphère de référence, déterminer les

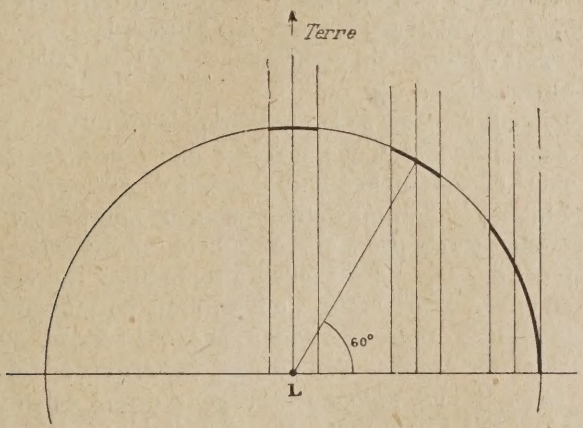


Fig. 246.

coordonnées géographiques des projections des lieux caractéristiques et représenter ces projections. Il est naturel de choisir comme axe des coordonnées géographiques l'axe de rotation lunaire (rien n'empêche théoriquement de prendre une droite quelconque passant par le centre de la sphère à représenter) par suite de choisir pour plan fondamental l'équateur lunaire. Le méridien origine (arbitraire comme toujours) sera naturellement le plan qui se projette sur l'axe de rotation *dans la position moyenne* de la Lune. Chaque point de la Lune sera défini par ses coordonnées.

Mais ce qui est relativement facile pour la Terre ne l'est pas du tout pour la Lune, d'abord parce que l'axe de rotation et la position moyenne sont assez mal déterminés; ensuite parce qu'il n'existe à la surface de la Lune rien d'aussi précis comme définition que les signaux des géodésiens. Au surplus on est en droit de demander si une telle carte présente une utilité quelconque en dehors de la pure curiosité.

En effet les aspects lunaires varient considérablement d'un jour à l'autre en raison de la libration et du changement de l'éclairage. Certes les objets terrestres nous paraissent d'aspects assez différents suivant qu'ils sont éclairés de droite ou de gauche : tout de même leur forme

apparente générale reste inaltérée, tandis que la forme des objets lunaires change du tout au tout.

Or que les cirques ou montagnes lunaires présentent tels ou tels détails, n'a d'intérêt que pour les sélénographes professionnels, en dehors de l'unique question suivante : *la Lune se modifie-t-elle actuellement?*

Cette question revient à cette autre : *pour un éclairage déterminé, l'aspect de la surface lunaire varie-t-il?* La réponse n'implique en aucune manière la construction d'une carte au sens géométrique du mot; elle résulte de la reproduction et de la comparaison des aspects, pour des temps très éloignés les uns des autres, la Lune, supposée dans le même état de libration, étant éclairée de la même manière lors des diverses observations.

3° — Évidemment l'emploi de la photographie est un grand progrès : elle fournit sans peine et d'une manière quasi instantanée ce qui exigeait un effort considérable quand il fallait dessiner, opération qui nécessite une interprétation préalable et demande du temps. Le dessinateur ne parvenait même pas à atteindre le but proposé en raison des variations rapides des aspects des objets à reproduire. Ce serait cependant une grande erreur de croire qu'il suffirait de photographier la Lune une seule fois, à un instant connu, le cliché serait-il merveilleusement réussi et de grandes dimensions, pour que la topographie lunaire soit faite. Il faut recommencer pour divers éclairages. Les clichés présentent des changements si considérables qu'on reste dans l'incertitude si ces changements sont apparents ou réels. Aussi bien la photographie de la Lune est le type des travaux de manœuvre; elle n'exige aucune intelligence et fait la joie des astronomes qui craignent de fatiguer leurs méninges vides.

317. Constitution de la Lune.

La question étant posée comme il précède, le lecteur comprendra que je n'insiste pas. Les sélénographes se disputent homériquement la découverte des moindres détails; c'est à qui trouvera un cratère de plus ou moins, mettra les noms les plus bizarres sur les accidents de terrain les plus quelconques. Faire la topographie d'une surface sphérique distante de 384 400 kilomètres est évidemment une occupation pleine d'attraits et d'utilité. Je me contente d'une description sommaire.

On distingue sur la surface de la Lune de vastes aires sombres, sans aspérités notables, qu'on appelle *mers* (des Pluies, de la Sérénité, de la Tranquillité, de la Fécondité, des Crises,...) bien que l'eau en soit absente. On les considère comme des parties relativement déprimées, reproduisant plus ou moins vaguement la sphéricité du globe lunaire, des glaciers, de quasi-fosses océaniques, des régions d'affaissement, etc. : ce ne sont pas les épithètes et les comparaisons qui manquent aux sélénographes.

En dehors de ces plaines sont les montagnes d'aspect très caractéristique, si caractéristique que je conseille au lecteur de regarder la Lune avec une jumelle assez grossissante. Trois minutes de contemplation (*surtout quand la Lune est en quadrature*) feront mieux que cinquante pages de description. Il est vrai que recommander au lecteur de regarder lui-même les choses qu'il étudie, exige une audace dont je suis actuellement en France le seul capable.

Les montagnes de la Lune n'ont aucun rapport avec les *chaînes*

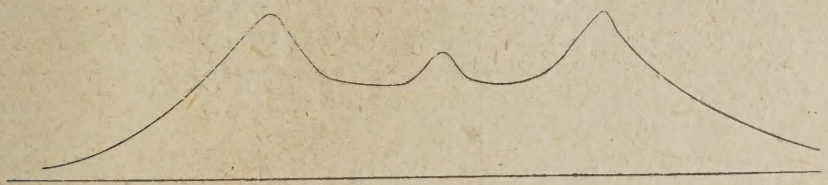


Fig. 247.

creusées de vallées concourantes. On peut les comparer avec une surface d'argent roché ou plus prosaïquement avec la peau d'une personne qui aurait eu la petite vérole. On distingue parmi ces boursouflures un très grand nombre de cirques, identiques aux cirques volcaniques des Dômes d'Auvergne.

318. Mesure de la hauteur des montagnes de la Lune.

On emploie pour cette mesure deux méthodes analogues.

1° — On observe parfois des points éclairés, bien que se trouvant dans la partie sombre du disque lunaire. On admet que ce sont des sommets de montagne rencontrés par des rayons solaires tangents à la surface (fig. 248).

Soit h la hauteur de la montagne.

Un théorème classique donne la relation approchée :

$$\overline{AB}^2 = 2hR.$$

Pour simplifier les calculs, posons que la montagne est dans le plan LTS. Mesurons les distances $\overline{BC}$ et $\overline{BD}$, normalement à la droite LT qui joint le centre de la Lune au centre de la Terre. Ces distances sont comprises entre le point éclairé A, la courbe qui limite l'ombre et la droite LT.

On a : $\overline{BC} = \overline{AB} \cdot \cos\alpha, \quad \overline{BD} = R \cdot \sin\alpha;$

$$h = \overline{BC}^2 : \left(2\sqrt{R^2 - \overline{BD}^2}\right).$$

2° — Une seconde méthode consiste à mesurer la grandeur de l'ombre projetée par la montagne sur la plaine environnante (fig. 243).

La longueur réelle O de l'ombre sur la surface lunaire dépend de

l'angle z que font les rayons solaires avec le rayon du disque lunaire qui aboutit au sommet de la montagne.

On a :

$$O = h.\text{tg}z.$$

Nous supposons que l'ombre se projette sur le plan tangent ; d'où une cause d'erreur, car nous ignorons l'altitude de la plaine avoisinante.

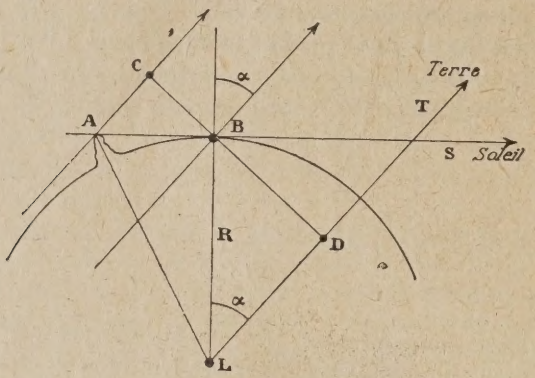


Fig. 248.

Quoi qu'il en soit, la longueur apparente O' de cette ombre vue de la

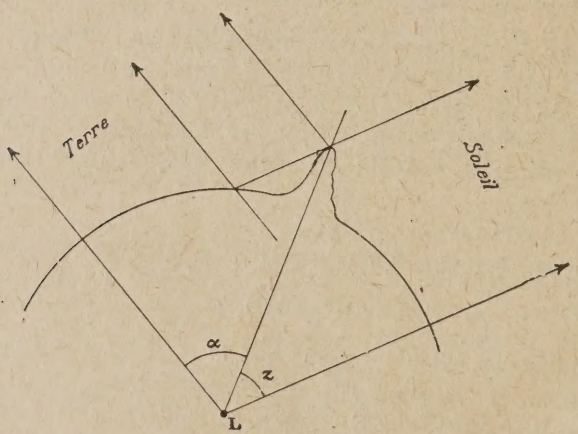


Fig. 249.

Terre dépend de l'angle α que fait la normale au plan tangent avec la droite qui joint les centres de la Lune et de la Terre. On a :

$$O' = O\cos\alpha = h\,\text{tg}z\,.\cos\alpha.$$

Je laisse au lecteur le souci de dire exactement ce qu'on mesure ; je crains que personne n'en sache rien. Car enfin une montagne n'est pas un obélisque ; cela possède généralement une épaisseur. Le flanc de la

montagne opposé au Soleil est dans l'ombre et pourtant ne fait pas partie de l'ombre théorique projetée nécessairement sur le plan tangent.

Au surplus tout cela n'a qu'un intérêt de vingt-septième ordre.

Que les montagnes de la Lune aient 6 ou 8 mille mètres, il faut être bien nul pour s'y intéresser.

Une seule chose est remarquable : *la hauteur des montagnes relativement au rayon de la Lune* : mais il suffit de regarder la Lune avec une jumelle quand elle est en quadrature pour se rendre compte de l'extraordinaire dentelure de la demi-ellipse terminatrice.

CHAPITRE IV

ECLIPSES

Éclipses de Lune.

319. **Généralités sur les éclipses.**

Si la Lune se déplaçait exactement sur l'écliptique, à chaque lunaison son centre passerait deux fois sur la ligne joignant le centre du Soleil au centre de la Terre, en conjonction (lors de la nouvelle Lune), en opposition (lors de la pleine Lune).

En opposition la Lune se trouverait offusquée par la Terre; il y

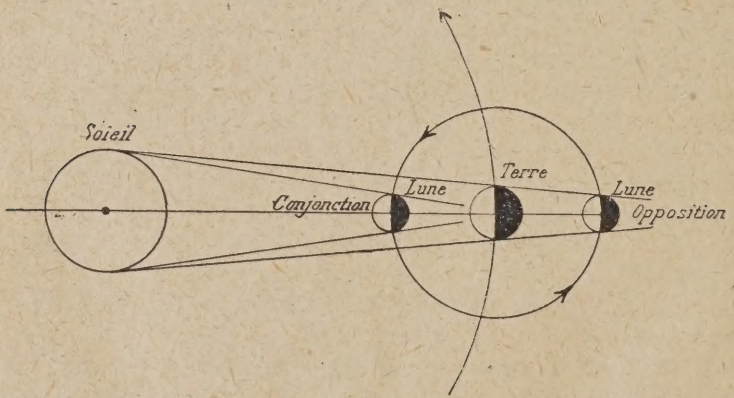


Fig. 250.

aurait donc éclipse totale de Lune à chaque lunaison, le cône de l'ombre portée par la Terre étant, comme nous le verrons, assez long pour contenir la Lune en entier.

En conjonction il y aurait éclipse de Soleil pour quelques lieux de la surface terrestre, le cône de l'ombre portée par la Lune, qui est

assez long pour atteindre la Terre, n'étant évidemment pas assez large pour la couvrir en entier.

Mais le plan de l'orbite lunaire fait moyennant 5° 9′ avec l'écliptique; d'où résulte que si, lors d'une opposition, la Lune n'est pas assez voisine de l'un des nœuds de son orbite, elle passe au-dessus ou au-dessous de l'ombre portée par la Terre; si, lors d'une conjonction, la Lune n'est pas assez voisine de l'un des nœuds de son orbite, l'ombre qu'elle porte passe au-dessus ou au-dessous de la Terre.

Le travail préliminaire au calcul de toute éclipse, consiste donc à chercher les heures des conjonctions et des oppositions (nouvelles lunes et pleines lunes), heures pour lesquelles les longitudes géocentriques des centres du Soleil et de la Lune sont égales ou diffèrent de 180°. On cherche ensuite où la Lune se trouve dans son orbite pour ces heures, et si elle est assez voisine de l'un des nœuds de cette orbite, c'est-à-dire si sa latitude est alors assez petite. Au cas où elle serait dans les limites que nous fixerons, l'éclipse se produit : il s'agit d'en déterminer les circonstances.

Nous commencerons par les éclipses de Lune qui sont plus faciles à calculer, au sens que nous allons préciser.

Lors d'une éclipse de Soleil, si nous nous trouvions sur la Lune et regardions la Terre, nous verrions un petit rond noir, entouré d'un cercle de pénombre, se promener à sa surface. Le calcul de cette *éclipse de Terre* vue de la Lune (éclipse *générale* de Soleil) est aussi élémentaire que le calcul d'une *éclipse de Lune* vue de la Terre; il est du reste identique. Ce qui est difficile dans le calcul d'une éclipse de Soleil, est de tenir compte de la rotation de la Terre; le petit rond noir vu de la Lune se déplace sur une surface elle-même animée d'un mouvement de rotation : il faut calculer sa trajectoire, non plus sur la projection du disque immobile, mais sur une surface sphérique qui tourne. L'éclipse de Soleil présente donc deux problèmes échelonnés.

Corrélativement pour voir l'éclipse de Lune il suffit de voir la Lune pendant qu'elle passe réellement dans le cône d'ombre; il suffit donc que la Lune soit au-dessus de l'horizon, ce qui a lieu pour à peu près un hémisphère. Les circonstances de l'éclipse sont les mêmes au même instant pour tous les observateurs; d'où son emploi pour la détermination des longitudes. Nous verrons plus loin (§ 324) pourquoi la méthode est peu précise.

Fixons d'abord notre discussion par des calculs approximatifs que les astronomes se croiraient déshonorés de faire; plus instructifs que tout ce qui suivra, ils donnent leur véritable sens aux calculs précis.

320. Période moyenne des éclipses de Lune.

1° — Voici d'abord les moyens mouvements sur lesquels reposent tous nos calculs.

Moyen mouvement diurne en longitude :

de la Lune	13° 10′ 35″	= + 47 435″
du Soleil		+ 3 548″
du nœud		— 191″
Mouvement relatif de la Lune et du Soleil		43 887″
Mouvement relatif du Soleil et du nœud		3 739″
Révolution du Soleil par rapport à l'un des nœuds		346j, 62

Le Soleil revient donc dans chaque nœud tous les ans avec une avance *moyenne* de 19 jours. Donc au voisinage de chaque nœud, nous

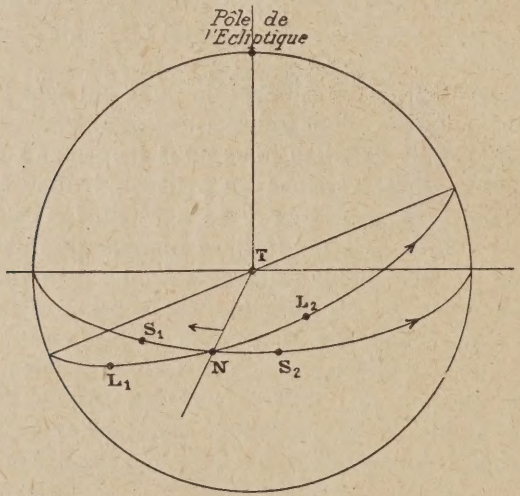


Fig. 251.

aurons une éclipse de Lune (à supposer qu'elle se produise) pour une date en avance *moyenne* de 19 jours sur l'année précédente.

C'est ce qu'on vérifie dans les tableaux des §§ 321 et 322.

2° — Montrons qu'il y a généralement une éclipse de Lune pour l'une des oppositions au voisinage desquelles le Soleil passe dans l'un des nœuds de la Lune. Il est impossible qu'il y ait éclipse de Lune pour deux oppositions consécutives.

D'où résulte que le nombre des éclipses de Lune par an est généralement *deux*; il peut être *un* ou *zéro*. Il peut cependant être *trois*; en effet la période de passage du Soleil par les nœuds étant 346 j. 62, le Soleil peut exceptionnellement passer trois fois par les nœuds en une année

(c'est ce qui arrive en 1917). Il faut pour cela qu'il y passe dans les premiers jours de janvier; il y repasse alors fin décembre.

Considérons la Terre comme fixe (fig. 252). Elle joue le rôle d'écran par rapport au Soleil S (non représenté) : d'où un cône d'ombre circulaire dont l'axe est ST. Avec la distance actuelle de la Terre à la Lune comme rayon, décrivons une sphère Σ; elle coupe le cône d'ombre suivant un cercle. Nous calculerons plus loin sous quel angle son rayon est vu du centre de la Terre. Son centre que nous appellerons *anti-soleil*, décrit l'écliptique (de S_1 en S_2) avec la vitesse angulaire moyenne précédemment indiquée pour le Soleil; la longitude est en effet celle du Soleil + 180°.

Sur la même sphère Σ se promène la Lune avec une vitesse environ 13 fois plus grande. Il s'agit de déterminer à quelle condition les deux disques empiètent l'un sur l'autre. Évidemment il faut qu'à l'instant de la conjonction (les centres de l'antisoleil et de la Lune sont sur le même grand cercle normal à l'écliptique), la distance en longitude au nœud N soit inférieure à une certaine limite, limite d'autant plus petite que la trajectoire *relative de la Lune* (nous préciserons plus loin ce qu'il faut entendre par là) est plus inclinée sur l'écliptique.

Pour fixer les idées, prenons 5° 9′ pour inclinaison de la trajectoire *relative*.

Soit 17′ le demi-diamètre apparent moyen de la Lune.

Admettons que le demi-diamètre apparent du cercle d'ombre a 47′ pour valeur maxima. Les disques n'empiètent assurément pas l'un sur l'autre, si la latitude à l'instant de la conjonction dépasse 64′.

Cherchons à quelle distance x du nœud, la latitude a cette valeur, pour l'inclinaison moyenne susdite. Nous avons la relation :

$$\operatorname{tg}(64') = \sin x \,.\, \operatorname{tg}(5° 9'), \qquad x = 12° \text{ environ.}$$

Si donc lors de la conjonction I, l'antisoleil S_1 est à plus de 12° du nœud, il y a tout à parier que les disques n'empiètent pas l'un sur l'autre.

Je fais le calcul avec l'inclinaison *moyenne* vraie 5° 9′. L'inclinaison vraie varie entre 5° et 5° 18′; mais l'inclinaison à introduire dans notre calcul est celle de ta trajectoire *relative* qui est un peu plus grande.

3° — L'antisoleil se déplace environ 13 fois moins vite que la Lune. Quand après une première conjonction voisine de l'un des nœuds, la Lune aura parcouru un tour complet, elle retrouvera l'antisoleil non loin du même nœud. Il s'agit de montrer que les conditions d'une éclipse, même partielle, ne peuvent se présenter pour deux oppositions successives de la Lune et du Soleil, deux conjonctions successives de la Lune et de l'antisoleil.

Le mouvement diurne du Soleil par rapport au nœud est moyenne

ment 3739″. En une révolution synodique, le Soleil se déplace donc par rapport au nœud de :

$$3\,739 \times 29{,}53 = 110° 117 = 30° 35' 17''.$$

Si lors de l'opposition I, l'antisoleil S_1 est à la distance du nœud $\alpha > 12°$, il est quasi sûr qu'il n'y a pas éclipse. Mais à l'opposition suivante II, l'antisoleil est de l'autre côté du nœud, à la distance $30° - \alpha$:

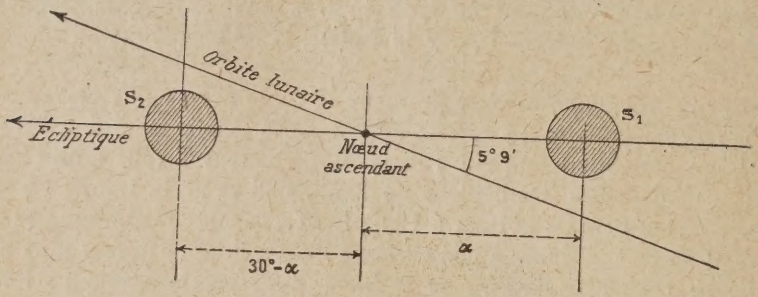


Fig. 252.

il est possible qu'il y ait éclipse. En tout cas, à l'opposition III, sa distance au nœud est $61° - \alpha$; il est donc sûr qu'il n'y a pas deux éclipses consécutives. D'autre part si lors de l'opposition I, α est assez inférieur à 12° pour qu'il y ait éclipse, à l'opposition II, $\alpha > 18°$: il n'y a pas éclipse.

Ainsi il n'est pas sûr, mais il est probable qu'il y a éclipse de Lune deux fois par an, au voisinage de chaque passage du Soleil par l'un des nœuds de l'orbite lunaire. En tous cas les éclipses ne peuvent avoir lieu lors de deux oppositions consécutives. Ce que nous voulions établir.

Dans la figure 251 la sphère céleste est vue du dehors; dans la figure 252 elle est vue du dedans.

4° — Le lecteur comprend maintenant ce que signifie la phrase : *les éclipses se produisent avec une avance moyenne de 19 jours.* Pour trouver ces 19 jours, il faut considérer non pas les éclipses pour des années consécutives, mais une longue série d'éclipses.

Par exemple, nous avons une éclipse le 11 mars 1914; nous en avons une autre le 22 mars 1932, soit un retard de 355 jours environ pour 18 ans, ce qui fait en moyenne un retard annuel de $355 : 18 = 19{,}7$ jours.

Si nous prenons au contraire deux années consécutives, nous pouvons avoir une avance de 10 jours seulement (1924-1925) ou de 40 jours (1929-1930).

321. Éclipses de Lune et de Soleil.

ANNÉES	NŒUD ASCENDANT		NŒUD DESCENDANT	
	Lune.	Soleil.	Lune.	Soleil.
1914	11 mars.	»	4 septembre.	21 août.
1915	»	14 février.	»	10 août.
1916	18 janvier.	3 février.	15 juillet.	»
1917	8 janvier.	23 janvier.	4 juillet.	19 juin.
	28 décembre.	—	—	—
1918	»	3 décembre.	24 juin.	8 juin.
1919	8 novembre.	22 novembre.	»	29 mai.
1920	27 octobre.	»	3 mai.	»
1921	16 octobre.	1er octobre.	22 avril.	8 avril.
1922	»	»	»	28 mars.
1923	26 août.	10 septembre.	3 mars.	17 mars.
1924	14 août.	30 août.	20 février.	»
1925	4 août.	»	8 février.	24 janvier.
1926	»	8 juillet.	19 décembre.	14 janvier.
1927	15 juin.	29 juin.	8 décembre.	»
1928	3 juin.	19 mai.	27 novembre.	12 novembre.
1929	23 mai.	9 mai.	»	1er novembre.
1930	13 avril.	»	7 octobre.	»
1931	2 avril.	17 avril.	26 septembre.	»

322. Éclipses de Lune et de Soleil.

ANNÉES	NŒUD ASCENDANT		NŒUD DESCENDANT	
	Lune.	Soleil.	Lune.	Soleil.
1932	22 mars.	»	14 septembre.	»
1933	»	24 février.	»	21 août.
1934	30 janvier.	14 février.	26 juillet.	10 août.
1935	19 janvier.	»	16 juillet.	»
1936	8 janvier.	»	4 juillet.	19 juin.
1937	18 novembre.	2 décembre.	»	»
1938	7 novembre.	22 novembre.	14 mai.	»
1939	28 octobre.	»	3 mai.	19 avril.
1940	»	1er octobre.	22 avril.	»
1941	5 septembre.	21 septembre.	13 mars.	»
1942	26 août.	10 septembre.	2 mars.	»
1943	15 août.	»	20 février.	4 février.
1944	»	20 juillet.	29 décembre.	25 janvier.
1945	25 juin.	9 juillet.	19 décembre.	14 janvier.
1946	14 juin.	29 juin.	8 décembre.	»
1947	3 juin.	20 mai.	»	»
1948	23 avril.	9 mai.	18 octobre.	1er novembre.
1949	13 avril.	28 avril.	7 octobre.	»

323. Saros, cycle des éclipses de Lune.

1° — Les anciens prédisaient le retour des éclipses de Lune, en appliquant la remarque qu'elles se reproduisent dans le même ordre tous les 18 ans 11 jours. Ce cycle porte le nom de Saros.

Voici sur quelles coïncidences il est établi.

Révolution draconitique de la Lune	27j,2122178
Période du Soleil par rapport aux nœuds P =	346 ,61963
Révolution synodique	29 ,5305881
242 révolutions draconitiques font. . . .	6 585,358 jours;
223 lunaisons	6 585,321 —
19 périodes P.	6 585,4 —
18 années juliennes	6 574,5 —

Donc au bout de 18 ans 11 jours (ce qui fait à peu près 223 lunaisons), la Lune aura tourné 242 fois et le Soleil 19 fois, de manière à se trouver de même par rapport aux nœuds de la Lune. Comme les éclipses ne dépendent que des situations de la Lune et du Soleil par rapport à la ligne des nœuds, elles se reproduiront *à peu près* identiques après la période de 18 ans 11 jours.

C'est ce que montrent les tableaux précédents. Ils donnent toutes les éclipses de Lune et seulement les éclipses de Soleil visibles en Europe, en Asie et dans le nord de l'Afrique. Ils correspondent à deux cycles.

2° — La conclusion est un peu rapide et les faits la démentent.

Il est d'autant plus nécessaire d'insister, que cette discussion fixera nos idées sur le rôle des moyennes en Astronomie.

Voici d'abord l'exemple que donne Lalande du peu de précision du cycle de 18 ans 11 jours pour prédire les éclipses (pour la définition des doigts, voir § 327).

Éclipse du	31 janvier	1580.	totale;
après 1 période,	10 février	1598.	11,5 doigts;
— 2 périodes,	14 mars	1634.	11,0 —
— 4 périodes,	27 avril	1706.	5,5 —
— 3 périodes,	29 mai	1760.	0,3 —
— 1 période,	10 juin	1778.	inexsistante.

Ce résultat tient à deux causes; d'abord que 242 révolutions draconitiques ne font pas exactement 19 périodes P du Soleil; ensuite que les inégalités du mouvement de la Lune sur son orbite n'ont pas la période de 6585 jours. En particulier la longitude du périgée de l'orbite lunaire croît de 360° en 3 232j,6; le double de cette période est 6462j et non 6585. Donc si la Lune passe en même temps que le Soleil dans un des nœuds de son orbite pour l'origine des temps, en admettant même qu'elle y repasse avec le Soleil tous les 18 ans 11 jours *en moyenne*, ce

ne sera pas exactement dans les mêmes conditions. La moyenne ne nous trompe pas; mais il ne faut pas lui demander autre chose que ce qu'elle peut donner. En un mot, *l'ensemble* des phénomènes lunisolaires n'a pas une périodicité moyenne de 18 ans 11 jours : seule la possède un aspect du phénomène total. Ce qui explique la multiplicité des cycles lunisolaires considérés par les astronomes au cours des âges.

324. Ombre, pénombre, réfraction atmosphérique.

1° — La distance $\overline{O\Omega}$ du Soleil à la Terre est moyennement de 24·439 rayons terrestres équatoriaux R. Le rayon du Soleil vaut 109R environ.

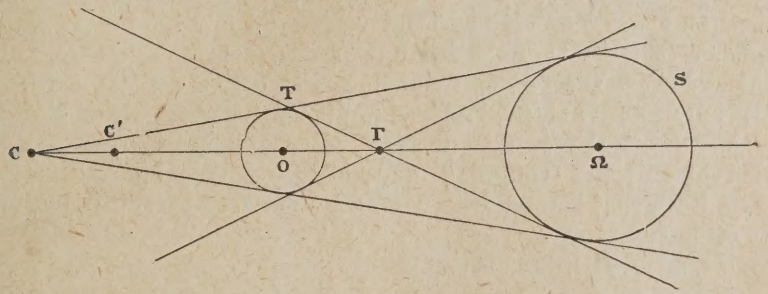


Fig. 253.

De la résulte que le point C, sommet du cône d'ombre que produit la Terre, est à la distance $\overline{CO}$ de la Terre donnée par l'équation :

$$\frac{\overline{CO}}{R} = \frac{23\,439}{180} = 216.$$

Arago présente ce calcul d'une manière intéressante. Il remarque que, du sommet C du cône d'ombre, la Terre doit apparaître sous le même angle que le Soleil (32′ environ). Mais la parallaxe lunaire moyenne est 57′; c'est dire qu'à la distance moyenne de la Terre à la Lune, la Terre apparaît sous l'angle 1° 54′. Il faut donc être à plus de trois fois cette distance (60 rayons terrestres) pour que la condition posée soit réalisée.

Le sommet du cône d'ombre est distant de la Terre de 216 rayons équatoriaux terrestres : la Lune qui est moyennement à 60 rayons terrestres, peut donc rencontrer ce cône d'ombre, par suite être éclipsée.

2° — PÉNOMBRE.

Nous venons de déterminer le sommet du cône d'ombre, abstraction faite de ce que nous disons au *3°*. Mais quand la Lune arrive dans ce cône, son éclairement est déjà considérablement diminué en raison de la *pénombre*. La distance OΓ du sommet Γ du cône de pénombre est presque égale à la distance $\overline{OC}$, comme le lecteur le vérifiera aisément

et comme il résulte de la grandeur de la distance $\overline{O\Omega}$ comparée du rayon terrestre.

3° — Réfraction et absorption atmosphériques.

Le cône d'ombre est raccourci par la réfraction atmosphérique.

En effet les rayons solaires qui tangentent la Terre, deviennent courbes dans leur traversée de notre atmosphère.

Sortis d'elle, ils reprennent leurs trajectoires rectilignes; mais au lieu de converger au point C, précédemment déterminé, ils le font en un point C′ plus rapproché de la Terre.

En définitive le passage à travers notre atmosphère pour les rayons qui tangentent le sol, produit un changement de direction, une cassure, qui sont 2 fois la réfraction horizontale. près de 73′ dans les conditions normales (suivant la table du Bureau des Longitudes). L'angle au sommet du cône C est en moyenne de 32′. Le cône dont le sommet est en C′, aurait $32 + 2(73) = 178'$ d'angle; il serait donc 5 fois moins long que le cône C. Il est vrai que les rayons qui tangentent le sol sont fortement absorbés (voir plus loin); d'autre part à mesure que les rayons traversent l'atmosphère à plus grande distance du sol, la cassure est moindre.

Quoi qu'il en soit, de cette explication résulte la possibilité d'un éclairement *plus ou moins intense* à très grande distance du sommet C du cône géométrique, en particulier à la distance où se trouve la Lune.

Mais l'atmosphère est absorbante; tout se passe donc comme si de ce chef le diamètre terrestre était augmenté. Elle est aussi diffusante.

Ces deux causes, agissant en sens contraire, expliquent : d'une part, que dans les éclipses totales de Lune, le disque lunaire reste constamment visible et d'une couleur rougeâtre; de l'autre, que l'ombre paraisse toujours un peu plus grande que ne l'indiquent le calcul du 1° et la règle qui sera donnée plus loin.

Bref les éclipses de Lune sont un phénomène intéressant, mais d'une définition géométrique imprécise. On trouve souvent deux minutes de différence entre les temps du commencement d'une même éclipse observée par divers astronomes. Le lecteur comprend pourquoi nous nous contenterons d'évaluations approchées et pourquoi nous nous en tiendrons à la considération de l'ombre géométrique; il serait absurde de calculer avec la dernière précision un phénomène aussi mal délimité, aujourd'hui surtout qu'on n'a plus l'excuse de l'utiliser à la détermination des longitudes.

325. **Diamètre apparent de la section du cône d'ombre terrestre à l'endroit où la Lune le traverse.**

1° — La droite S (fig. 254) représente schématiquement le diamètre du Soleil; la droite T représente le diamètre de la Terre; C est le sommet de son cône d'ombre.

La Lune se déplace dans le plan P qui est vu de champ; MN est le

diamètre de la section du cône d'ombre par ce plan. Son centre est ce que plus haut nous appelons l'antisoleil.

La figure 254 rend évidente la règle suivante.

Le demi-diamètre apparent o de la section MN *vue de la Terre est égal à la somme* $p + P$ *des parallaxes horizontales solaire et lunaire, moins le demi-diamètre apparent* Δ *du Soleil vu de la Terre :*

$$o = (P + p) - \Delta.$$

Je rappelle que la parallaxe horizontale solaire ou lunaire (§ 233) est l'angle p ou P sous lequel, du Soleil ou de la Lune, on voit le rayon

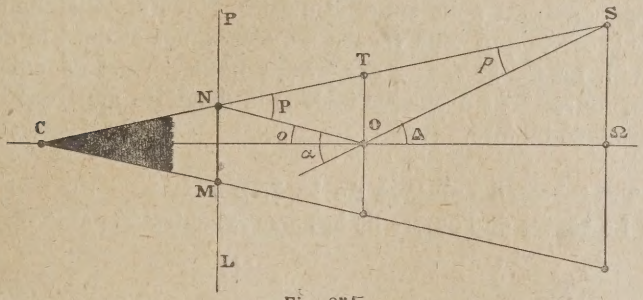


Fig. 254.

terrestre placé normalement à la ligne de visée. Le lecteur n'oubliera pas à quel point la figure exagère les rayons des astres par rapport à leurs distances.

2° — Nous prendrons uniformément $p = 9''$.

Par exemple, il y eut pleine Lune (opposition) le 1er janvier 1915 à $0^h\ 30^m$ (heure astronomique).

La parallaxe lunaire était alors $P = 55'28''$.

Le demi-diamètre solaire était : $16'\,18''$.

D'où pour le demi-diamètre de l'ombre :

$$55'\,37'' - 16'\,18'' = 39'\,19''.$$

On a coutume d'ajouter autant de secondes qu'il y a de minutes dans ce demi-diamètre pour tenir compte de l'absorption atmosphérique.

Le demi-diamètre apparent de l'ombre était donc au 1er janvier 1915 :

$$39'\,19'' + 39'' = 39'\,58'', \text{ soit } 40' \text{ en nombre rond.}$$

3° — En appliquant la règle précédente, on trouve que le diamètre apparent de l'ombre est compris entre $75'\,32''$ et $91'\,36''$; le demi-diamètre est compris entre $37'\,46''$ et $45'\,48''$.

Si l'on ajoute autant de secondes qu'il y a de minutes (règle de Mayer), on a pour les demi-diamètres maximum et minimum de l'ombre :

$$38'\,23'' = 2\,303'', \qquad 46'\,33'' = 2\,793''.$$

Le diamètre apparent moyen de la Lune est :

$$31' 7'' = 1\,867''.$$

Nous devons donc imaginer dans le plan P normal à la droite qui joint le Soleil à la Terre, et situé de la Terre à la distance actuelle de la Lune, un cercle d'ombre dont le diamètre est moyennement de 5 096″. Sur ce cercle ou près de lui passe la Lune dont le diamètre est moyennement 1 867″. Calculer les circonstances de l'éclipse, c'est calculer le passage de ces cercles l'un sur l'autre, ce que nous avons déjà fait au § 320, ce que nous allons recommencer avec plus de précision

Il sera commode de rendre le cercle d'ombre immobile : ce que le paragraphe suivant nous apprend à faire. Nous appellerons *ombre de la Terre* le cercle que nous venons de déterminer et dont le centre est l'antisoleil. La *Connaissance des Temps* nous permet de calculer son rayon en fournissant à chaque instant le diamètre apparent du Soleil et la parallaxe lunaire.

326. **Trajectoire relative de la Lune.**

1° — Le centre de l'ombre de la Terre est entraîné par le mouvement

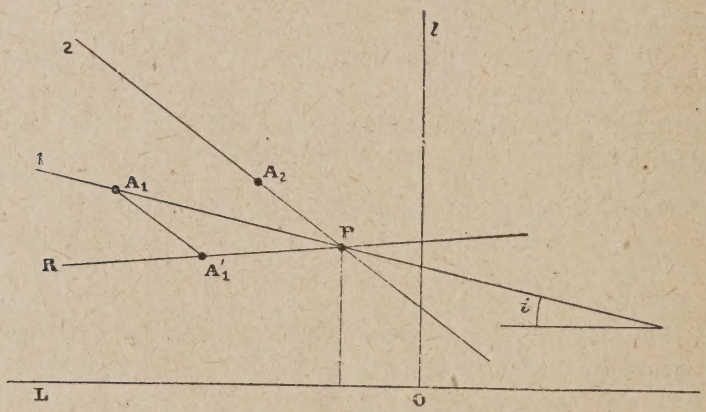


Fig. 255.

terrestre dans le sens direct. En latitude sa vitesse est nulle; en longitude elle est égale à celle du Soleil. Pour calculer aisément le déplacement de la Lune par rapport à l'ombre, nous sommes conduits à définir la *trajectoire relative* de la Lune : c'est ce que devient la trajectoire du centre de la Lune quand, par un mouvement égal et de sens contraire à celui du centre de l'ombre de la Terre (antisoleil), on maintient l'ombre immobile.

Traitons le problème d'une manière un peu plus générale.

Les mobiles 1 et 2 décrivent d'un mouvement uniforme deux trajectoires rectilignes qui se coupent en P de coordonnées L, *l*.

Au moment où le mobile 1 passe par le point P, on arrête le mobile 2 en donnant à tout le plan une vitesse égale et de sens contraire à la vitesse de 2 que représente le vecteur $\overrightarrow{PA_2}$.

On demande la trajectoire relative de 1.

Sur la trajectoire du mobile 1, à partir du point P, portons un vecteur $\overrightarrow{PA_1}$, représentatif de sa valeur.

Il est clair qu'on obtient la trajectoire relative PR du mobile 1 en portant le vecteur $\overrightarrow{A_2P}$ à partir du point A_1. On détermine ainsi la droite PR.

Si l'on arrête le mobile 2 quand le mobile 1 passe par un autre point quelconque Q de sa trajectoire, on obtient une trajectoire relative parallèle à la précédente et passant par le point Q.

Soient $L+L_1$, $l+l_1$, les coordonnées de A_1; $L+L_2$, $l+l_2$, les coordonnées de A_2. *L'inclinaison relative i'* de la trajectoire 1, et la *vitesse relative* du mobile 1 sur cette trajectoire sont données par les formules :

$$\operatorname{tg} i' = \frac{l_1 - l_2}{L_1 - L_2}, \qquad \overline{PA_1'} = \sqrt{(L_1 - L_2)^2 + l_1 - l_2)^2}.$$

Dans le problème ici traité, l_1, l_2, sont les variations horaires de latitude céleste; L_1, L_2, sont les variations horaires de longitude pour les astres 2 (antisoleil), 1 (Lune).

2° — Par exemple dans l'éclipse du 17 mars 1764 calculée par Lalande, on avait :

pour la Lune : $L_1 = 2\,243''$, $l_1 = 206''$;
pour le Soleil : $L_2 = 149''$, $l_2 = 0$.

L'inclinaison vraie i et l'inclinaison relative i' qui résultent de ces données pour les trajectoires vraie et relative de la Lune, sont :

$$i = 5° 15' \qquad i' = 5° 37'.$$

L'orbite relative est sensiblement plus inclinée sur l'écliptique que l'orbite réelle.

La vitesse de la Lune sur sa trajectoire relative est :

$$v = \sqrt{2\,094^2 + 206^2} = 2\,104''.$$

Pour fixer les idées, cherchons les valeurs moyennes *horaires* des quantités ci-dessus définies à partir des nombres du § 320.

Le mouvement moyen *horaire* de la Lune en longitude est	1 976″
Le mouvement moyen *horaire* du Soleil est. . .	148
Le mouvement horaire relatif est.	1 828
L'inclinaison moyenne de l'orbite est.	5° 8′ 43
Le déplacement horaire vrai en latitude au voisinage des nœuds est	177

327. **Calcul d'une éclipse.**

1° — Je continue à prendre comme exemple l'éclipse du 17 mars 1764.

L'opposition était calculée pour $12^h\,6^m\,28^s$; la latitude de la Lune était alors $38'\,42'' = 2\,322''$.

Traçons par le point O (fig. 256) deux axes rectangulaires des longitudes et des latitudes.

A l'échelle choisie, faisons $\overline{OL} = 2\,322$.

Par le point L, menons la trajectoire relative LMS inclinée de 5° 37 sur l'écliptique (voir plus haut).

Le milieu de l'éclipse a lieu pour le point M.

On a : $\overline{ML} = \overline{OL} \cdot \sin i'$; d'où : $\overline{ML} = 227''$.

Le mouvement horaire de la Lune sur sa trajectoire relative est

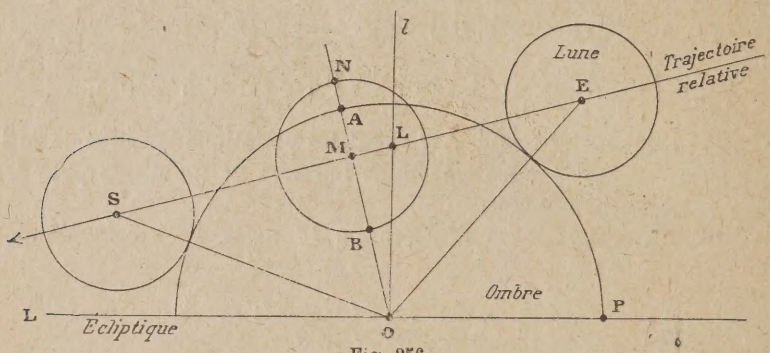


Fig. 256.

$v = 2\,104''$. D'où l'on conclut que le milieu de l'éclipse a lieu $6^m\,28^s$ après l'opposition, c'est-à-dire à $12^h\,12^m\,40^s$.

On a : $\overline{OM} = \overline{OL} \cdot \cos i'$; d'où : $\overline{OM} = 2\,311''$.

2° — Pour aller plus loin, il faut connaître le diamètre apparent de la Lune et celui de l'ombre. Appliquons le théorème du § 325; on avait :

$$\overline{OP} = 2\,700'', \quad \overline{MN} = 999'', \quad \overline{EO} = 3\,699''.$$

Mais en raison de la correction de Mayer, nous ajouterons un soixantième environ, ce qui donne :

$$\overline{EO} = 3\,799''.$$

D'où aisément :

$$\overline{ME} = 3\,015''.$$

Or le mouvement horaire sur l'orbite est $v = 2\,104''$; par suite la demi-durée de l'éclipse est $1^h\,25^m\,59^s$.

L'éclipse a commencé à $10^h\,46^m\,41^s$ et fini à $13^h\,38^m\,39^s$.

Tout cela est d'une simplicité extrême.

3° — La *partie éclipsée* est par définition la longueur $\overline{AB}$. On a :

$$\overline{AM} = \overline{OA} - \overline{OM}, \qquad \overline{MA} + MB = \overline{AB} = \overline{OA} + \overline{MB} - \overline{OM} = \overline{EO} - \overline{OM}.$$

La partie éclipsée est donc la somme des demi-diamètres de la Lune et de l'ombre, moins la plus courte distance.

Dans l'éclipse qui nous sert d'exemple, on a :

$$\overline{EO} = 3\,799'', \qquad \overline{OM} = 2\,311''.$$

La partie éclipsée est 1 488″.

On l'exprime en *doigts* ou en *douzièmes du diamètre de la Lune*.

Le diamètre est ici 1 998″ ; le douzième est 166″.

L'éclipse est donc de $8^d,96$, près de 9 doigts.

4° — Lorsque l'éclipse est totale (fig. 257), il faut encore déterminer

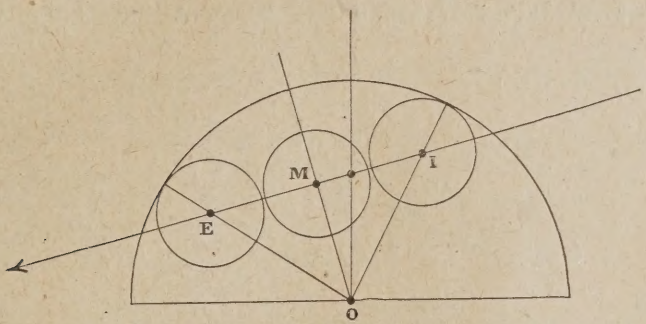


Fig. 257.

l'immersion et *l'émersion* qui correspondent aux moments où la Lune finit d'entrer dans l'ombre et commence à en sortir. On a immédiatement les longueurs $\overline{MI} = \overline{ME}$, en résolvant le triangle rectangle OMI, dont on connaît $\overline{OM}$ (plus courte distance) et OI (différence des demi-diamètres). On passe aux heures en utilisant la vitesse v.

328. Possibilité des éclipses.

1° — Quand on a calculé l'instant de l'opposition et la distance en longitude $\alpha = \overline{NO}$ du nœud de l'orbite, il est commode d'avoir une règle qui permette d'éliminer immédiatement les oppositions ne pouvant pas fournir d'éclipse de Lune.

La figure 258 montre la nature du problème.

Pour une inclinaison i' et des rayons δ et R connus, la condition de tangence est :

$$\alpha \sin i' = \delta + R, \qquad \text{d'où :} \qquad l = \alpha \operatorname{tg} i'.$$

Par exemple avec les données précédentes :

$$\delta + R = 3\,699 \qquad i' = 5° 37',$$

$$\alpha \text{ on a :} = 10° 30' \qquad l = 1° 2' = 3\,720''.$$

Pour notre éclipse la latitude lors de la conjonction est effectivement beaucoup plus petite.

On peut chercher les limites supérieures de α et de l, telles que *dans aucun cas* il n'y ait éclipse. Les auteurs donnent les nombres les plus discordants.

Voici ce que dit Lalande en qui on peut avoir confiance.

Le rayon de l'ombre de la Terre est toujours inférieur à $R = 47' = 2\,820''$; le demi-diamètre δ reste inférieur à $17' = 1\,020''$. On a donc toujours :

$$\delta + R < 3\,840''.$$

Étant donnée l'inclinaison apparente maxima, on trouve que l'éclipse n'est pas totale si $l > 30'$, et n'existe pas si $l > 64'$.

2° — Pendant l'année 1913, il n'y a pas eu d'éclipse de Lune.

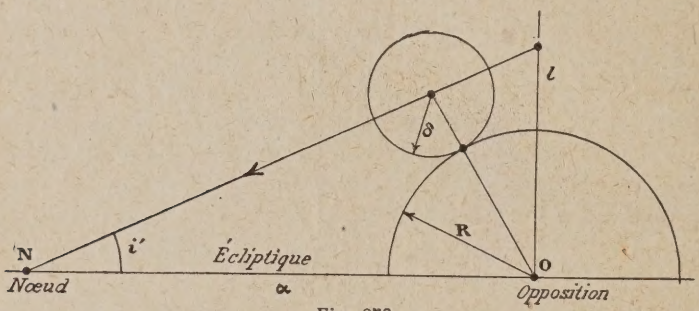


Fig. 258.

Le tableau suivant donne l'heure des pleines lunes et la latitude correspondante du centre de la Lune.

1er janvier. . .	0h 30m	+ 3° 47′	26 juillet . . .	0h 20m	— 1° 21′
30 janvier. . .	16 50	+ 1° 28′	24 août	9 49	+ 1° 11′
1er mars. . . .	6 42	— 1° 15′	22 septembre. .	21 44	+ 3° 26′
30 mars. . . .	17 47	— 3° 34′	22 octobre. . .	12 25	+ 4° 49′
29 avril. . . .	2 29	— 4° 50′	21 novembre. .	5 45	+ 4° 47′
28 mai	9 42	— 4° 21′	21 décembre. .	1 1	+ 3° 19′
26 juin	16 36	— 3° 32′			

D'après le 1°, sans aucun calcul on était sûr qu'il ne pouvait se produire d'éclipse ni totale ni partielle. Une seule conjonction se rapproche beaucoup de la limite, celle du 24 août avec 71′ au lieu de 64.

329. **Particularité des éclipses.**

1° — Lorsque la Lune est apogée lors de l'éclipse, que par suite elle traverse le cône d'ombre plus près du sommet, elle paraît plus rouge et plus lumineuse que lorsqu'elle est périgée. Dans ce dernier cas, les rayons diffusés ou réfractés par l'atmosphère ne peuvent pas atteindre le centre de l'ombre.

Pour certaines éclipses périgées, la Lune a disparu entièrement; mais le phénomène est rare.

2° — Les éclipses de Lune ont servi longtemps à déterminer les longitudes. En effet quand la Lune plonge dans l'ombre, sa lumière disparaît de quelque point de la Terre qu'on la regarde; c'est donc un signal céleste que tous les observateurs voient au même instant (comparer à ce que nous disons des satellites de Jupiter, § 218). Malheureusement le phénomène manque de netteté; la pénombre rend incertaines l'entrée et la sortie. On a tenté de perfectionner la méthode en marquant les instants où disparaissent et reparaissent des points caractéristiques de la surface lunaire; ainsi l'on multiplie les observations pour une même éclipse sans les rendre plus précises. La vertu contestable des moyennes n'arrive pas à faire excellente une méthode mauvaise en soi.

330. **Méthode d'Hipparque pour déterminer la parallaxe solaire.**

1° — Nous avons démontré la proposition suivante (§ 325) : le demi-diamètre apparent o de la section du cône d'ombre formé par la Terre à la distance de la Lune, section vue de la Terre, est égal à la somme $p + P$ des parallaxes horizontales solaire et lunaire, moins le demi-diamètre apparent Δ du Soleil vu de la Terre :

$$o = (P + p) - \Delta. \qquad (1)$$

Nous connaissons Δ; P est déterminable par une triangulation directe (§ 237); si nous mesurons o, nous aurons p.

Telle est la méthode d'Hipparque pour déterminer la parallaxe solaire à partir des éclipses de Lune. La mesure du diamètre apparent 2° de la section du cône d'ombre peut être déduite du temps que la Lune met à la traverser.

La méthode ne vaut rien. C'est évident si l'on remarque que p (dont la valeur est 8″,80) est déduit de la différence de deux quantités dont l'ordre de grandeur est 2 400″ (§ 325) et dont l'une n'est déterminable que grossièrement en raison de la pénombre, de la réfraction et de l'absorption par notre atmosphère.

2° — Pour fixer les idées du lecteur, voici les nombres que Ptolémée introduisit dans la formule (1).

Il prenait pour diamètre apparent solaire : 31′20″, d'où $\Delta = 940''$.

Il croyait avoir trouvé

$$o = 2{,}6\,\Delta = 2\,444''.$$

Enfin mettant la Lune à 64,16 rayons terrestres, il avait pour parallaxe lunaire : $53' 35'' = 3\,215''$.

D'où $p = 169''$, valeur près de 20 fois trop grande.

Cependant aucune de ces données n'est très mauvaise; mais la paral-

laxe est si petite qu'elle ne peut sortir exactement de la combinaison de nombres qui sont d'un autre ordre de grandeur.

D'après ces mesures le Soleil se trouvait à 1 200 rayons terrestres au lieu de 24 000 environ.

Copernic croyait le Soleil encore plus près de nous que Ptolémée : ce qui prouve combien peu importe la connaissance exacte de la distance sclaire (§ 249). Copernic s'en passait : mais nos professeurs ne sont pas des Copernic : il leur faut des renseignements précis et du dernier bateau. Ils croient dur comme fer au 9 du nombre 23 439,2.

Que dis-je ! ils prennent au sérieux le 2 qui le termine.

Je les scandalise en leur affirmant que rien n'est moins sûr que le 3, pour ne pas déclarer le 4 douteux.

Éclipses de Soleil.

331. **Généralités.**

1° — Les éclipses de Soleil sont dues à ce que, lors de certaines conjonctions, la Lune s'interpose entre le Soleil et *certains points* de la surface terrestre; pour ces points le Soleil est éclipsé en totalité ou en partie. Les éclipses de Soleil se produisent lors des conjonctions, pourvu qu'au moment de la conjonction le Soleil soit voisin de l'un des nœuds de l'orbite lunaire.

Coupons le cône tangent extérieurement au Soleil et à la Terre, par une sphère ayant pour rayon la distance moyenne de la Terre à la Lune. Évidemment l'aire de l'intersection I_1 qui est entre la Terre et le Soleil, dépasse notablement l'aire de l'intersection I_2 qui est au delà de la Terre. Pour l'éclipse de Lune, la Lune empiète sur I_2; pour l'éclipse de Soleil, la Lune empiète sur I_1. Conséquemment l'ombre de la Lune touche plus souvent la Terre que l'ombre de la Terre ne touche la Lune : les éclipses de Soleil sont plus fréquentes que celles de Lune dans le rapport de 4 à 3 (les tableaux des § 321 et 322 sont incomplets pour les éclipses de Soleil). Cependant les éclipses de Soleil sont très rares *pour chaque lieu de la Terre*, parce qu'au lieu d'être simultanément visibles par plus d'un hémisphère terrestre comme les éclipses de Lune, ce sont des phénomènes locaux, visibles d'une aire terrestre relativement restreinte en raison de la petitesse de la section du cône d'ombre lunaire à la distance de la Terre.

Le diamètre apparent lunaire 2☾ est compris entre 28′48″ et 33′32″ (1 728″ et 2 012″); le diamètre apparent solaire 2Δ reste voisin de 1 922″ qui est sa valeur moyenne.

Quand les deux diamètres apparents sont égaux, le sommet C du cône d'ombre est juste sur la Terre.

Quand celui de la Lune l'emporte, le cône d'ombre est coupé par la Terre : *il y a éclipse totale* pour certains lieux.

Enfin quand le diamètre apparent de la Lune est plus petit que celui du Soleil, son disque ne peut recouvrir en entier le disque solaire : *l'éclipse est annulaire* pour certains lieux.

2° — Les éclipses de Soleil précèdent ou suivent les éclipses de Lune de 14 jours : c'est évident, puisque les premières se font lors des conjonctions, les secondes lors des oppositions.

Il peut arriver deux éclipses de Soleil pour des conjonctions consé-

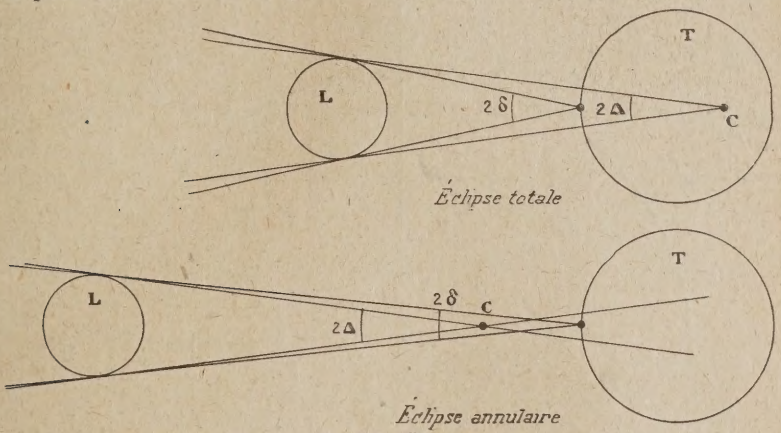


Fig. 259.

cutives, le Soleil pouvant se trouver à 19° du nœud sans que l'éclipse cesse de se produire.

Le Soleil pouvant passer trois fois en un an par les nœuds de la Lune, il ne serait pas impossible qu'il se produisît en un an six éclipses de Soleil, si, la différence de la période P avec l'année étant seulement de 19 jours, l'une des éclipses n'était pas nécessairement rejetée dans l'année voisine.

Bref on peut observer en un an cinq éclipses de Soleil, 14 jours avant ou après les éclipses de Lune, à supposer qu'elles se produisent.

Si deux éclipses de Soleil se produisent pour des conjonctions consécutives, elles ont lieu évidemment l'une avant, l'autre après le passage du Soleil au nœud. Au voisinage du nœud ascendant, la première sera visible dans l'hémisphère austral, la seconde dans l'hémisphère boréal. Au voisinage du nœud descendant, la première sera visible dans l'hémisphère boréal, la seconde dans l'hémisphère austral. C'est pourquoi les tableaux des §§ 321 et 322 n'indiquant que les éclipses visibles dans l'hémisphère boréal, n'en contiennent au maximum que deux par an.

332. Trajectoire de l'ombre du centre de la Lune (antisoleil) sur le disque terrestre.

1° — Le calcul des éclipses de Soleil n'est pas très facile, même

quand on le simplifie par des hypothèses qui ne sont pas rigoureuses : du reste elles suffisent largement, vu la précision des mesures et l'intérêt *pratique actuellement nul* de ces phénomènes.

Nous supposons le Soleil infiniment éloigné : à chaque instant nous considérons donc comme invariable la direction des rayons envoyés

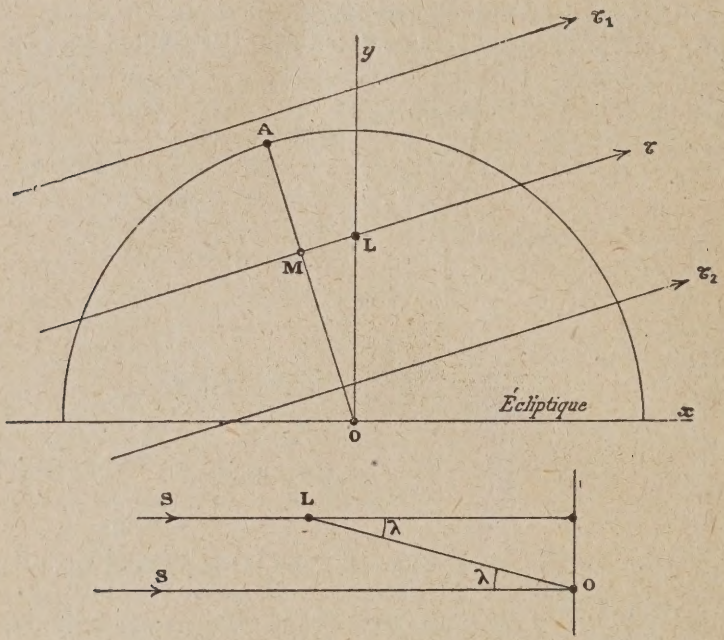


Fig. 260.

par le centre de son disque, *par quelque point du système Lune-Terre que nous les fassions passer.*

Supposons la Terre fixe. Prenons comme plan de projection le plan passant par le centre de la Terre, normal à l'écliptique et normal au cercle de latitude où se produit la conjonction (fig. 260). Appelons *antisoleil* le point où la droite qui joint les centres du Soleil et de la Lune coupe le plan de projection (ombre du centre de la Lune). C'est la trajectoire de l'antisoleil qu'il faut déterminer.

Au lieu de donner au cercle terrestre que nous venons de définir, son rayon réel, changeons d'échelle. Divisons-le par la distance actuelle et de la Lune à la Terre; exprimons en secondes d'arc l'angle ainsi déterminé. Cela revient à prendre pour rayon OA du disque terrestre la *parallaxe lunaire horizontale actuelle.* Elle vaut en moyenne :

$$57' 3'' = 3\,423''.$$

Quand la latitude géocentrique du centre de la Lune est λ, l'antisoleil est à la distance λa de l'écliptique (voir fig. 260 en bas).

En raison de l'échelle choisie, sa distance à l'écliptique sur la figure doit être prise de λ secondes.

Les longitudes solaires sont sensiblement les mêmes prises du centre de la Terre ou du centre de la Lune, à supposer le Soleil mobile et les deux astres fixes.

Si la Lune est immobile et si la longitude solaire varie de L_2, l'antisoleil se déplace dans le plan de projection de droite à gauche ; en raison de l'échelle choisie, son déplacement est de L_2 secondes.

Immobilisons le Soleil, rendons à la Lune son mouvement géocentrique L_1 en longitude. L'antisoleil se déplace de gauche à droite (voir fig. 250) de L_1 secondes. Bref, le déplacement réel en longitude de l'antisoleil est $L_1 - L_2$, de gauche à droite.

D'où résulte que la trajectoire de l'antisoleil est plus inclinée que celle de la Lune. Le calcul de l'inclinaison i' se fait en définitive comme au § 326.

2° — Voici pour fixer les idées les éléments de l'éclipse totale du 1er avril 1764 tels que les donne Lalande.

Temps vrai de la conjonction $10^h\,31^m\,23^s$ de Paris.

Latitude boréale de la Lune pour la conjonction	2 376″
Mouvement horaire en longitude de la Lune . . .	1 779″
— du Soleil	148″

Inclinaison de la trajectoire relative de l'antisoleil 5° 44′ 26″..

Vitesse de l'antisoleil sur sa trajectoire relative $v = 1\,639''$.

Comme nous l'avons vu au § 327, on calcule aisément la position du point M, centre de l'éclipse *générale* ; il a fallu $8^m\,42^s$ pour aller de M en L ; par suite l'heure du milieu de l'éclipse est $10^h\,22^m\,41^s$ de Paris.

On trouve pour la plus courte distance $\overline{OM} = 2\,364''$.

La parallaxe de la Lune était 3 249″ ; c'est le rayon $\overline{OA}$ du disque terrestre projeté.

3° — Pour l'observateur lunaire qui voit le disque terrestre et ne sait pas que la Terre tourne, le problème de la trajectoire du centre de l'ombre est résolu par ce qui précède. Sur le disque terrestre considéré par lui comme immobile, il le voit se déplacer suivant une droite inclinée sur l'écliptique et avec une vitesse quasi constante. Le problème est compliqué par la rotation de la Terre : quand le centre de l'ombre est en un point de sa trajectoire, ce qui arrive à une heure facile à calculer d'après ce qui précède, nous avons à déterminer sur quel lieu de la surface sphérique terrestre mobile il se projette effectivement.

4° — Cherchons combien de temps l'ombre de la Lune peut rester sur le disque terrestre.

Dans les conditions les plus favorables, la trajectoire du centre lunaire passe par le centre du disque terrestre. Avec les nombres précédemment donnés le diamètre terrestre vaut en moyenne 6 846″

la vitesse de la Lune est de 1 639″ par heure. Il est clair que le centre de la Lune se projette sur le disque terrestre pendant :

$$6\,846 : 1\,639 \text{ heures} = 4^h\,11^m.$$

Pendant ce temps, *certains* points de la Terre voient l'éclipse *totale* ou *annulaire*.

Mais la durée du temps pour lequel l'éclipse existe *partielle* pour quelque point de la Terre, est beaucoup plus grande. Le paragraphe suivant nous apprendra que pour trouver ce temps, il faut remplacer le disque terrestre de rayon égal à la parallaxe lunaire (3 423″ dans notre exemple), par un disque dont le rayon est plus grand de la somme des demi-diamètres solaire et lunaire. Dans l'éclipse que nous étudions, cette somme vaut 1 848″. Le disque sur lequel doit porter notre calcul, a donc 5 271″ de rayon, soit 10 542 de diamètre.

Dans ces conditions la durée totale de l'éclipse est :

$$10\,542 : 1\,639 = 6^h\,26^m.$$

Nous venons de calculer le temps que l'ombre reste sur la Terre.

Il ne faut pas le confondre avec la durée de l'éclipse en un lieu *déterminé* de la Terre. Pour fixer tout de suite les idées, disons que la plus grande durée d'une éclipse de Soleil en un lieu déterminé est 4^h30^m sous l'équateur, 3^h27^m sur la parallèle de Paris (48°50′ de latitude).

Voici les nombres qui se rapportent aux éclipses de Soleil en 1915.

		13 février 1915.		10 août 1915.	
Éclipse générale.	Comm.	$13^h\,51^m$	$5^h\,43^m$	$8^h\,6^m$	$5^h\,52^m$
— .	Fin . .	19 34		13 58	
Éclipse annulaire.	Comm.	14 52	3 40	9 7	3 51
— .	Fin . .	18 32		12 58	

Ces nombres sont naturellement inférieurs aux précédents qui supposent que la trajectoire du centre de la Lune passe par le centre de la Terre.

333. **Position des points où l'éclipse est partielle.**

1° — Supposons qu'au temps t, la droite (de direction par hypothèse indépendante du point considéré) qui joint le centre du Soleil au centre de la Lune, tombe sur le point C du plan de projection.

On demande à quelle distance du point C il faut aller pour que les disques solaire et lunaire soient tangents.

En vertu de notre hypothèse que le Soleil est infiniment éloigné, ses rayons centraux ont une direction invariable : la figure 261 montre qu'en vertu de l'échelle choisie pour représenter les longueurs dans le

plan de projection, le déplacement CD doit être égal à la somme des demi-diamètres apparents de la Lune et du Soleil.

Par exemple, dans l'éclipse du 1er avril 1764 on avait :

demi-diamètre du Soleil $\Delta = 961''$,
— de la Lune $\delta = 887''$;

$$\overline{CD} = \Delta + \delta = 1\,848''.$$

A partir du point C traçons dans le plan de projection un cercle de

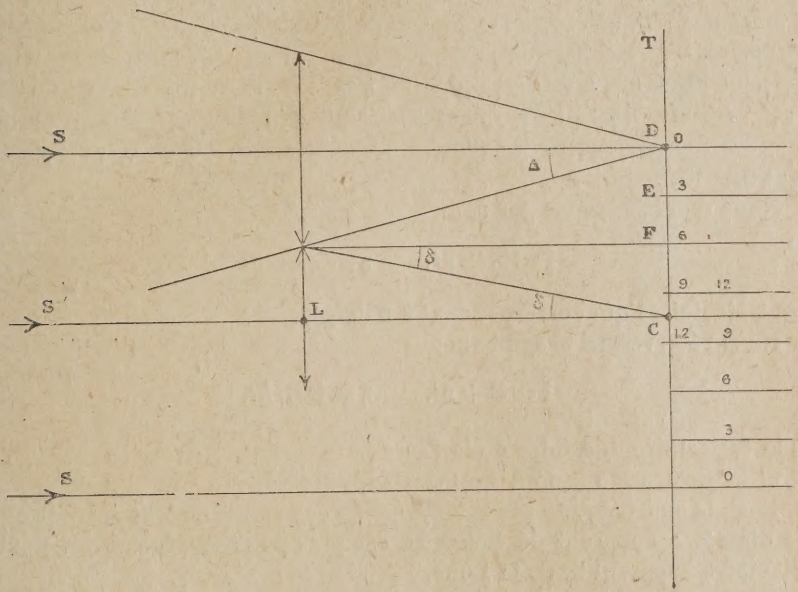


Fig. 261.

rayon $\Delta + \delta = 1\,848''$; c'est le lieu des points terrestres *projetés* qui, au temps t, voient se tangenter le disque solaire et le disque lunaire (commencement et fin de l'éclipse). Le lieu de ces points à la surface de la Terre *considérée au temps t, par suite supposée immobile*, est l'intersection avec la surface sphérique terrestre, d'un cylindre circulaire normal au plan de projection.

Pendant que le point C se déplace sur la trajectoire $\mathcal{C}$ précédemment déterminée, il entraîne le cercle de rayon $\Delta + \delta$ dont il est le centre. L'enveloppe de ce cercle est constituée par deux droites parallèles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, distantes de la trajectoire de $1\,848''$. Nous définissons ainsi une bande telle que tous les points de la surface terrestre qui se projettent en dehors, restent sûrement étrangers à l'éclipse (fig. 260).

2° — Généralisons le problème. Pour une position C de la projection du centre de la Lune vu du Soleil (pour une position C de l'antisoleil),

quel est le lieu des points qui voient l'éclipse de 3 doigts, de 6 doigts, de n doigts?

Il faut ramener le point D vers le point C de manière que le disque lunaire empiète sur le disque solaire de n douzième du diamètre solaire. Or dans notre exemple le disque solaire vaut 1 922″ dont le douzième est 160″. En portant à partir de D la longueur 480″, on a la position des points pour lesquels l'éclipse est de 3 doigts; et ainsi de suite.

On définit ainsi des circonférences concentriques.

Pendant que le point C se déplace sur la trajectoire $\mathfrak{C}$, il entraîne le système des cercles ci-dessus déterminés. Leurs enveloppes fournissent des droites parallèles qui forment deux à deux des bandes. A l'extérieur de chacune de ces bandes se trouvent les points pour lesquels l'éclipse ne peut atteindre 3 doigts, 6 doigts, n doigts. Pour les points qui sont sur les bords de la bande correspondant à n doigts, l'éclipse prend successivement toutes les valeurs comprises entre 0 et n, puis entre n et 0.

Nous représenterons par :

$$\xi = \xi_n + at, \qquad \eta = \eta_n + bt,$$

les trajectoires qui correspondent à n doigts.

Nous réserverons le symbole :

$$\xi = \Xi + at, \qquad \eta = \mathrm{H} + bt,$$

à la trajectoire du centre de la Lune.

3° — ÉCLIPSES TOTALES, ÉCLIPSES ANNULAIRES.

Dans la construction précédente, deux cas se présentent suivant que le diamètre apparent du Soleil 2Δ est plus petit ou plus grand que le diamètre apparent 2δ de la Lune.

PREMIER CAS : $\Delta < \delta$.

Quand à partir du point D, on porte 2Δ vers le point C pour obtenir le lieu des points où l'éclipse est de 12 doigts, on n'atteint pas le point C, puisque $2\Delta \leqslant \Delta + \delta$. Cela signifie qu'il existe sur le disque terrestre une bande de largeur $2(\delta - \Delta)$ pour laquelle l'éclipse devient totale. Le disque lunaire couvrant et au delà le disque solaire, on peut se déplacer à partir de la trajectoire de l'antisoleil, sans que le disque solaire déborde.

SECOND CAS : $\Delta > \delta$.

Quand à partir du point D, on porte 2Δ vers le point C, on dépasse le point C puisque $2\Delta > \Delta + \delta$: *l'éclipse est annulaire*. Le diamètre apparent de la Lune étant plus petit que celui du Soleil, sur la trajectoire de l'antisoleil, le disque solaire n'est recouvert que dans sa partie centrale : il reste visible dans la partie comprise entre deux circonférences concentriques. C'est ce qui arrive dans le cas de la figure 263.

Il existe alors une bande de largeur $2(\Delta - \delta)$ pour tous les points de

laquelle, pendant une partie de l'éclipse, le disque lunaire se projette tout entier sur le disque solaire qui déborde de toutes parts.

334. Etude d'une éclipse schématique.

1° — Attaquons la partie délicate du phénomène; recherche des

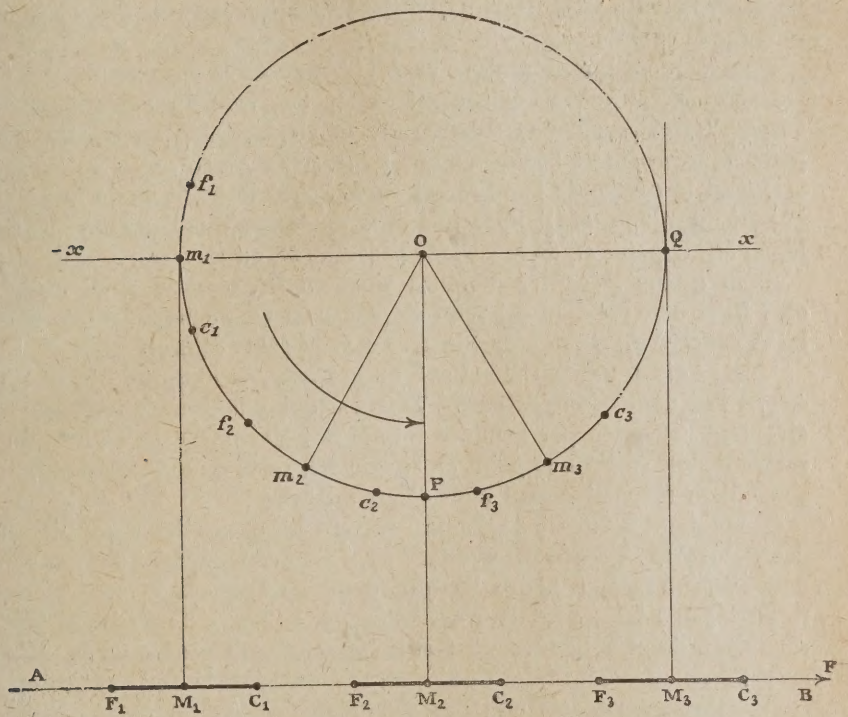


Fig. 262.

lieux d'où l'on voit l'éclipse suivant tel ou tel aspect. Quand nous aurons bien compris de quoi il retourne, il sera temps de fourrer de l'algèbre, seule occupation de MM. les astronomes. Pour déblayer étudions une éclipse schématique où la Lune se déplacerait dans l'équateur terrestre. Pour nous écarter le moins possible des conditions réelles, prenons les nombres qui correspondent à l'éclipse du 13 février 1915.

Le lecteur n'oubliera pas que la circonférence représentée appartient à deux sphères superposées, l'une fixe, l'autre mobile qui est la surface réelle terrestre. Quand je parle d'un point représenté par une lettre, il distinguera donc si ce point est considéré comme immobile ou s'il appartient à la sphère mobile.

Le mouvement horaire en ascension droite de la Lune était de 1870". Celui du Soleil était de 147". D'où un mouvement horaire relatif de

l'ombre égal à 1 723″ dans le sens de la flèche F (fig. 262). La parallaxe équatoriale de la Lune était 3 417″, ce qui donne 6 834″ pour le diamètre du cercle qui représente le disque terrestre. D'où résulte que l'antisoleil schématique, qui se promène suivant l'équateur terrestre, met 4 heures à traverser le disque terrestre. Comme la Terre met 24 heures à faire un tour, l'ombre va plus vite que la surface terrestre mobile : elle en rattrape les points.

2° — Ceci posé, représentons en AB la trajectoire de l'écran.

Quand le centre de l'ombre est en M_1, l'horizon du point m_1 de la surface terrestre dans sa rotation diurne vient passer par M_1. Pour le point m_1 le *milieu* de l'éclipse a lieu *au lever du Soleil*.

Quand le centre de l'ombre est en M_2, c'est le point m_2 de la Terre qui est au milieu de l'éclipse : en effet du temps que l'antisoleil va de M_1 en M_2, le point m_2 de la surface passe de m_2 en P.

Enfin quand le centre d'ombre vient en M_3, c'est le point m_3 qui en 4 heures de rotation est venu se placer en Q, de manière que pour lui *le coucher du Soleil* coïncide avec *le milieu de l'éclipse*.

Ainsi l'éclipse totale s'étend sur un arc m_1m_3 de longitude terrestre, égal à 120° dans nos hypothèses. Tous les points de cet arc sont successivement rattrapés par l'éclipse totale; le point m_1 de la surface terrestre mobile se lève, le point m_3 se couche, juste quand l'éclipse est à son milieu respectivement pour chacun d'eux.

Connaissant la vitesse de l'ombre suivant AB et la vitesse de rotation des points de la surface terrestre, ce n'est évidemment qu'un jeu de déterminer à quelle heure chaque point de l'équateur terrestre est rattrapé par l'éclipse totale, c'est-à-dire par la droite de direction invariable qui joint le centre du Soleil immobile au centre de la Lune animé du mouvement relatif qui arrête le centre de la Terre.

3° — Passons à la détermination des points de l'équateur pour lesquels l'éclipse est partielle. Appuyons-nous sur le principe suivant évident d'après le § 333. Lorsque pour le point P de la sphère immobile par exemple, l'éclipse est totale, elle sera partielle et du même nombre de doigts au même point P pour les points de la surface terrestre qui arriveront en P un temps bien déterminé avant ou après le point de la sphère mobile précédemment considéré pour lequel l'éclipse était totale.

Par exemple, au moment où le point m_1 de la surface mobile voit le Soleil se lever, c'est-à-dire au moment où il traverse la droite $-xx$, l'éclipse est dans son milieu. Lorsque le point mobile f_1 arrive au point fixe m_1, le centre de la Lune est en C_1; donc au lever du Soleil pour le point f_1, l'éclipse est d'un certain nombre de doigts; mettons qu'elle finit. Inversement quant le point c_1 de la surface mobile tel que $\overline{m_1c_1} = \overline{f_1m_1}$, traverse $-xx$, ou encore voit le Soleil se lever, l'éclipse est du même nombre de doigts; dans l'hypothèse ci-dessus faite, elle commence. En définitive pour tous les points de la surface mobile

compris dans l'arc $c_1 f_1$, l'éclipse existe au moment du lever du Soleil; elle commence juste pour c_1, elle est dans son milieu pour m_1, elle finit juste pour f_1.

Même raisonnement pour le coucher du Soleil : pour tous les points de la surface mobile compris dans l'arc $f_3 c_3$, l'éclipse existe au moment du coucher du Soleil : elle commence juste pour c_3, elle est dans son milieu pour m_3, elle finit juste pour f_3.

Même raisonnement pour un point P quelconque. Lorsque le point c_2 de la surface mobile passe en P, l'éclipse commence pour ce point; elle est dans son milieu quand le point m_2 passe en P; elle finit quand c'est le point f_2.

Voyons comment ce schéma se complique dans une éclipse réelle. Avant de fourrer de l'algèbre, décrivons les phénomènes : nous y retrouverons toutes les particularités qui viennent d'être signalées.

335. Description d'une éclipse de Soleil.

Je prends comme exemple l'éclipse *annulaire* du 13 février 1915; la

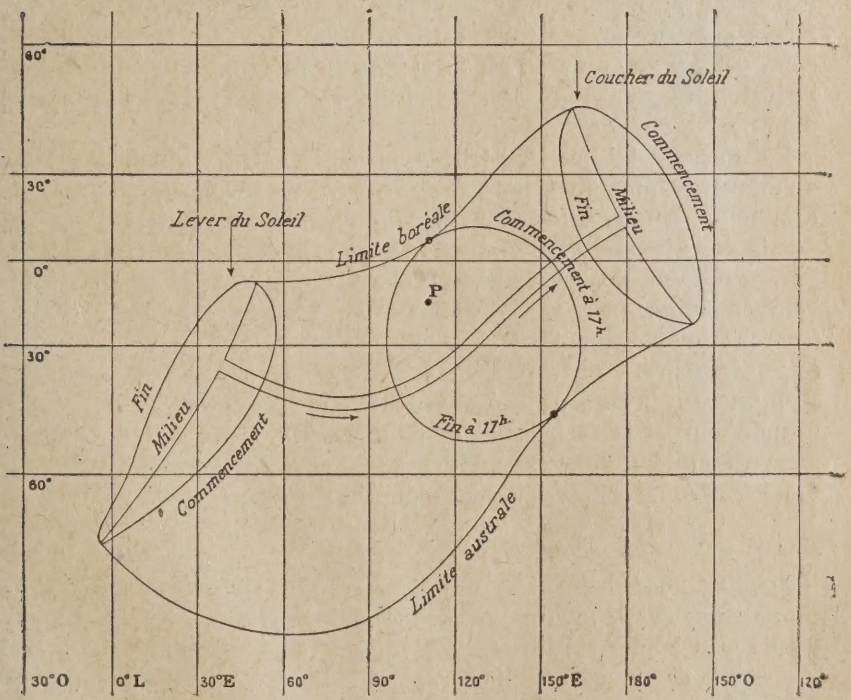


Fig. 263.

figure 263 est un schéma de la figure publiée par la *Connaissance des Temps*.

La nouvelle Lune (conjonction) eut lieu à $16^h\,40^m$ (heure astrono-

mique). Le passage au nœud (ascendant) eut lieu à 19^h14^m; alors la latitude astronomique de la Lune passa du négatif au positif.

La double ligne figure la bande terrestre à l'intérieur de laquelle on vit le disque lunaire tout entier sur le disque solaire (éclipse annulaire). Elle est parcourue de l'ouest à l'est par l'antisoleil, comme il résulte de ce qui précède; elle est dirigée en moyenne vers le haut, ce qui tient à ce que la conjonction a lieu près du nœud ascendant de l'orbite.

Au-dessus et au-dessous sont tracées deux courbes qui limitent l'aire terrestre pour laquelle le disque lunaire empiète sur le disque solaire; pour les courbes limites, dites de *simple contact*, l'éclipse finit aussitôt commencée.

Aux deux bouts de la figure sont les courbes indiquant le lieu des points pour lesquels l'éclipse commence, est en son milieu, finit, au lever ou au coucher du Soleil. C'est la généralisation de ce qui précède; au paragraphe précédent nous trouvons des points, non des courbes, parce que nous considérons seulement ce que voit l'équateur terrestre. Nous trouverions six points sur chaque parallèle (l'éclipse serait de moins en moins complète à mesure qu'on s'éloignerait de l'équateur); d'où, dans le cas général où le centre de la Lune décrit une droite inclinée, les deux groupes de trois courbes représentées par la figure.

En un point tel que P, l'éclipse, au moment de son maximum, n'a qu'un certain nombre de doigts; on peut calculer l'heure à laquelle elle commence, l'heure à laquelle elle finit. On préfère calculer le lieu des points pour lesquels l'éclipse commence et finit à une heure donnée; j'ai tracé l'une de ces courbes : elle est évidemment tangente aux courbes limites puisque, pour celles-ci, l'éclipse finit aussitôt que commencée. Nous verrons plus loin comment on explique sa forme quasi circulaire.

Maintenant que nous avons compris comment se produit une éclipse, faisons tourner la machine aux équations. Tout ce qui suit est facile, mais n'a d'intérêt que si l'on a bien saisi ce qui précède. J'aime à croire que les astronomes officiels sont d'un avis exactement contraire.

336. Eléments de Bessel.

Nous sommes ramenés au problème suivant. D'après le § 333, nous connaissons sur le plan xOy (fig. 254), les trajectoires rectilignes des points où l'éclipse est totale, de 11 doigts, de 10 doigts,... etc.

Il s'agit de déterminer quels sont les lieux de la Terre tournant autour de son axe qui voient successivement l'éclipse sous ses différents aspects; géométriquement parlant, qui coïncident pour un certain instant avec les lieux précédemment déterminés.

Représentons la sphère terrestre; je crois inutile au delà de toute expression d'introduire l'ellipsoïde terrestre, vu la précision très limitée

des mesures d'éclipse et la parfaite inutilité pratique actuelle des résultats.

L'axe Oz est dirigé vers le Soleil; Oy est choisi de manière que le plan zOy contienne l'axe de la Terre du côté nord; enfin Ox est dirigé de manière que de Oz à Ox on aille dans le sens direct.

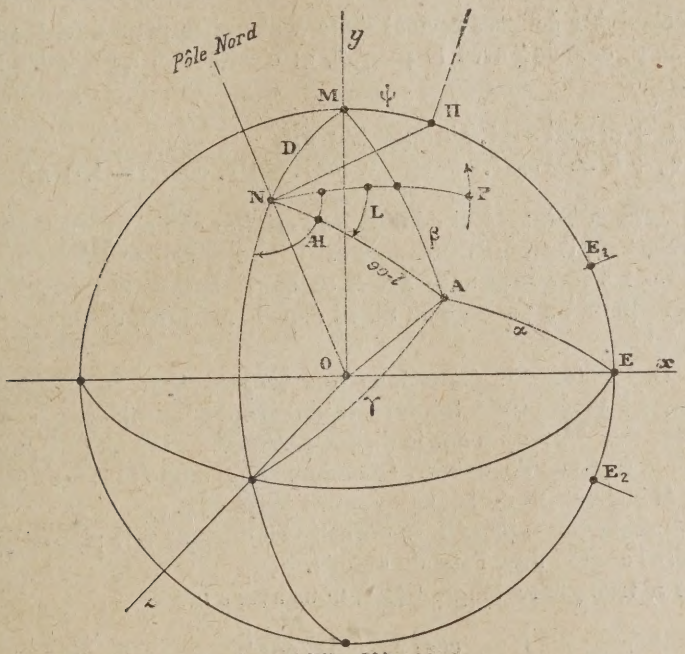


Fig. 264.

Le point A de la surface mobile est défini par sa latitude l et par sa longitude L.

$\mathcal{H}$ est l'angle horaire du Soleil par rapport au méridien de Paris P; l'angle que fait à chaque instant le cercle horaire du lieu A avec le plan yOz (qui par hypothèse contient le Soleil), est $\mathcal{H} - L$.

Vu le sens de la rotation de la Terre, $\mathcal{H}$ croît en fonction du temps.

Les longitudes L sont comptées positivement vers l'ouest comme les angles horaires.

Le point A de la sphère mobile étant donné, calculons ses coordonnées cartésiennes. R sera le rayon conventionnel de la sphère terrestre, par suite le rayon du cercle de projection.

Les formules de la trigonométrie sphérique donnent immédiatement $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$. D'où :

$$\begin{aligned} x &= R\cos l\,.\,\sin(\mathcal{H} - L), \\ y &= R\sin l\,.\,\cos D - R\cos l\,.\,\sin D\,.\,\cos(\mathcal{H} - L). \\ z &= R\sin l\,.\,\sin D + R\cos l\,.\,\cos D\,.\,\cos(\mathcal{H} - L). \end{aligned} \qquad (1)$$

D'autre part sur le plan xOy nous avons pour l'antisoleil des trajectoires *de la forme* (§ 333 et 337).

$$\xi = \xi_n + at, \qquad \eta = \eta_n + bt;$$
$$\mathrm{M} = nt.$$

Le calcul des éclipses revient donc à chercher pour quel temps t le point x, y, coïncide avec le point ξ, η; c'est-à-dire à résoudre le système :

$$\begin{aligned} \xi_n + at &= \mathrm{R}\cos l \,.\, \sin(m - \mathrm{L} + nt), \\ \eta_n + bt &= \mathrm{R}\sin l \,.\, \cos \mathrm{D} - \mathrm{R}\cos l \,.\, \sin \mathrm{D} \,.\, \cos(m - \mathrm{L} + nt). \end{aligned} \qquad (2)$$

m est une constante qui dépend de l'origine choisie pour les temps. Pour $m = 0$, l'origine des temps est le temps vrai de Paris.

D'après les formules nous avons en effet $x = 0$ pour $\mathrm{L} = \mathrm{M} = 0$, ce qui correspond au passage du Soleil dans le méridien de Paris.

337. **Obtention des équations des trajectoires rectilignes.** *1°* — Au § 332 les trajectoires rectilignes sont déterminées par rapport à la trace de l'écliptique sur le disque terrestre; ici nous prenons pour axe Ox la trace de l'équateur. Cherchons quel angle font ces traces.

Soit i l'inclinaison de l'équateur sur l'écliptique.

L'écliptique passe par Oz, sa normale est donc dans le plan xOy; elle doit faire l'angle i avec l'axe du monde.

Dans le triangle rectangle ΠMN, nous avons :

$$\cos i = \cos \mathrm{D} \,.\, \cos \psi.$$

Aux équinoxes $\mathrm{D} = 0$, la trace de l'écliptique fait l'angle i avec Ox. Elle est dirigée suivant OE_1 à l'équinoxe de printemps, suivant OE_2 à l'équinoxe d'automne.

La trace est comprise entre E et E_1 du solstice d'hiver au solstice d'été, entre E et E_2 du solstice d'été au solstice d'hiver suivant.

L'angle ψ est nul aux solstices.

2° — Nous pouvons aussi bien tracer les trajectoires en nous servant des ascensions droites et des déclinaisons.

Nous porterons alors suivant Oy la déclinaison relative de la Lune par rapport au Soleil, suivant Ox le produit de l'ascension droite relative par cos D. En effet l'ascension droite est un angle dièdre formé par un plan qui tourne autour de ON.

A la distance angulaire $90 - \mathrm{D}$, une variation $\Delta\mathrm{A}$ d'ascension droite équivaut à un déplacement $\cos \mathrm{D} \,.\, \Delta\mathrm{A}$.

3° — Il est intéressant de retrouver les mêmes résultats en parlant des formules générales de transformation des coordonnées écliptiques en coordonnées équatoriales.

Les formules ordinaires de transformation des coordonnées rectangulaires donnent :

$$x = \cos\psi \,.\, d\mathrm{L} - \sin\psi \,.\, dl, \qquad y = \sin\psi \,.\, d\mathrm{L} + \cos\psi \,.\, dl. \qquad (1)$$

avec la condition : $\cos i = \cos \mathrm{D} \,.\, \cos\psi.$

La seconde formule (1) devient :

$$y = \frac{\cos i}{\cos \mathrm{D}} \,.\, dl + \sqrt{1 - \frac{\cos^2 i}{\cos^2 \mathrm{D}}} \,.\, d\mathrm{L}. \qquad (2)$$

Ceci posé, partons de la première formule de transformation du § 18.

$$\sin \mathrm{D} = \sin l \,.\, \cos i + \cos l \,.\, \sin i \,.\, \sin \mathrm{L}.$$

Différentions et posons $l = 0$. Il reste :

$$\cos \mathrm{D} \,.\, d\mathrm{D} = \cos i \,.\, dl + \sin i \,.\, \cos \mathrm{L} \,.\, d\mathrm{L}. \qquad (3)$$

Or nous avons la relation générale $\sin \mathrm{D} = \sin i \,.\, \sin \mathrm{L}$.

Substituons à cos L sa valeur :

$$\cos \mathrm{L} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \mathrm{D}}{\sin^2 i}};$$

il vient :

$$\frac{\sin i \cos \mathrm{L}}{\cos \mathrm{D}} = \frac{\sqrt{\sin^2 i - \sin^2 \mathrm{D}}}{\cos \mathrm{D}} = \frac{\sqrt{\cos^2 \mathrm{D} - \cos^2 i}}{\cos \mathrm{D}} = \sqrt{1 - \frac{\cos^2 i}{\cos^2 \mathrm{D}}}.$$

A partir de (3) nous retrouvons donc la formule (1) en posant :

$$y = d\mathrm{D}.$$

De même à partir de la deuxième formule du § 18, on trouve :

$$\cos \mathrm{D} \,.\, d\mathrm{R} = \frac{\cos i}{\cos \mathrm{D}} d\mathrm{L} - \sqrt{1 - \frac{\cos^2 i}{\cos^2 \mathrm{D}}} \,.\, dl.$$

Il faut donc poser $x = \cos \mathrm{D} \,.\, d\mathrm{R}$ pour retomber sur la première formule (1).

338. **Méthode de Cassini.**

1° — Cassini et après lui La Caille ont développé une méthode graphique qui est entièrement contenue dans les formules précédentes.

La projection d'un parallèle terrestre est une ellipse; comme le mobile réel se promène sur le parallèle d'un mouvement uniforme, le mobile projeté se déplace sur l'ellipse suivant la loi des aires, pour le vecteur issu du centre de l'ellipse.

Éliminons $\mathrm{H} - \mathrm{L}$ entre les deux premières formules du § 336; il vient :

$$x^2 + \frac{(y - \mathrm{R} \sin l \,.\, \cos \mathrm{D})^2}{\sin^2 \mathrm{D}} = \mathrm{R}^2 \cos^2 l. \qquad (3)$$

L'ellipse projection du parallèle (trajectoire d'un point terrestre en projection) a pour demi-axes :

suivant Ox $\quad R\cos l$;
suivant Oy $\quad R\cos l\,.\,\sin D$.

Son centre est au point $x=0$, $y=R\cos D$, où le pôle nord terrestre se projette sur xOy.

Les extrémités du petit axe ont pour coordonnées $y=R\sin(l\pm D)$.

Nous pouvons marquer sur l'ellipse les positions qu'un lieu déter-

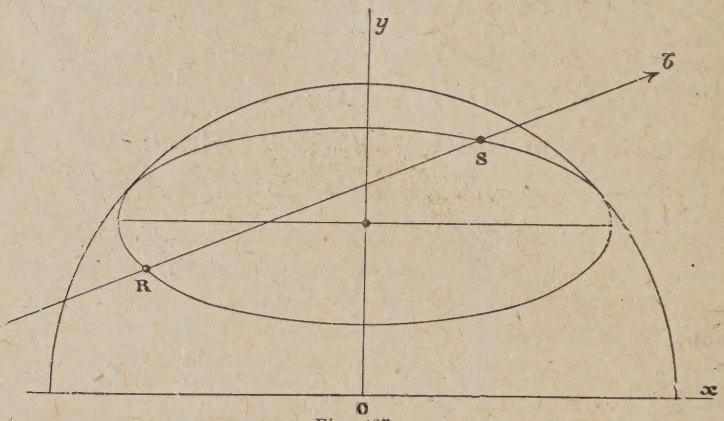


Fig. 265.

miné y occupe d'heure en heure; connaissant la longitude relative d'un autre point, le même problème se trouve *ipso facto* résolu pour lui.

2° — Cette ellipse est coupée par une des droites $\mathcal{C}$ déterminées au § 333, en deux points R et S; nous calculons aisément les heures pour lesquelles les mobiles fictifs qui décrivent les trajectoires $\mathcal{C}$, arrivent en ces points. Nous savons donc quels lieux du parallèle sont aux mêmes instants sur les points R et S. En ces lieux l'éclipse est du nombre de doigts qui correspond à $\mathcal{C}$.

Au point de vue analytique, le problème revient à poser :

$$\xi=\xi_n+at, \qquad \eta=\eta_n+bt,$$

dans l'équation (3), ξ_n et η_n étant choisis pour le nombre n de doigts désiré.

Il faut résoudre l'équation quadratique en t :

$$(\xi_n+at)^2+(\eta_n+bt-R\sin l\,.\cos D)^2 : \sin^2 D=R^2\cos^2 l. \qquad (4)$$

Transportant ces valeurs du temps dans l'une des équations (2) du § 336, nous avons les longitudes des lieux correspondants.

Nous déterminons ainsi point par point les courbes marquées six doigts, neuf doigts,... de la figure 266.

3° — Détermination des courbes terminales.

La projection du centre de la Lune se meut sur la trajectoire :

$$\xi = \Xi + at, \qquad \eta = \mathrm{H} + bt.$$

Considérons ce centre comme entraînant un cercle de rayon $\Delta + \delta$ (§ 333).

L'équation de ce cercle est :

$$(x - \Xi - at)^2 + (y - \mathrm{H} - bt)^2 = (\Delta + \delta)^2. \qquad (5)$$

Il coupe le disque terrestre :

$$x^2 + y^2 = \mathrm{R}^2,$$

en deux points tels qu'on ait :

$$x = f(t), \qquad y = \sqrt{\mathrm{R}^2 - f^2(t)}.$$

La fonction f est parfaitement déterminée par substitution dans (5).

Nous connaissons donc les coordonnées x, y, des points du contour du disque terrestre pour lesquels l'éclipse commence au temps t; les formules (1) nous donnent leurs coordonnées géographiques.

4° — Courbes des lieux où l'éclipse commence et finit a une heure t.

C'est le problème dont nous avons déjà indiqué la solution au § 335.

Les points de la surface terrestre pour lesquels l'éclipse commence et finit à une heure t, sont projetés sur la circonférence :

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = (\Delta + \delta)^2,$$

avec la condition :

$$\xi = \Xi + at, \qquad \eta = \mathrm{H} + bt.$$

Leurs coordonnées géographiques sont donc liées par la relation :

$$[\mathrm{R}\cos l \,.\, \sin(\mathcal{H} - \mathrm{L}) - \xi]^2 + [\mathrm{R}\sin l \,.\, \cos\mathrm{D} - \mathrm{R}\sin l \,.\, \sin\mathrm{D} \,.\, \cos(\mathcal{H} - \mathrm{L}) - \eta]^2 = (\Delta + \delta)^2.$$

Par hypothèse le temps t est connu; ξ, η, $\mathcal{H}$ sont donc connus. L'équation fournit une relation entre l et L.

5° — Détermination de la courbe pour laquelle le Soleil se lève ou se couche au milieu de l'éclipse.

Considérons maintenant le centre de la Lune projeté sur xOy comme entraînant la droite :

$$b(x - \xi) + a(y - \eta) = 0, \qquad (6)$$

normale à sa trajectoire. Elle coupe le disque terrestre :

$$x^2 + y^2 = \mathrm{R}^2,$$

en deux points tels qu'on ait :

$$x = f(t), \qquad y = \sqrt{R^2 - f^2(t)}.$$

La fonction f est parfaitement déterminée par substitution dans (6).

Nous connaissons donc les points du contour du disque terrestre pour lesquels l'éclipse commence au temps t qui coïncide avec le lever

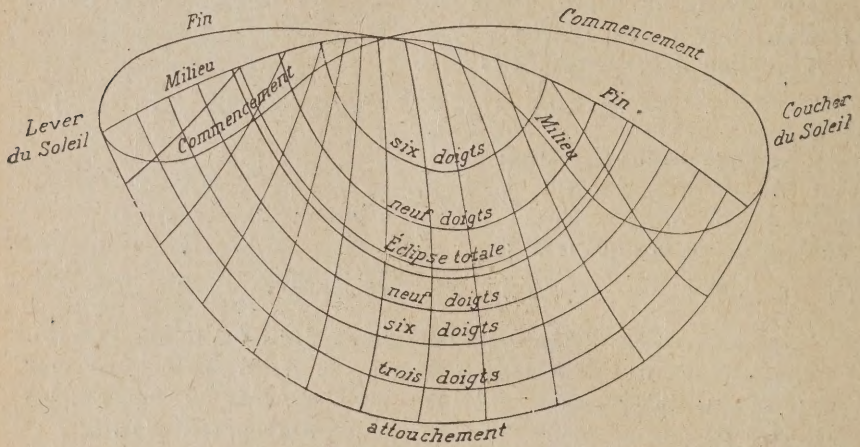


Fig. 266.

ou le coucher du Soleil; les formules (1) donnent leurs coordonnées géographiques.

339. **Importance des éclipses de Soleil.**

1° — Les éclipses de Soleil ont été longtemps un sujet d'effroi.

Voici comment Fontenelle raconte la chose à sa marquise.

« Je suis fort étonnée, dit la marquise, qu'il y ait si peu de mystère aux éclipses, et que tout le monde n'en devine pas la cause.

— Ah! vraiment, répondis-je, il y a bien des peuples qui, de la manière dont ils s'y prennent, ne la devineront encore de longtemps. Dans toutes les Indes orientales on croit que quand le Soleil et la Lune s'éclipsent, c'est qu'un certain Dragon, qui a les griffes fort noires, les étend sur ces astres dont il veut se saisir; et vous voyez pendant ce temps-là les rivières couvertes de têtes d'Indiens qui se sont mis dans l'eau jusqu'au cou, parce que c'est une situation très dévote selon eux, et très propre à obtenir du Soleil et de la Lune qu'ils se défendent bien contre le Dragon. En Amérique, on était persuadé que le Soleil et la Lune étaient fâchés quand ils s'éclipsaient, et Dieu sait ce qu'on ne faisait pas pour se raccommoder avec eux. Mais les Grecs, qui étaient si raffinés, n'ont-ils pas cru longtemps que la Lune était ensorcelée, et que des magiciennes la faisaient descendre du ciel pour jeter sur les herbes une certaine écume malfaisante? Et nous, n'eûmes-nous pas

belle peur, il n'y a que trente-deux ans (en 1654), à une certaine éclipse de Soleil, qui à la vérité fut totale? Une infinité de gens ne se tinrent-ils pas enfermés dans des caves? et les philosophes qui écrivirent pour nous rassurer, n'écrivirent-ils pas en vain ou à peu près? ceux qui s'étaient réfugiés dans les caves en sortirent-ils? »

Que Fontenelle me pardonne! Depuis 1686, le temps a marché, les gosses savent aujourd'hui que les éclipses n'ont rien de mystérieux; ils vous réciteront même une phrase sur les éclipses, ainsi qu'une phrase sur tout ce qui existe au monde. En sont-ils plus intelligents? L'ignorance des Grecs et les bains dans le Gange me deviennent sympathiques auprès de la Science infuse de nos primaires.

Le *Dragon* dont parle Fontenelle, a laissé sa trace dans la nomenclature. On appelle parfois le nœud ascendant de la Lune la *tête du Dragon*, et le nœud descendant la *queue du Dragon*. Les symboles ☊ et ☋ par lesquels on présente la longitude de ces points, sont des déformations du signe *Dragon*.

2° — Importance chronologique et astronomique des éclipses.

Le soin que les anciens auteurs ont mis à conserver la mémoire des éclipses de Soleil et de Lune qui ont précédé ou suivi les événements importants, est d'un grand secours pour fixer la date de ces événements. Tout fait dont la date est liée à une éclipse, se trouve chronologiquement repéré avec une précision qui est surtout grande pour les éclipses de Soleil. Voici l'exemple donné par *L'Art de vérifier les dates*.

On rapporte que quelques semaines avant la mort de Louis le Débonnaire, on vit, en France une éclipse totale de Soleil, le 5 mai, veille de la fête de l'Ascension. Cette éclipse n'a pu arriver qu'en 840; ce qui fixe la date de la mort de Louis le Débonnaire, et par le fait même quantité d'autres dates.

La chronologie des éclipses mesure la confiance qu'on peut avoir dans un historien. S'il est exact sur les éclipses, il y a des chances pour qu'il le soit sur d'autres points. Les éclipses servent enfin à relier les ères utilisées par différents auteurs. Depuis 19 siècles l'année a commencé à sept ou huit dates différentes; d'où une grande difficulté dans l'établissement des concordances. Sans parler des multiples calendriers anciens. Les éclipses fixent les dates communes et lèvent l'incertitude.

On ne s'étonnera donc pas que le tome I de l'ouvrage célèbre, *L'Art de vérifier les dates*, contienne la Chronologie (150 pages) des éclipses visibles en Europe, Asie et nord de l'Afrique depuis l'an 1 de J.-C. C'est à cet ouvrage que j'ai emprunté les tableaux des §§ 321 et 322. Le lecteur comprend pourquoi la liste des éclipses de Soleil est incomplète (§ 331).

340. Généralités sur les occultations.

1° — On appelle *occultation* l'éclipse d'une étoile par le disque lunaire.

Le moment de la disparition de l'étoile s'appelle *immersion*; le moment de sa réapparition est l'*émersion*.

La Lune se déplaçant de l'ouest à l'est (sens direct) dans le champ des étoiles, l'immersion a toujours lieu à l'est du disque. Le bord oriental est le bord obscur du disque de la nouvelle à la pleine lune; c'est le bord lumineux, de la pleine lune à la nouvelle.

Il y a *appulse* lorsque l'étoile s'approche beaucoup du disque lunaire sans passer derrière, en particulier quand elle le tangente.

Les phénomènes sont instantanés : en moins de 0s,1 l'étoile disparaît ou réapparaît. Cela prouve l'inexistence d'une atmosphère lunaire et la nullité du diamètre apparent des étoiles.

Les occultations sont une preuve, connue dès la plus haute antiquité,

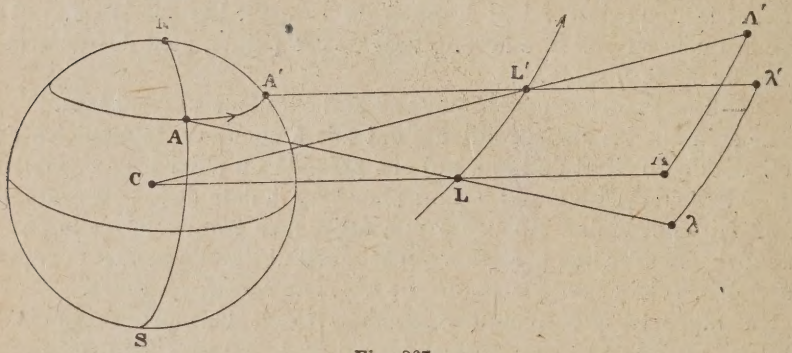


Fig. 267.

que la Lune existe même quand nous ne la voyons pas et que c'est un corps opaque : les anciens avaient remarqué les émersions ou immersions au bord obscur, phénomènes d'autant plus surprenants qu'ils sont soudains et qu'on n'est pas gêné par la lumière d'une surface brillante voisine.

Les occultations peuvent servir à déterminer les longitudes, puisque l'heure de l'occultation dépend de la position de l'observateur sur la Terre; cette méthode n'est plus que rarement employée.

Elles peuvent servir à déterminer le diamètre apparent du disque lunaire, par suite la distance relative de la Lune à la Terre. Il suffit de mesurer la durée de l'occultation qui est évidemment liée au diamètre apparent. La mesure est plus précise que celle qui résulte de l'emploi du micromètre.

C'est de l'instantanéité du phénomène que les occultations tirent leur valeur pour la détermination des longitudes, valeur que cependant il ne faut pas exagérer. On a beau calculer le point d'immersion et d'émersion, il existe toujours un retard dans l'observation, retard *dû à la surprise* et qui atteint parfois une valeur considérable.

2° — Le calcul des occultations est très simple pour le centre de la Terre quand on possède des tables correctes de la Lune. On sait à chaque instant en quel point du ciel son centre se projette, on connaît son diamètre apparent : on sait donc à chaque instant quelles étoiles sont cachées par son disque.

La figure 267 montre que le phénomène dépend de la position de l'observateur, *et d'une manière considérable*. Par exemple la Lune qui est vue du centre C de la Terre dans la direction CL, qui par conséquent se projette en un point Λ de la sphère céleste, est vue dans la direction AL du point A et se projette en λ. La trajectoire de son centre vue du point C est ΛΛ′; elle est λλ′ vue du point A que le mouvement diurne amène en A′.

Or le déplacement linéaire de la Lune dans son mouvement autour de la Terre est environ 2 fois plus grand que le déplacement d'un point de l'équateur terrestre sous l'influence du mouvement diurne; la vitesse angulaire est en effet 30 fois plus petite, mais le rayon de la trajectoire décrite est 60 fois plus grand. Les vitesses de l'observateur et du centre de la Lune sont donc du même ordre de grandeur.

D'autre part l'angle ACL est du même ordre de grandeur que le diamètre apparent de la Lune. D'où résulte que le disque peut occulter une étoile pour un observateur et ne pas le faire pour un autre situé sur le même méridien, mais à une latitude différente; l'occultation qui se produit à une certaine heure pour un observateur A, se produit à une heure différente pour l'observateur B situé sur le même parallèle, mais de longitude différente.

A la vérité on a considéré longtemps les variations du phénomène dues à la parallaxe comme un avantage : elles permettent de déterminer les longitudes. C'est un des procédés les plus précis, comparable à l'emploi des satellites de Jupiter. Aujourd'hui nous avons des méthodes plus directes, ne nécessitant pas des calculs aussi difficiles : dans les observatoires on utilise la lunette méridienne; pour les explorations on ne peut songer à des méthodes exigeant des connaissances astronomiques approfondies.

3° — Tous les ans l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* donne les occultations *visibles de Paris* des planètes et des étoiles les plus importantes.

L'entrée et la sortie sont repérées sur le disque par l'*angle au zénith* : c'est l'angle ψ de la figure 240 *bis* compté dans le sens indiqué, à partir du vertical passant par le centre du disque. On suppose la Lune observée à l'œil nu (image directe, non renversée par une lunette).

La complication des angles ψ tient à ce qu'ils sont rapportés au vertical.

En fait la Lune ne s'éloigne jamais beaucoup de l'écliptique dont la direction est voisine de la *ligne de symétrie* du disque écorné, ou, si l'on veut, est sensiblement normale à la *droite des cornes* §) 305).

Corrélativement la trajectoire de l'étoile occultée relativement au disque lunaire ne s'éloigne jamais beaucoup d'être parallèle à l'écliptique, c'est-à-dire normale à la ligne des cornes.

Dans une révolution de la ligne des nœuds, le centre de la Lune balaie une bande de ciel d'un peu plus de 5° de part et d'autre de l'écliptique. En tenant compte de la parallaxe et du diamètre apparent, on voit que, pendant une révolution de la ligne des nœuds, toutes les étoiles sont occultées qui se trouvent à moins de 6° de latitude nord ou sud.

341. Calcul pour un cas schématique.

1° — Pour fixer les idées sur la nature des occultations, traitons un

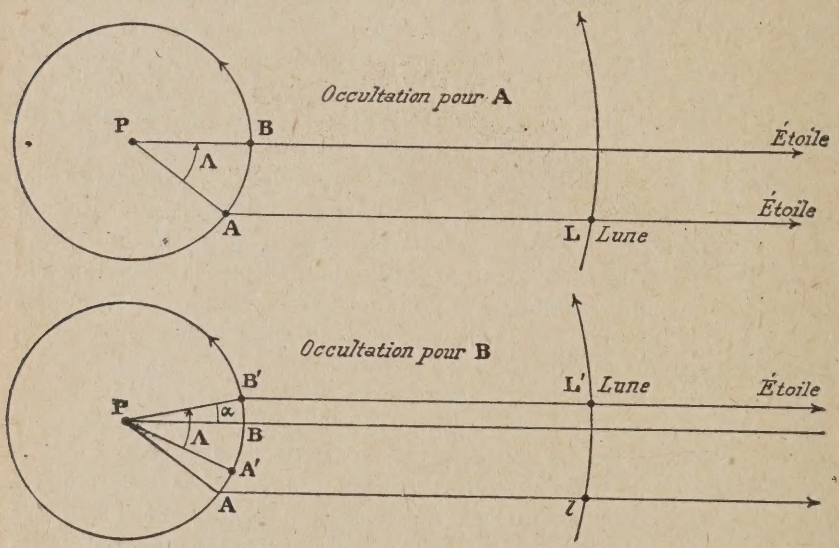


Fig. 268.

cas simple. Les deux lieux A et B sont sur le même parallèle de latitude l; la différence A de leurs longitudes est petite par hypothèse. Supposons la déclinaison de la Lune maxima, ce qui permet une figure plane; supposons enfin que l'occultation se fait à peu près dans les méridiens des lieux A et B.

En définitive nous avons un écran L qui se déplace L en L'; l'un de ses bords (immersion pour préciser) vient à une certaine heure cacher l'étoile E pour l'observateur A. Montrons que le même phénomène se produit un peu plus tard pour l'observation B dont je suppose la longitude orientale par rapport à A.

Soit t le temps qui sépare les deux phénomènes. Soit V et v les vitesses angulaires de la Lune et de la Terre.

Pendant le temps t le système AB tourne de l'angle α, tel qu'on ait :

$$vt = \alpha.$$

Le bord de la Lune doit se déplacer de la longueur :

$$\overline{IL'} = \overline{AB'} = (\Lambda + \alpha)\mathrm{R}\cos l = \mathrm{V}at.$$

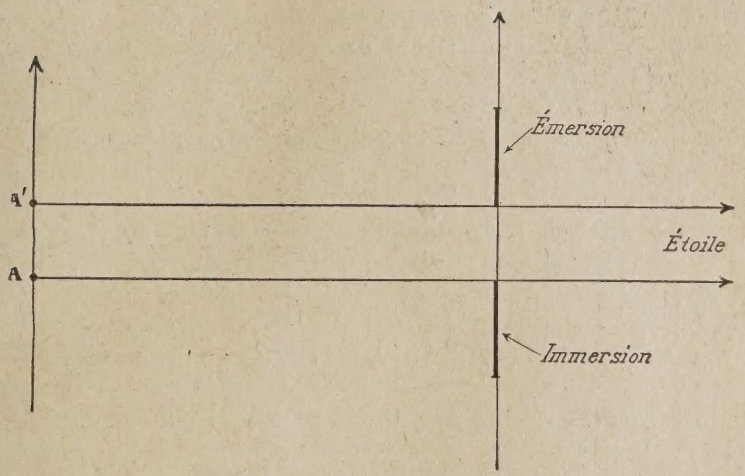


Fig. 269.

R est le rayon terrestre; a est la distance de la Terre à la Lune.
D'où l'équation :

$$(\Lambda + vt)\mathrm{R}\cos l = \mathrm{V}at.$$

On a sensiblement :

$$\mathrm{V} : v = 30, \qquad a : \mathrm{R} = 60.$$

D'où la formule :

$$t = \frac{\Lambda : v}{2 - \cos l}.$$

$\Lambda : v$ est la différence des longitudes évaluée en temps.

Par exemple supposons qu'il s'agisse de deux villes (Paris et Berlin) dont la différence des longitudes est 44 minutes environ et qui soient sur le parallèle 50°.

On a : $\cos 50° = 0{,}643$, $l = 21$ minutes.

L'occultation commencera et finira à Paris 21 minutes avant de commencer à Berlin. Lalande donne précisément ce nombre pour une occultation réelle calculée par lui.

2° — Cherchons l'ordre de grandeur de la durée de l'occultation dans les conditions précédentes et dans le cas où l'étoile traverse le disque lunaire suivant un diamètre.

Supposons d'abord l'observateur A immobile au centre de la Terre.

Prenons une variation d'ascension droite de $2^s,5$ par minute de temps : cela fait environ $37''$ d'arc par minute, $37'$ par heure. Vu le diamètre apparent de la Lune, l'occultation dure moins d'une heure pour l'observateur géocentrique. Il est clair que la durée varie entre une limite supérieure pour le passage de l'étoile suivant un diamètre, et zéro pour l'affleurement tangentiel (*appulse*).

Mais l'observateur situé sur la Terre se déplace de A et A′ dans le même sens que la Lune; la durée de l'occultation est allongée.

Reprenons le calcul.

Pendant le temps t que dure l'occultation, l'observateur se déplace de :

$$\overline{AA'} = Rvt\cos l.$$

Soit R′ le rayon de la Lune. Elle se déplace de :

$$\overline{AA'} + 2R' = Rvt\cos l + 2R'.$$

On a donc :

$$Rvt\cos l + 2R' = aVt, \qquad t = \frac{2R'}{aV - Rv\cos l}.$$

Substituons les valeurs moyennes; prenons l'heure pour unité de temps :

$$t = \frac{2}{v}\frac{R'}{R}\frac{1}{2-\cos l} = \frac{24}{\pi}\cdot 0{,}272\,\frac{1}{2-\cos l}.$$

$$t = \frac{2{,}078}{2-\cos l}.$$

Le calcul fait avec les valeurs moyennes, fournit donc, suivant la latitude du lieu d'observation, une durée d'occultation qui varie entre une et deux heures. Il s'agit bien entendu de conditions très particulières et quasi schématiques.

Pour Paris $l = 48°\,50'$, $\cos l = 0{,}658$.

La formule donne $1^h\,33^m$ pour valeur moyenne de l'occultation dans les conditions susdites. Il n'est pas rare que les occultations durent plus de $1^h\,20^m$.

342. Calcul dans le cas général.

Le calcul est analogue à celui d'une éclipse de Soleil.

Reprenons la figure 264; supposons l'axe Oz dirigé vers l'étoile dont nous considérons la distance comme infinie; les rayons qui en émanent forment donc un faisceau de droites parallèles.

La déclinaison et l'ascension droite de l'étoile sont D et Æ. Chaque point de la Terre est défini par les coordonnées x et y, où Æ est l'angle horaire du méridien origine par rapport au plan horaire de l'étoile.

$$x = R\cos l\,.\,\sin(Æ - L),$$
$$y = R\sin l\,.\,\cos D - R\cos l\,.\,\sin D\,.\,\cos(Æ - L).$$

Comme origine des temps, nous prenons le milieu de l'occultation; c'est le temps pour lequel les ascensions droites de l'étoile et du centre de la Lune deviennent égales; il est donné par les tables en temps moyen de Paris.

Au voisinage de ce temps nous pouvons écrire :

$$x = x_0 + \lambda t \mathrm{R} \cos l \,.\, \cos(\mathrm{A} - \mathrm{L}) = x_0 + x' t,$$
$$y = y_0 + \lambda t \mathrm{R} \,.\, \cos l \,.\, \sin \mathrm{D} \,.\, \sin(\mathrm{A} - \mathrm{L}) = y_0 + y' t.$$

λ est la variation de temps sidéral pour une heure de temps moyen :

$$\lambda = 1^{\mathrm{h}}\, 0^{\mathrm{m}}\, 9^{\mathrm{s}},86 = 1^{\mathrm{h}},00274.$$

Dans la formule λ est exprimé en radians.

Le passage du premier groupe d'équations au second revient à remplacer la trajectoire elliptique du point terrestre par sa tangente.

Les phénomènes étant vus de la Lune, R a pour valeur la parallaxe horizontale lunaire actuelle.

Déterminons la trajectoire relative du centre de la Lune.

Soit a et d son ascension droite et sa déclinaison.

Par hypothèse au temps 0, on a $a = \mathrm{A}$.

Quand l'ascension droite varie de $a't$ (a' désigne la variation horaire), le déplacement de la projection de la Lune est $\cos \mathrm{D} \,.\, a't$, puisque l'angle a mesure la rotation d'un plan autour d'un axe (axe du monde) qui fait l'angle D avec la normale à notre plan $z\mathrm{O}x$. On a donc :

$$\xi = \cos \mathrm{D} \,.\, a't = \xi' t, \qquad \eta = d - \mathrm{D} + d't = \eta_0 + \eta' t.$$

La condition d'occultation est que le point terrestre soit juste sur le cercle de projection de la Lune dans le plan $x\mathrm{O}y$. Soit δ le demi-diamètre apparent de la Lune; on a pour le début et la fin de l'occultation :

$$[x_0 + (x' - \xi')t]^2 + [(y_0 - \eta_0) + (y' - \eta')t]^2 = \delta^2.$$

APPENDICE I

HABITABILITÉ DES MONDES

343. Manières absurdes de poser le problème.

1° — Il existe des problèmes qu'il faut apprendre à poser, bien qu'on soit sûr de ne les résoudre jamais. Étant insolubles, ils ont le triste privilège de faire parler copieusement les savants et les ignorants, plus sottement en général les premiers que les seconds : ils servent de tests pour montrer que, sortis de leur spécialité, les savants sont ordinairement des imbéciles.

Voici comment Lalande, excellent astronome pourtant et très intelligent à l'habitude, pose et résout le problème : « Nous voyons six planètes autour du Soleil; la Terre est la troisième. Elles tournent toutes les six dans des orbites elliptiques; elles ont un mouvement de rotation comme la Terre; elles ont comme elle des taches, des inégalités, des montagnes. Il y en a trois qui ont des satellites et la Terre en est une; Jupiter est aplati comme la Terre. Enfin il n'y a pas un seul caractère visible de ressemblance qui ne s'observe réellement entre les planètes et la Terre.

« Est-il possible de supposer que l'existence des êtres vivants et pensants soit restreinte à la Terre? Sur quoi serait fondé ce privilège, si ce n'est peut-être sur l'imagination étroite et timide de ceux qui ne peuvent s'élever au delà des objets de leurs sensations immédiates, etc. »

Lalande, mon bon ami, vous êtes grandiloquent — mais vous seriez sage de ne vous mêler que d'Astronomie pure!

Votre sophisme est classé : il s'appelle une *Fausse analogie.*

Je vous répondrai par une boutade que prête à un Hollandais le philosophe boche Kant, qui pourtant sur le sujet actuel a proféré de bien extraordinaires bourdes : nous les retrouverons plus loin.

« Les créatures qui habitaient les broussailles de la tête d'un gueux, s'étaient habituées à regarder leur demeure comme une sphère

immense, et à se considérer elles-mêmes comme le chef-d'œuvre de la création; lorsqu'un jour l'une d'elles, que le ciel avait douée d'un esprit plus fin que les autres, aperçut à l'improviste la tête d'un gentilhomme. Elle rassemble aussitôt les fortes têtes de son quartier et leur dit : « Nous ne sommes pas les seuls êtres vivants de la nature! Voyez : voici un nouveau monde sur lequel il y a plus de poux que chez nous! »

L'honorable insecte raisonnait comme Lalande : il voyait une très parfaite ressemblance générale entre les deux têtes : deux yeux, deux oreilles, un nez, une bouche,...; il concluait à l'identité, sans se demander si les conditions de vie pour son espèce se trouvaient aussi bien réalisées sur la tête du gentilhomme que sur celle du gueux.

2° — Dans sa *Pluralité des Mondes*, Fontenelle développe des âneries du même calibre; mais son esprit fait passer ce qui devient intolérable chez les cuistres d'observatoires.

Au reste sait-on bien quelle était son opinion vraie?

Certes il a raison de dire que de ne pas voir d'habitants dans la Lune, n'est pas une preuve de leur inexistence. Mais, à part cela, que de sottises implicites dans la jolie page que je transcris.

« Je ne prends parti dans ces choses-là que comme on en prend dans les guerres civiles où l'incertitude de ce qui peut arriver, fait qu'on entretient toujours des intelligences dans le parti opposé et qu'on a des ménagements avec ses ennemis mêmes. Pour moi, quoique je croie la Lune habitée, je ne laisse pas de vivre civilement avec ceux qui ne le croient pas; et je me tiens toujours en état de me pouvoir ranger à leur opinion avec honneur si elle avait le dessus. Mais en attendant qu'ils aient sur nous quelque avantage considérable, voici ce qui m'a fait pencher du côté des habitants de la Lune.

« Supposons qu'il n'y ait jamais eu nul commerce entre Paris et Saint-Denis, et qu'un bourgeois de Paris, qui ne sera jamais sorti de sa ville, soit sur les tours de Notre-Dame et voie Saint-Denis de loin. On lui demandera s'il croit que Saint-Denis soit habité comme Paris. Il répondra hardiment que non; car, dira-t-il, je vois bien les habitants de Paris, mais ceux de Saint-Denis je ne les vois point; on n'en a jamais entendu parler. »

Ça se saurait, comme disait Mac Mahon du séjour des papes à Avignon.

« Il y aura quelqu'un qui lui représentera qu'à la vérité, quand on est sur les tours Notre-Dame, on ne voit pas les habitants de Saint-Denis, mais que l'éloignement en est cause; que tout ce qu'on peut voir de Saint-Denis, ressemble fort à Paris; que Saint-Denis a des clochers, des maisons, des murailles, et qu'il pourrait bien encore ressembler à Paris pour être habité.

« Tout cela ne gagnera rien sur mon bourgeois; il s'obstinera toujours à soutenir que Saint-Denis n'est point habité, puisqu'il n'y voit personne. Notre Saint-Denis, c'est la Lune, et chacun de nous est un bourgeois de Paris qui n'est jamais sorti de sa ville. »

Le raisonnement est toujours le même. « Puisqu'on voit que Saint-Denis est tout fait comme Paris, on est dans l'obligation de croire que Saint-Denis est habité. »

Mais de ce que Saint-Denis *paraît* être comme Paris, qui donc vous assure qu'il l'est effectivement? Je vois à la lunette un four à chaux. Est-il éteint ou allumé? Peut-il servir de frais asile contre le Soleil ou de four crématoire?

3° — Fontenelle nous ressasse son argument avec une insistance pour laquelle son esprit seul nous rend indulgents : « Sur Vénus, je reprends le Saint-Denis. Vénus tourne sur elle-même et autour du Soleil comme la Lune. On découvre avec les lunettes d'approche que Vénus, aussi bien que la Lune, est tantôt en croissant, tantôt en décours, tantôt pleine, selon les diverses situations où elle est à l'égard de la Terre. La Lune, selon toutes les apparences, est habitée; pourquoi Vénus ne le serait-elle pas aussi?

— Mais, interrompit la marquise, en disant toujours *pourquoi non?* vous m'allez mettre des habitants dans toutes les planètes.

— N'en doutez pas, répliquai-je; ce *pourquoi non* a une vertu qui peuplera tout. Nous voyons que toutes les planètes sont de la même nature, toutes des corps opaques, qui ne reçoivent de la lumière que du Soleil, qui se la renvoient les uns aux autres, et qui n'ont que les mêmes mouvements : jusque-là tout est égal. Cependant il faudrait concevoir que ces grands corps auraient été faits pour n'être point habités, que ce serait là leur condition naturelle, et qu'il y aurait une exception justement en faveur de la Terre toute seule. Qui voudra le croire le croie; pour moi, je ne m'y puis pas résoudre. »

Un autre argument apparaît ici : celui des *causes finales*, bête à hurler. S'il n'y avait personne dans Jupiter, à quoi donc serviraient ses satellites? C'est le melon qui a des côtes pour être mangé en famille, et la puce qui est noire pour qu'on la chope plus aisément sur sa chemise. Mais si vous portez des chemises noires comme font les serruriers, faut-il croire qu'au bout d'un laps suffisant, vous créerez une race de puces blanches?

Et le *mimétisme*, qu'en faites-vous? répond l'adversaire.

344. Manière pittoresque de poser le problème.

1° — Une seconde manière de résoudre le problème est bien connue des vulgarisateurs.

« Posons que la Lune est *habitée*.

— Mais c'est un cercle vicieux! il s'agit justement de savoir si elle est *habitable!*

— N'importe! posons que la Lune est habitée et voyons ce que pensent les habitants de la Lune. Notre hypothèse n'a qu'un sens provisoire, nous le savons. Mais elle donnera lieu à de jolis développements : c'est tout ce que nous voulons. »

Ainsi nous ne voyons que la moitié de la Lune; il est clair que seule une moitié de la Lune nous voit. Là-dessus Fontenelle s'amuse : « Que le spectacle de notre Terre doit paraître nouveau aux voyageurs qui passent de la moitié de la Lune qui ne nous voit jamais, à celle qui nous voit toujours. Ah! que l'on s'est bien gardé de croire les relations des premiers qui en ont parlé, lorsqu'ils ont été de retour en ce grand pays auquel nous sommes inconnus!

— Il me vient à l'esprit, dit la marquise, que de ce pays-là dans l'autre, il se fait des espèces de pèlerinages pour venir nous considérer, et qu'il y a des honneurs et des privilèges pour ceux qui ont vu une fois dans leur vie la Grosse planète.

— Du moins, repris-je, ceux qui la voient ont le privilège d'être mieux éclairés pendant leurs nuits. L'habitation de l'autre moitié de la Lune doit être beaucoup moins commode à cet égard! »

2° — Vous comprenez que dans cette voie on peut aller fort loin : l'imagination se donne carrière.

Fontenelle et la marquise parlent de Vénus.

« Ces gens-là doivent bien entendre la galanterie, dit la marquise.

— Oh! sans doute, répondis-je, le menu peuple de Vénus n'est composé que de Céladons et de Silvandres, et leurs conversations les plus communes valent les plus belles de Clélie. Le climat est très favorable aux amours. Vénus est plus proche que nous du Soleil, et en reçoit une lumière plus vive et plus de chaleur. Elle est à peu près aux deux tiers de la distance du Soleil à la Terre. »

Bode, 1747-1826, ancien directeur de l'Observatoire de Berlin, traducteur germanique de Fontenelle, s'étonne de cette opinion : « Étrange! car chez nous, à Berlin, on trouve qu'une grande chaleur rend plutôt paresseux et somnolent qu'éveillé! »

Mon vieux boche, ne cherche pas à comprendre; tu ne pourrais pas!

Je le répète, Fontenelle sauve tout par l'esprit. Mais nos cuistres qui en sont fort dépourvus, insistent pesamment sur la force centrifuge à l'équateur de Jupiter; ils nous font assister, règle à calcul en main, au voyage d'un malheureux jovicole qui, partant du pôle fort lourd, arrive léger comme une plume aux basses latitudes de sa planète. Pour mon compte, je ne trouve pas cela plus intéressant que de partir de Genève sous la pression de 760 mm. de mercure et d'arriver au sommet du Mont Blanc sous la pression de 406 mm.

345. **Manière philosophique de poser le problème.**

C'est assurément la plus réjouissante. Pous vous donner une idée de ce dont les philosophes sont capables, je citerai quelques extraits de l'Appendice de la *Théorie du Ciel* de l'illustre Kant. Le raisonnement a toute la lourdeur d'un 420 : j'en passe les neuf dixièmes; il n'en reste que trop pour la gloire de Kant.

Kant pose d'abord que toutes les planètes sont habitées; cela lui paraît même si évident qu'il dit : « Mon opinion est qu'il n'est pas abso-

lument nécessaire de croire que toutes les planètes sont habitées, quoiqu'il soit absurde de le nier pour toutes ou du moins pour le plus grand nombre d'entre elles. »

Pour déterminer quels doivent être les habitants des planètes, il développe la plus incroyable collection de sophismes qu'on puisse rêver, incroyable s'entend pour qui n'a jamais étudié un système métaphysique, c'est-à-dire *ce qui est la raison d'exister des philosophes.*

« L'homme est bâti pour recevoir les impressions et les émotions que le monde doit éveiller en lui par l'intermédiaire du corps qui est la partie visible de son être, et... qui intervient inévitablement dans l'acte de la pensée. A mesure que son corps se développe, les facultés de sa nature pensante atteignent le degré correspondant de perfection; elles n'arrivent à tout leur épanouissement normal et viril que lorsque les fibres de son organisme ont acquis la solidité et la dureté qui caractérisent leur complète formation....

« Si l'on recherche les causes des obstacles qui retiennent la nature humaine dans un si profond abaissement, on les trouve dans la grossièreté de la matière dans laquelle sa partie spirituelle est submergée, dans la rigidité des fibres, l'inertie et l'immobilité des fluides qui doivent obéir aux excitations de l'âme.... Les efforts de la raison pour lutter contre les passions... ne sont que les éclats fugitifs d'un soleil dont d'épais nuages interceptent et obscurcissent incessamment la clarté.

« [Or il existe] une gradation évidente dans les propriétés des divers habitants des planètes, et une liaison essentielle qui enchaîne chacune des classes de ces êtres, par la nécessité de sa nature, au lieu qui lui a été assigné dans l'Univers.

« L'habitant de la Terre et celui de Vénus ne pourraient, sous peine de mort, échanger leurs habitations respectives. Le premier... serait beaucoup trop fluide pour une température plus élevée. Il subirait, s'il était placé dans une sphère plus chaude, des mouvements gigantesques et une désorganisation complète de sa nature, par suite de la volatilisation et de la dessiccation de ses humeurs et d'une expansion extraordinaire de ses fibres élastiques....

« Aussi beaucoup plus légers encore doivent être les matériaux dont est formé le corps de l'habitant de Jupiter, afin que la faible excitation que peut produire le Soleil à cette distance suffise à donner à cette machine des mouvements aussi vifs que ceux des habitants des régions inférieures. »

Maintenant, tenez-vous bien! voici la conclusion.

« Puisque les facultés spirituelles sont en dépendance nécessaire de la matière qui forment les machines qu'habitent les âmes, nous sommes amenés à conclure qu'il est plus que vraisemblable que *l'excellence des créatures intelligentes, la promptitude de leur pensée, la netteté et la vivacité des notions qu'elles reçoivent des impressions extérieures*, auss

bien que leur faculté de les associer,..., en un mot tout leur être moral doivent être d'autant plus parfaites et plus excellentes que leur lieu d'habitation est plus éloigné du Soleil.

« Cette loi étant ainsi établie avec un degré de vraisemblance qui ne diffère guère d'une vérité démontrée,.... »

Je m'arrête; c'est trop fou, c'est trop bête!

346. **Manière sensée de poser le problème.**

Éliminons toutes ces billevisées, charmantes ou lourdes; serrons le problème de plus près. Reconnaissons qu'ici du moins, Fontenelle n'est pas seulement un brillant esprit. Voici ce qu'on trouve dans sa préface; j'imagine qu'en 1918 personne ne sera plus susceptible que ne l'était Louis XIV en 1686, un an après la révocation de l'édit de Nantes.

« Il ne me reste plus qu'à parler à une sorte de personnes; mais ce seront peut-être les plus difficiles à contenter, non que l'on n'ait à leur donner de fort bonnes raisons, mais parce qu'ils ont le privilège de ne se payer pas de toutes les raisons qui sont bonnes. Ce sont les gens scrupuleux qui pourront s'imaginer qu'il y a du danger, par rapport à la religion, à mettre les habitants ailleurs que sur la Terre.

« Je respecte jusqu'aux délicatesses excessives que l'on a sur le fait de la religion; et celle-là même, je l'aurais respectée au point de ne la vouloir pas choquer dans cet ouvrage, si elle était contraire à mon sentiment. Mais ce qui va peut-être vous paraître surprenant, elle ne regarde pas seulement ce système où je remplis d'habitants une infinité de mondes. Il ne faut que démêler une petite erreur d'imagination.

« Quand on vous dit que la Lune est habitée, vous vous y représentez aussitôt des hommes faits comme nous. Et puis, si vous êtes un peu théologien, vous voilà plein de difficultés : la postérité d'Adam n'a pas pu s'étendre jusque dans la Lune, ni envoyer des colonies en ce pays-là; les hommes qui sont dans la Lune ne sont donc pas fils d'Adam. Or, il serait embarrassant, dans la théologie, qu'il y eût des hommes qui ne descendissent pas de lui.

« Il n'est pas besoin d'en dire davantage; toutes les difficultés imaginables se réduisent à cela, et les termes qu'il faudrait employer dans une plus longue explication sont trop dignes de respect pour être mis dans un livre aussi peu grave que celui-ci. L'objection roule donc tout entière sur les hommes de la Lune; mais ce sont ceux qui la font, à qui il plaît de mettre des hommes dans la Lune. Moi, je n'y en mets point. J'y mets des habitants qui ne sont point du tout des hommes. Que sont-ils donc? Je ne les ai point vus, ce n'est pas pour les avoir vus que j'en parle; et ne soupçonnez pas que ce soit une défaite dont je me serve pour éluder votre objection, que dire qu'il n'y a point d'hommes dans la Lune : vous verrez qu'il est impossible qu'il y en ait, selon l'idée que j'ai de la diversité infinie que la nature doit avoir mise dans ses ouvrages. »

Voilà qui est très net : quand on demande si les mondes sont habités, c'est une manière absurde de comprendre la question que de traduire : *existe-t-il des hommes dans la Lune, dans Mars ou dans Vénus?*

On demande s'il existe autre part que sur la Terre des êtres vivants, *analogues aux plantes et aux animaux que nous connaissons*, mais pouvant n'avoir rien de commun avec les hommes.

Fontenelle revient plus loin sur la même idée; on sent qu'il prend très au sérieux ce qu'il dit.

« Moi? repris-je, je ne crois point du tout qu'il y ait des hommes dans la Lune. Voyez combien la face de la nature est changée d'ici à la Chine : d'autres visages, d'autres figures, d'autres mœurs et presque d'autres principes de raisonnement. D'ici à la Lune, le changement doit être plus considérable. Quand on va vers de certaines terres nouvellement découvertes, à peine sont-ce des hommes que les habitants qu'on y trouve; ce sont des animaux à figure humaine, encore quelquefois assez imparfaite, mais presque sans aucune raison humaine. Qui pourrait pousser jusqu'à la Lune, assurément ce ne seraient plus des hommes qu'on y trouverait.

— Quelles sortes de gens seraient-ce donc? reprit la marquise avec un air d'impatience.

— De bonne foi, madame, répliquai-je, je n'en sais rien. S'il se pouvait faire que nous eussions de la raison et que nous ne fussions pourtant pas hommes, et si d'ailleurs nous habitions la Lune, nous imaginerions-nous qu'il y eût ici-bas cette espèce bizarre de créatures qu'on appelle le genre humain? Pourrions-nous nous figurer quelque chose qui eût des passions si folles et des réflexions si sages; une durée si courte et des vues si longues; tant de science sur des choses presque inutiles et tant d'ignorance sur les plus importantes; tant d'ardeur pour la liberté et tant d'inclination à la servitude; une si forte envie d'être heureux et une si grande incapacité de l'être. Il faudrait que les gens de la Lune eussent bien de l'esprit s'il devinaient tout cela! »

Enfin voilà le problème posé.

La réponse à la question, *si les mondes sont habités*, n'a de sens qu'après avoir défini de quels êtres vivants nous parlons.

Que devons-nous considérer comme les conditions essentielles de la vie et de la matière animée? ces conditions paraissent-elles réalisées sur les planètes et sur leurs satellites?

Le problème est moins précis et moins présomptueux que celui *des hommes dans la Lune*; on se garde de le compliquer par la question de savoir si cette matière animée est pensante.

Le problème prend un énoncé restreint, *mais raisonnable.*

Ajoutons tout de suite que Fontenelle admet la possibilité d'êtres vivants dans les conditions les plus diverses, à 1 000 de nos degrés centigrades, par exemple : il conclut justement que toutes les planètes, toutes les étoiles, *peuvent* être habitées. Pourquoi ne le seraient-elles pas?

347. Conditions de vie d'êtres analogues à ceux que nous connaissons.

1° — En devenant raisonnable le problème suit la loi coutumière : il perd tout intérêt autre que scientifique et professionnel.

Il se réduit à ceci.

Des plantes et des animaux, CONSTRUITS COMME CEUX QUE NOUS CONNAISSONS, exigent pour vivre des températures qui ne soient pas supérieures à 100°, à 110° si l'on veut (températures pour lesquelles les albumines se coagulent), ni de beaucoup inférieures à la température de congélation de l'eau. Ils exigent pour vivre de l'eau, de l'oxygène, du gaz carbonique.

Nous pouvons donc admettre pour conditions essentielles de la vie : la présence de l'eau, la présence d'une atmosphère contenant de l'oxygène et du gaz carbonique, enfin l'existence d'une température comprise entre les limites ci-dessus définies.

Mais, dites-vous, c'est restreintre arbitrairement la solution! Que nenni! car si vous ne posez pas ces conditions, si vous admettez qu'elles n'ont rien de nécessaire, il n'y a plus de problème du tout, puisque rien n'empêche logiquement l'existence d'êtres vivants dans des conditions QUI NOUS SONT INCONNUES. Si vous ne restreignez pas le problème, vous le supprimez ; il n'y a pas de troisième alternative.

2° — Nous jouons maintenant sur le velours.

Dans quelles planètes les conditions ci-dessus définies paraissent-elles réalisées?

Tout porte à croire que *la Lune est inhabitable pour des êtres constitués essentiellement comme les plantes ou les animaux que nous connaissons*, quelles que soient du reste leurs formes, si différentes qu'elles puissent être de celles auxquelles nous sommes accoutumés.

La Lune n'a sûrement pas d'atmosphère contenant des gaz ou vapeurs à une pression sensible. D'autre part, elle doit passer par des alternatives de températures très élevées et très basses dont les limites sont en dehors de celles ci-dessus posées.

Voilà tout ce qu'on peut dire de scientifique sur la vie à la surface lunaire. Même si vous admettez avec Fontenelle que les habitants se réfugient dans des puits très profonds où la température est moyenne, ce n'est pas de vivre dans des trous qui leur donnera de l'eau, et une atmosphère dont la pression ne soit pas celle de nos vides dits parfaits.

Mercure semble avoir une atmosphère. Étant beaucoup plus proche que nous du Soleil, la chaleur doit être intense sur la face exposée à ses rayons. Mais si l'on admet que Mercure présente toujours la même face au Soleil, la face à l'ombre doit être très froide. Peut-être existe-t-il une zone intermédiaire où les conditions de la vie sont réalisées. Tout de même si Mercure présente une libration sensible, ça ne doit pas être gai tous les jours d'y habiter.

Vénus a une atmosphère : des nuages abondants répartissent la chaleur solaire : les conditions de la vie semblent être réalisées.

De même pour Mars.

Quant à Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune, il se peut que ni Jupiter ni Saturne ne soient pas encore refroidis; si Uranus et Neptune sont refroidis, la température y doit être extrêmement basse.

Bref les conditions de la vie sont réalisées sur Vénus (et encore), sur la Terre et sur Mars; quant aux autres planètes, c'est plus que douteux.

Encore une fois rien ne vous empêche, si vous y tenez, d'imaginer des animaux satisfaits d'une température de 500 degrés centigrades, et de vous demander à nouveau sur quels astres ils peuvent vivre.

348. **Communications interstellaires des organismes vivants.** *1°* — Nous ne savons pas comment la vie a commencé. Les hypothèses de la création instantanée, de la génération spontanée sont également difficiles à concevoir et impossibles à démontrer : chacun choisit celle qui lui plaît : la science n'a rien à voir là-dedans. Mais un autre problème se pose tout différent : *la vie ayant commencé pour une raison quelconque sur un astre, peut-on concevoir un procédé qui la transmette de cet astre sur un autre?* Le problème est analogue à celui que posent les zoologues : *comment tel animal qui apparaît d'abord en tel lieu, a-t-il pu se propager jusque dans telle île?*

2° — Les uns résolvent le problème en admettant que la transmission est possible par des chocs. Voici comment s'exprime lord Kelvin : « Si notre Terre, dans son état actuel, avec son revêtement de végétation, venait à rencontrer un corps à peu près de même importance, un grand nombre de fragments, grands et petits, porteurs de semences, de plantes vivantes, d'animaux, seraient sans aucun doute dispersés dans l'espace. Comme il a sûrement existé, depuis des temps infinis, des mondes porteurs d'êtres vivants, nous devons considérer comme probable qu'il existe une infinité de pierres météoriques, chargées de germes, errant dans l'espace. Or, s'il n'existait sur la Terre aucune forme de vie, un semblable météorite, s'il tombait à la surface, pourrait y développer la vie. »

A cela on répond que les météorites deviennent incandescents en tombant; toute semence y perd sa puissance germinative.

Au reste les météorites sont constitués autrement que ne le serait un fragment de la croûte d'une planète analogue à la Terre.

3° — Arrhénius étudie le rôle que pourrait jouer la *pression de radiation* (§ 269). Les corpuscules sont repoussés par la lumière. La question est donc de savoir s'il existe des germes vivants assez ténus pour que cette pression l'emporte sur la pesanteur, et si un tel microorganisme dont le diamètre devrait être de beaucoup inférieur à un micron, peut être arraché de la Terre et chassé dans l'espace par la force répulsive du Soleil.

Je ne fais que signaler le problème. Les germes ainsi lancés seront exposés à un froid intense : pourront-ils le supporter? Ils n'arriveront à destination qu'après des milliers d'années : pourront-ils assez longtemps conserver leur vitalité? Leurs dessiccation dans le vide absolu sera évidemment parfaite : n'en mourront-ils pas? etc. Le mystère reste entier; toutes les expériences *in vitro* ne prouvent pas grand'chose pour ou contre une thèse intéressante, mais indémontrable, comme tout ce qui se rapporte à la Cosmogonie.

349. **Communications télégraphiques interplanétaires. Mars et ses canaux.**

1° — Je suis bien obligé de dire quelques mots de ce singulier problème qui agite tant de cervelles.

Posons qu'il existe dans Mars des êtres pensants : nous savons que les climats de cette planète ne doivent pas différer énormément des climats terrestres. Admettons d'autre part qu'il prenne aux habitants de Mars l'étrange fantaisie de communiquer avec nous. Par hypothèse ils sont à peu près au même stage de civilisation; ils possèdent des appareils scientifiques analogues et de puissance comparable. Un procédé de correspondance s'offre à eux : écrire sur la surface de leur planète en caractères assez grands pour qu'ils soient visibles de la nôtre.

Corrélativement si nous remarquons des variations systématiques dans les taches superficielles de Mars, nous pourrons nous demander si elles ne sont pas artificielles et, dans l'affirmative, nous pourrons essayer de les déchiffrer comme des hiéroglyphes.

2° — Tout cet échafaudage repose donc sur deux questions préjudicielles : l'aspect de la planète varie-t-il? les modifications supposées réelles sont-elles artificielles?

On n'a pas même la réponse à la première; les astronomes discutent encore si les modifications observées à la surface sont réelles ou sont dues aux irrégularités de la formation d'images très agrandies par des instruments nécessairement imparfaits.

APPENDICE II

LES PRINCIPAUX PHÉNOMÈNES ASTRONOMIQUES VUS DU POLE NORD

L'idée de ces quelques pages m'est venue en lisant la *Découverte du Pôle Nord* de Peary. Je ne crois pas que dans un avenir prochain on installe un Observatoire au Pôle Nord, pas même au Pôle Sud pour lequel les difficultés sont moindres. Mais c'est un exercice éminemment profitable pour l'étudiant de se représenter les phénomènes astronomiques vus du pôle.

350. **Étoiles.**

Comme appareil d'observation nous supposerons l'emploi d'un *théodolite* qui est en même temps une *lunette parallactique*.

Le ciel étoilé (ciel des fixes) fait un tour en vingt-quatre heures sidérales autour de l'axe du monde jouant le rôle de verticale. Les étoiles sont définies par leur déclinaison qui devient leur hauteur au-dessus de l'horizon. Nous devons corriger les observations de la réfraction.

La *nutation* et la *précession* produisent une sorte de *libration* de l'hémisphère visible. Au bout de 26 000 ans l'observateur aura vu toutes les étoiles visibles du pôle.

351. **Soleil.**

L'année tropique se compose d'un jour et d'une nuit.

Le point vernal γ est le point de l'équateur pour lequel le centre du Soleil passe dans notre horizon vrai (horizon corrigé de la réfraction).

Le temps moyen perd une bonne part de son utilité, à moins qu'on n'attache un grand intérêt à savoir de quel côté se font les ombres.

Le jour de temps moyen est (comme pour une latitude quelconque) le temps que le Soleil met *en moyenne* à faire un tour en angle horaire, ou en azimut, comme on voudra.

Le cadran solaire le plus simple est horizontal : son style est vertical.

A partir du point vernal et pendant 91 jours environ, le Soleil décrit dans le ciel une spirale montante dont les spires se resserrent de plus en plus : il en arrive à décrire un parallèle de 23° environ de hauteur. Après quoi, pendant 91 jours, il décrit une spirale descendante dont les spires s'écartent de plus en plus.

Son centre parvient sur l'horizon vrai en un point du ciel diamétralement opposé au point γ (à 25″ d'arc près).

Avant que le Soleil soit visible, après qu'il a cessé de l'être, existent une aurore et un crépuscule de longue durée.

Quelques jours avant de paraître, ou après avoir disparu, le Soleil éclaire encore les hautes portions de l'atmosphère.

« Pendant cette marche (3 mars 1909, par 83°30′ environ), nous vîmes filer par-dessus le sommet des grandes montagnes, encore visibles au sud, un trait flambant de lumière jaune qui s'étendait jusqu'à mi-chemin du zénith.... Le 5 mars, pendant quelques instants vers midi, le Soleil se montra sur l'horizon méridional : on eût dit un gros globe jaune.... »

Mais Peary n'est pas encore au pôle; il voit donc le Soleil bien avant l'équinoxe. N'oublions pas au surplus que le *bord supérieur* du Soleil dépasse l'horizon vrai, *a fortiori* l'horizon apparent, avant l'équinoxe du printemps. Le bord supérieur est dans l'horizon vrai quand la déclinaison du centre est — 16′ environ, ce qui arrive environ seize heures avant que le centre soit dans l'horizon.

Si nous admettons 36′ pour la réfraction horizontale, le bord supérieur du Soleil apparaît quand la déclinaison est — 52′, soit cinquante-deux heures environ avant l'équinoxe vrai du printemps. Il disparaît cinquante-deux heures après l'équinoxe vrai d'automne.

352. **Lune.**

C'est pour la Lune que les phénomènes sont le plus curieux.

Pour les bien comprendre considérons le Soleil au voisinage de quatre positions types.

a) Solstice d'hiver.

La Lune apparaît au voisinage du point vernal : elle est dans un *premier quartier*. La droite de symétrie fait avec l'horizon un angle *i* voisin de 23°.

En sept jours environ la Lune décrit une spirale sphérique montante dont les spires se resserrent; peu à peu la Lune devient *pleine*. Elle l'est complètement lorsqu'elle décrit le parallèle limite supérieur.

Après quoi elle décrit une spirale descendante (dont les spires s'écartent), pour disparaître au voisinage de son *dernier quartier*, en un point à peu près diamétralement opposé au point d'apparition.

Elle demeure cachée pendant treize jours environ.

Je lis dans Peary : « Chaque mois, pendant les périodes de Lune,

alors que notre satellite, pour quelque dix ou douze jours, semble voyager en cercle dans les cieux, comme le fait le Soleil au cours de l'été [faiblard comme description astronomique], les plus jeunes membres de l'expédition furent presque toujours en chasse. Mais une fois revenues les périodes de ténèbres absolues [et les étoiles?] la plupart d'entre nous restaient ensemble à bord du navire, car on ne chasse en hiver que par clair de Lune. »

b) Équinoxe de printemps.

Quand la Lune apparaît sur l'horizon, elle est presque *en conjonction nouvelle*), puisque sa trajectoire coupe l'équateur au voisinage du point vernal, où que soit la ligne des nœuds dans l'écliptique (§ 298). Il est entendu qu'elle décrit en quatorze jours environ sa double spirale montante puis descendante. Au bout de sept jours, elle est dans son *premier quartier*; elle disparaît *en opposition*, par conséquent *pleine*.

Peary se trouve le 2 avril, par 88° 30′ environ de latitude boréale. « Tandis que nous marchions, la Lune n'avait cessé de tourner autour des cieux, à l'opposé du Soleil, comme un disque d'argent en face d'un disque d'or; et, quand on regardait sa face pâle et spectrale dont la lumière plus brillante du Soleil avait ôté la couleur, il était difficile de s'imaginer qu'elle pouvait agir sur les vastes champs de glace environnants. »

Peary précise que la *pleine lune* approchait ; donc la Lune n'était pas encore tout à fait pleine, ce qui correspond à notre analyse.

c) Solstice d'été.

La Lune apparaît sur l'horizon en son *dernier quartier*, à 90° du Soleil, à la droite de celui-ci.

Elle décrit son hélice montante tout en se rapprochant du Soleil et tandis que diminue son croissant. Au bout de sept jours elle est nouvelle. Elle décrit son hélice descendante, en s'éloignant du Soleil qu'elle laisse à la droite. Elle se couche dans son premier quartier.

d) Équinoxe d'automne.

La Lune se lève *en opposition* (*pleine*). Au bout de sept jours, sa hauteur devient maxima : elle est dans son *dernier quartier*. Au bout de sept jours encore, elle se couche *en conjonction* (*nouvelle*).

Le cycle des apparences fondamentales est révolu.

353. Repérage en longitude des points de l'horizon. Longitude d'un point voisin du pôle.

1° — Je suppose que mon observateur allant au pôle a transporté un chronomètre réglé, donnant l'heure du méridien de Paris, ou qu'il reçoit cette heure par T. S. F. Il lui suffit de déterminer l'heure à laquelle il observe une étoile pour savoir immédiatement la longitude du plan vertical dans lequel se trouve l'axe optique de la lunette de son théodolite. Connaissant l'heure de temps moyen de Paris, il connaît

l'angle horaire du point vernal, par conséquent celui de l'étoile. Or au pôle les azimuts se confondent avec les angles horaires.

Notre observateur peut donc disposer à distance convenable de son observatoire une mire indiquant, par exemple, le méridien de Paris.

2° — Le problème de la longitude d'un point voisin du pôle est tout différent et mal déterminé. En effet la connaissance de la longitude implique celle du méridien; celui-ci est le plan de symétrie de la trajectoire des étoiles. Or à mesure qu'on s'approche du pôle, tous les verticaux tendent à devenir ce plan de symétrie.

En d'autres termes les directions de la verticale et de l'axe du monde tendent à se confondre.

Il est vrai que la détermination *exacte* de la longitude perd pratiquement son importance, puisqu'une erreur *en angle* sur la longitude correspond à une erreur de plus en plus petite *en distance linéaire* sur le parallèle. Par exemple, à 80° de latitude, le degré de longitude ne vaut plus que 19,4 kilomètres.

Je ne continue pas cette étude. Le lecteur cherchera ce que devient le calcul des distances lunaires, des occultations,... pour l'observateur polaire.

APPENDICE III

FORMULES USUELLES DE TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE

Les Astronomies consacrent généralement un long chapitre à la Trigonométrie sphérique, alors qu'on utilise quatre malheureuses formules dont l'établissement est immédiat. En écrivant ce volume j'ai dû faire une multitude de calculs; je n'ai jamais ouvert une table de logarithmes. Je me suis servi d'une table de lignes naturelles, et d'une table des carrés, cubes, racines carrées et cubiques, inverses. Évidemment les astronomes ont raison à leur point de vue de développer les formules qu'ils emploient, je ne discute pas ce qu'ils font. Je me contente de déclarer qu'à mon point de vue fixé par la Préface, il serait stupide de les imiter.

Ceci dit, voici l'établissement des formules que j'utilise.

Un théorème élémentaire sur les triangles sphériques polaires fournit la proposition suivante : Toute relation démontrée entre les angles et les côtés d'un triangle sphérique quelconque, subsiste quand on y remplace les angles par les suppléments des côtés, et les côtés par les suppléments des angles.

Il ramène l'établissement des formules à des propositions d'usage continuel. Il s'agit ici non pas de faire un cours de trigonométrie, mais de rappeler au lecteur des résultats utiles.

354. Relation fondamentale.

Voici la relation de beaucoup la plus employée :

$$\cos a = \cos b \,.\, \cos c + \sin a \,.\, \sin c \,.\, \cos A. \qquad \text{(I)}$$

Prenons trois axes rectangulaires; disposons le triangle ABC comm l'indique la figure 270.

Les coordonnées des points C et B sont :

pour C $\quad x = \sin b, \quad y = 0, \quad z = \cos b;$

pour B $\quad x' = \sin c \,.\, \cos A, \quad y' = \sin c \,.\, \sin A, \quad z' = \cos c.$

Un théorème classique donne l'angle des droites OC et OB :

$$\cos a = xx' + yy' + zz'.$$

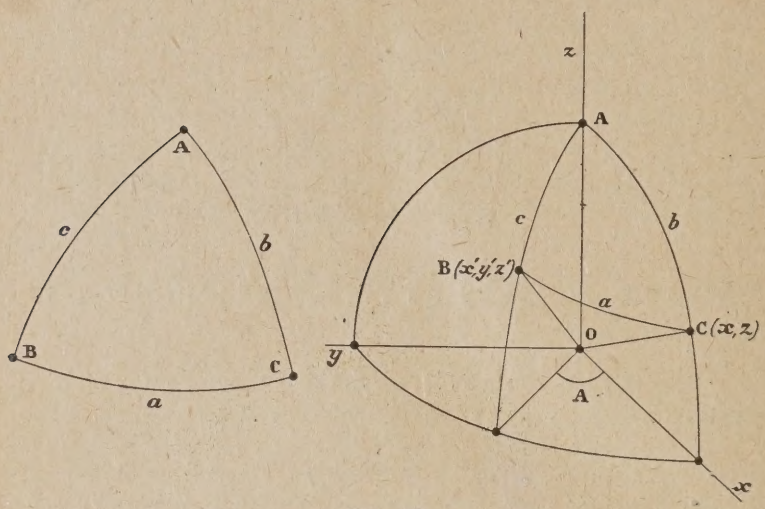
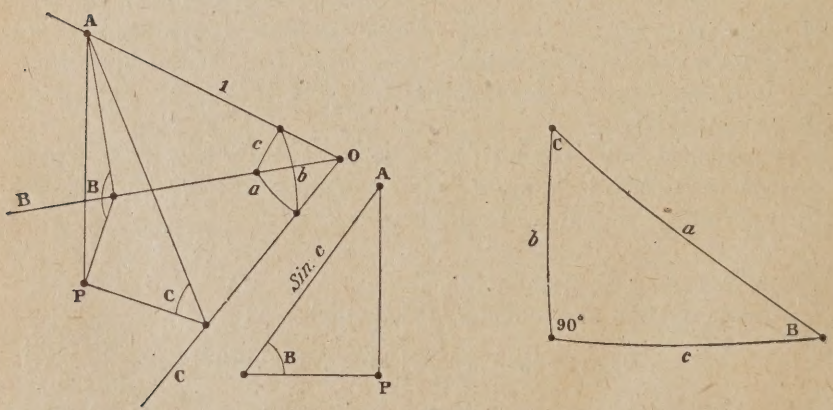


Fig. 270.

Substituons les valeurs des coordonnées; nous retrouvons la formule (I).

Appliquons au triangle polaire :

$$\cos A = -\cos B \cdot \cos C + \sin B \cdot \sin C \cdot \cos a. \qquad \text{(II)}$$



Fig, 271.

335. **Propriété des sinus.**

C'est la traduction analytique du théorème des trois perpendiculaires.

Du point A abaissons sur la face a la perpendiculaire AP.

Évaluons sa longueur.

Pour cela par AP faisons passer deux plans normaux à B et à C
La longueur OA étant 1 par convention, on a :

$$\overline{AP} = \sin c \,.\, \sin B = \sin b \,.\, \sin C.$$

D'où la relation :

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}. \qquad \text{(III)}$$

356. **Projections des aires.**
Projetons le triangle OBC sur le plan xOz (fig. 270).
Le double de l'aire du triangle OBC est $\sin a$.
La projection sur xOz de cette aire doublée est donc :

$$\sin a \,.\, \cos C.$$

Or on sait qu'elle a pour autre expression :

$$xz' - zx'.$$

Substituons les valeurs des coordonnées; nous obtenons la relation :

$$\sin a \,.\, \cos C = \sin b \,.\, \cos c - \cos b \,.\, \sin c \,.\, \cos A, \qquad \text{(IV)}$$

et par analogie :

$$\sin a \,.\, \cos B = \sin c \,.\, \cos b - \cos c \,.\, \sin b \,.\, \cos A. \qquad \text{(IV)}$$

Les propriétés des triangles polaires fournissent les formules :

$$\sin A \,.\, \cos b = \sin C \,.\, \cos B + \cos C \,.\, \sin B \,.\, \cos a. \qquad \text{(V)}$$

et par analogie :

$$\sin A \,.\, \cos c = \sin B \,.\, \cos C + \sin C \,.\, \cos B \,.\, \cos a. \qquad \text{(V)}$$

357. **Autres relations.**
Nous avons les formules.

$$\sin a \,.\, \cos B = \sin c \,.\, \cos b - \cos c \,.\, \sin b \,.\, \cos A,$$
$$\sin a \,.\, \sin B = \sin b \sin A.$$

Divisons membre à membre. Il vient :

$$\sin A \operatorname{cotg} B = \sin c \,.\, \operatorname{cotg} b - \cos c \,.\, \cos A.$$

Nous écrivons cette formule (*mutatis mutandis*) :

$$\operatorname{cotg} a \,.\, \sin b = \cos b \,.\, \cos C + \sin C \,.\, \operatorname{cotg} A, \qquad \text{(V)}$$

et par analogie :

$$\operatorname{cotg} a \,.\, \sin c = \cos c \,.\, \cos B + \sin B \,.\, \operatorname{cotg} A. \qquad \text{(V)}$$

358. Triangles rectangles.

En faisant $A = \pi : 2$ dans les relations précédentes, on trouve les formules (fig. 271) :

$$\cos a = \cos b \,.\, \cos c, \qquad \cos a = \operatorname{cotg} B \,.\, \operatorname{cotg} C,$$
$$\sin b = \sin a \,.\, \sin B, \qquad \sin c = \sin a \,.\, \sin C,$$
$$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a \,.\, \cos C, \qquad \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \,.\, \cos B,$$
$$\operatorname{tg} b = \sin c \,.\, \operatorname{tg} B, \qquad \operatorname{tg} c = \sin b \,.\, \operatorname{tg} C,$$
$$\cos B = \sin C \,.\, \cos b, \qquad \cos C = \sin B \cos c.$$

TABLE ALPHABÉTIQUE DES MATIÈRES

Les numéros des renvois sont ceux des paragraphes.

A

Aberrration : annuelle 30, 31 (phénomènes), 32; — constante 32, 36; — diurne 36; — voy. Ellipse; — du Soleil 33; — totale 36 *ter* (planètes); — 3, 27; — 29; — 221, 243.

Absorption atmosphérique 324; — règle de Mayer 325, 327.

Accélérations : absolue 166; — dues à : l'action solaire 168 (surfaces des planètes), 169; planète sur satellite, 169; — d'entraînement 166; — des moyens mouvements 187; — relative 166; — séculaire 286 (tropique, sidérale), 288 (sidérale); — tangentielle 293.

Adams : 211, 213, 288.

Aérolithes : voy. Bolides.

Aigrettes 159.

Air et Terre 5 (mouvement).

Aires : balayées 114; théorème 172, 175, 261; — voy. Loi; — maximum 172; — prise dans cercle 84; — projections 356.

Airy : 213, 288.

Albedo : 197, 208.

Alembert (d') : 36 *bis*, 262 (méthode), 294.

Algol (β Persée) : 72 (type), 75.

Alignements : 1, 11.

Altazimut 12.

Amplitudes 104 (azimutale, occase, ortive).

André 70.

Andromède : 21 (α), 28 (γ).

Andromédides 268.

Angles : conversion (exprimés) en temps 14, 131, 138, 301; — d'élongation 180, 232; — horaire 12 (sens rétrograde), 13 (lever et coucher des étoiles), 16; 131 (variation); 133 (d'un astre : valeur à midi moyen), 138, 142; apparent 143, 238 (vers le couchant); 234, 305 (actuel); — origine 42; — parallactique 115; — de position 12, 18, 66 (mesure), 152 (d'un point); — semi-diurne 13, 157; — variant 85 (proportionnellement au temps).

Anneau : d'astéroïdes 207, 208 (masse); — invisible 201; — de Saturne 228, 229 (invisibilité), 230 (observation de Maraldi), 231 (obliquité), 279 (structure).

Années : abondantes 307; — anomalistique 292; — arabe 148, 307; — astronomique 26; — bissextilles 122, 145, 147; — caniculaire 126; — communes 122, 145; centenaires 147, 149; 307; — conventionnelle 191; — cynique 126; — demi 116 (anomalistique); — des Égyptiens 126, 146; — grecques 148 (ancienne), 308; — voy. Jours; — julienne 124, 184, 187, 216; — lunaires 307; — lunisolaires 148, 307, 308; — moyenne 260; — nombre 121 (entier); — sidérale 126 (définition; détermination peu précise), 146, 187 (à peu près invariable), 203 (moyenne); durées 245 (Terre et Vénus), 261 (moyenne); — synodique 245 moyenne); — tropique 121 (valeur moyenne; et jour moyen); détermination 123 (procédé vulgaire), 124 (vraie, moyenne : méthode précise); moyenne (diminution), 125 (plus exactement moyenne), 187; 127 (intervenant), 145, 146, 184 (terrestre : durée), 307 (et mois lunaire), 351 (au pôle nord); — vague 146 (civile des Égyptiens).

Anomalies : excentrique 84, 85 (bissection pour la Terre), 90, 262; — moyenne 84, 89, 90, 194, 262; — signification 84; — vraie 84, 88,., 90, 194, 262, 265, 289 (variations), 291; — 33, 70, 182, 283.

Antiapex : 62, 277.

Antipodes : 103 (définition; — verticales : même direction).

Antisoleil : 320, 326; — trajectoire 332, 336.

Apex : 62, 270 (définition).

Aphélie : définition 89, 177; — terrestre 89 (apogée solaire).
Apogée : 33, 108; — solaire 89 (aphélie terrestre).
Appareil : voy. Lœvy.
Approximations nécessaires 295 (aujourd'hui).
Appulse : 340, 341.
Apsides : 33; — ligne 89; détermination 91 (La Caille), 116 (rotation); — position 116.
Arago : 8, 36 *bis*, 213, 304 *bis*, 324.
Archimède 168.
Argelander 57 (catalogue).
Aristarque 242 (méthode).
Aristote 4.
Armilles : voy. Cercles armillaires.
Arrhénius 348.
Art de vérifier les dates (L') : 148, 339.
Ascension droite : 11 (*Ascensio recta*) 17; — variations 21, 62 (séculaires); — 37,., 39 (correction), 44 (et flexions), 132 (moyenne : Soleil), 182 (détermination), 238 (utilisation); voy. Lune.
Astéroïdes : anneau 207, 208 (masse).
Astres : voy. Angle horaire; — attirés 164 (par le même centre fixe); — attraction 165; — chevelu 263; — choc 315; — coordonnées 16 (géographiques); — coucher 4; — dans le méridien 235; — errants 1, 47 (étude précise); — fictif 128; — fixes 1, 4 (ciel); — hauteur 133 (à un instant donné); — hypothétique 208 (couvert de noir de fumée); — lever 4; — moyen 186, 287 (en longitude); — ovoïdes 73; — perturbateur 258, 260 (effet moyen), 294; — positions 27 (apparente, réelle), 29 (apparente vraie; vraie; apparente); — poussière 279 (tournant planétairement autour du Soleil); — et réfraction 27; — repérage 9 (moyens); — vrai 186.
Astronomie : de l'invisible 71; — se perfectionnant 17; — au pôle nord, App. II, 351,., 353.
Atmosphère : ensemble 27; — hauteur 107 *bis*; — rayon polaire 279; — rayons diffusés ou réfractés 329; — voy. Soleil.
Aube 107.
Aurore : 4; — 107; — 351 (au pôle nord).
Auwers 57 (catalogue).
Axes : voy. Coniques; — direction 150 (quasiment invariable); — fixes 2 (trois); — géométrique de révolution 2, 150; — grands 261 (aucune inégalité séculaire); — instantané de rotation 2, 25 (de la terre), 150; — du monde 4 (essieu), 6, 50, 138 (tige parallèle : ombre); — optique : voy. Lunette; — retournement 37; — de rotation : voy. Lunette méridienne; — voy. Terre.
Azimut : 10, 12 (définition, sens), 13 (lever et coucher des étoiles), 13 *bis* (maximum), voy. Erreur.

B

Babinet 53 (compensateur).
Baily 288.
Bain nadiral 42 (de mercure : horizon artificiel).
Balance 279.
Baleine : 21 (α), 72 (o).
Banderolles 159.
Barker 93 (tables).
Battements isochrones 45.
Bélier : 18, 26 (β), 278, 280.
Bernoulli (Jean) 107 *bis* (crépuscule : durée).
Bertrand : 211, 213.
Bessel : 39 (formule), 57 (catalogue), 63 (emploi de l'héliomètre), 71, 211, 336 (éléments).
Biéla 268 (comète).
Billet 53 (compensateur).
Bode (Titius) : loi 188, 207, 212, 344.
Bolides et aérolithes 276, 277.
Bouguer : rayons courbes 28; — voyage au Pérou 3 (*Relation*).
Bouillaud 218.
Bouvard 211.
Bradley : 34, 57 (catalogue), 221, 243.
Bravais 53 (compensateur).
Brédéchine : 269, 275.
Brosses (Président de) 98 *bis*.
Brune 107.
Bureau des longitudes : annuaire 70, 106, 107, 134 (temps civil), 142, 149, 301, 306, 309, 340; — calculs 113; — nombres 203, 204; — tables 27; — 194, 234.

C

Cadrans solaires : 138,.—., 144; — cylindrique 144 (par les hauteurs); — déclinant 141; — définition 138; — équatoriaux (ou équinoxiaux) 138, 139; — horizontaux 99, 140, 142; — importance 141 (pédagogique); — indications 143 (précision); — irrégulier 141; — longueur des ombres 139 (cas général); — méridional, occidental, oriental, 141; — polaires 138, 139; — septentrional 141; — simple 351 (au pôle nord); — verticaux 141, 142.
Calendes 145.
Calendriers : 145,..., 149; — confection 307 (difficulté); — ecclésiastiques 149; — égyptiens, grecs, 148; — grégorien 124, 147; — julien 124; 145; 146 (inconvénients); — perpétuels 149; — romain 148; — types 149 (14).
Cancer : 26, 102 (signe; tropique).
Canicule 126.

Capricorne : 102 (signe; tropique), 279 (constellation).
Carte : voy. Ciel.
Cassini : I, 98 *bis* (gnomon de l'église Saint-Pétrone de Bologne), 218, 219, 230, 248; — II, 118, 122, 124 (année tropique moyenne); — 28, 123 (année tropique : valeur), 125, 185, 194, 203,.., 206, 228 (division); lumière zodiacale 278, 279; 284, 287 (époque), 338 (méthode).
Centaure (α) : 63, 66, 70.
Causes finales 343.
Cercles : armillaires 127, 138; — de déclinaison 107 *bis*; — divisé 37 (lecture); — équatorial solaire 156; — horaire 11; — méridien 79 (mesure de la longitude), 182; — parallèle 36 (à l'équateur); — petits 6 (de la sphère céleste); — polaires 101; — projection orthogonale 224; — tropiques 102, 237.
Challis 213.
Chariot 11.
Chercheur 58.
Chevelure : voy. Comètes, Soleil.
Chien : Grand, Petit, 71 (α).
Christophe Colomb 98.
Chromosphère 159.
Chronographe : à bande 80; — emploi 80, 240.
Chronomètre : 78 (emploi), 187 (retardant).
Ciel : Carte, *Réunions du Comité* 55, 59; 58, 60 (clichés : réduction); — changements 47; — des fixes 4, 350; — photographie 50, 58.
Clairaut : méthode 253, 262; — 294.
Clichés : idéal 60; — orientation 249 (repérage); — photographiques (réduction); réel, 60; — voy. Tâches.
Coïncidences : voy. Méthode.
Colatitude 16.
Collimateurs : deux 44 (pointés l'un sur l'autre).
Collimation : voy. Erreur, Fil.
Collodion 249 (proscrit).
Colure : des équinoxes 18, 111 (définition); — des solstices 18, 111 (définition, détermination), 119 (rotation), 278.
Comètes : 263,.—., 269; — action du Soleil 269; — voy. Biéla; — de 109 jours 93; — chevelure 263; — à courte période 267, 268; — débris 269; — voy. Encke, Halley; — mouvement 265 (direct, rétrograde); — nature, noyau, 263; — origine 264; — périodiques 264; 267, 268; — voy. Planètes; — queues 263, 269 (normales); — rôle 277; — signification du mot 263 (astre chevelu); — voy. Tempel, Tuttle; — au voisinage du périhélie 269, 275.
Commission du passage de Vénus 249.
Communications : interstellaires 348 (des organismes vivants); — télégraphique 349 (interplanétaires).
Compagnon : 66, 70 (masse), 71 (invisible : existence), 72 (trajectoire).
Configurations des satellites 226 (de Jupiter).
Coniques : équations polaires et différentielles 83; — grand axe (grandeur), nature, 163.
Conjonction : 31, 179 (définition; inférieure, supérieure), 191 (infér., supér.), 245 (Terre et Vénus); — Lune 302,., 304 (par définition), 352, (nouvelle); — 331 Soleil).
Connaissance des Temps : 19, 23, 27, 28, 89, 100, 110, 111, 113, 117, 122, 124, 125, 127, 129, 131 (tables : Soleil moyen et S. vrai); — temps sidéral à midi moyen 133, 305; — 134 (temps astronomique), 142 (temps vrai à midi moyen), 186, 187, 192, 194, 217, 218, 221, 226, 284,., 286, 297, 299, 325, 333.
Constantes : de la gravitation 160; — variables 251 (paramètres variables).
Constellations : dénominations 1; — signes 26 (décalage); — au voisinage du pôle 22 (actuel); — zodiacales 26.
Conventions horaires : 134,.., 137.
Coordonnées : cartésiennes 19, 153; — écliptiques 12, 17; géocentriques 18, 30 (influence du mouv. annuel de la Terre), 178 (calcul : planètes), 182 (transformation en coord. hélioc.), 266, 280; 19, 153 (centre d'une tache solaire); — équatoriales 11 (célestes), 12 (locales), 19; variation 20, 21, 23, 36, 280; 35 (influence du déplacement annuel de la Terre), 50 (réalisation), 234 (vraies, apparentes); — expressions 294 (littérales); — géocentriques 18, 30 (apparentes; vraies du Soleil), 266; — géographiques 16; — héliocentriques 18, 30, 152 (détermination : erreurs), 153, 182, 266; — horizontales 10, 12; — moyennes 21 (équatoriales : variation); — polaires 182; — précision 59 (observations photographiques); — rectilignes 19; — voy. Soleil; — sphériques 153, 178; — variations 30 (calcul).
Copernic : 5, 330.
Cornes : voy. Ligne; — 303, 304, 305 *bis* (disposition).
Cornu : 59, 249.
Corps : quatre 294; — trois (problème) 262, 294, 296 (solution); — troublant 201.
Corpuscules invisibles 201.
Correction : déterminée 80 (dans les limites où elle est déterminable); — du midi 99 *bis*.
Coucher : voy. Étoiles; — héliaque 97, 133; — voy. Lune, Soleil.

Coulvier-Gravier 271 (lois).
Courants : filiforme 268, 272, 275 (formation); — matériel 272; — météoriques 275.
Courbes : des lieux où l'éclipse commence et finit à une heure *t* 338; — de simple contact 335 (limites); — terminales 338 (détermination); — voy. Terminateur.
Couronne 159.
Crépuscule : 4; — 107; — 107 *bis* (les plus longs et les plus courts), 351 (au pôle nord).
Croissant : d'un astre 202 (largeur); — Lune 303, 304 (visibilité).
Culmination 10.
Cycles : arabe 307; — lunisolaires 323 (multiplicité); — de Méton 308; — solaire 149.
Cygne 63 (61).

D

Daguerréotypie 249 (sur glace argentée).
Damoiseau 294.
Déclin : 304, 304 *bis*.
Déclinaison : apparentes 235 (différences); — détermination 182; — différence 50 (petite : détermination), 237 (connue); — voy. Lune; — solaire 98, 109 (maximum), 123 (définissant l'année), 147 (au voisinage de l'équinoxe : midi moyen de Paris), 306 (solstice d'été); — variations 21, 62 (séculaires), 104 (diurne); — 11, 16, 17, 37, 38, 234.
Décours 304.
Delambre : 245, 246, 248, 249.
Delaunay : 213, 288, 294, 295.
Denys le Petit : 148.
Déplacements : angulaires 3 (petits appréciables); voy. Soleil, Terre.
Desains 40.
Descartes : 28, 210.
Diamètre : apparent (voy. Lune, Planètes, Soleil, Vénus), 233 (demi), 325 (de la section du cône d'ombre terrestre à l'endroit où la Lune le traverse); — équatorial 232 (terrestre); — mesure 208 (directe); — solaire 249.
Différence ascensionnelle : 13, 157.
Diffraction : 8, 54 (phénomènes).
Directions : apparente 273; — données 266; — fixe 1, 2; — invariable 228; — la même 44.
Disque : éclat 198, 223 (uniforme); — de la Lune 310; — plat 198, 200; — solaire 28 (apparence), 113 (forme, dimensions), 115 (temps de passage sur les fils d'une lunette), 155 (orientation suivant l'heure), 158 (image réelle), 248 (mal défini), 249 (lumineux sur fond obscur); — de Vénus 249 (obscur sur fond lumineux).
Distances : en Astronomie 232, —, 249; — cube 253 (inverse : développement en série); — mesure 232 (difficulté en Astronomie); — périhélie 83; — voy. Planètes; — polaire 38; — problème 232 (position); — solaires 115 (valeurs relatives); — au Soleil 182, 266 (choisie arbitrairement); — du Soleil à la Terre 112, 152; — voy. Terre; — zénithale 12, 102 (du Soleil : à midi), 233 (et parallaxe), 235 (mesure); — 88.
Distorsion 59.
Division de Cassini 228.
Doigts : 323, 327 (définition), 333.
Döppler : 65, 158.
Dragon : 34 (étoiles 36, γ), 339 (tête, queue).
Droites : demi 108; — direction 191 (variation); — de hauteur 16; — horaires 143; — position 191; — de symétrie 304, 305 (Lune).
Duhamel 221.

E

Eclats : comparaison 208; — voy. Disque; — distribution 200 (phase ronde); — voy. Étoiles, Lune, Lyre; — maximum 198 (périodicité); — voy. Sphère, Vénus.
Eclipses : 319, —, 342; — calcul 319 (travail préliminaire), 327, 336, 342 (analogue); — chronologie 339; — généralités 319, 331; — de Lune 218; 319, 320 (période moyenne, nombre, probabilités, avance moyenne); tableaux 321, 322; 323 (saros, cycle), 324 (ombre, pénombre, réfraction atmosphérique), 325 (diamètre apparent de la section du cône d'ombre terrestre à l'endroit où la Lune le traverse), 326 (trajectoire relative de la Lune), 327 (calcul, partie éclipsée, immersion, émersion), 328 (possibilité), 329 (particularités), 330 (parallaxe solaire : méth. d'Hipparque); — des satellites de Jupiter 217, 218, 220, 222 (durée approximative), 223 (détermination photométrique), 225 (variation des durées d'immersion); — de Soleil 288 (totales), 319 (générale; deux problèmes); tableaux 321, 322; 331 (totale, annulaire, nombre), 332 (trajectoire de l'ombre du centre de la Lune sur le disque terrestre; éclip. générale, totale, annulaire, partielle; durée maxima), 333 (points où l'éclipse est partielle; éclip. totales, annulaires), 334 (schématique : étude), 335 (description : éclip. ann.), 336 (éléments de Bessel), 337 (trajectoires rectilignes : obtention des équations), 338 (méth. de Cassini), 339 (importance chronologique et astronomique); — de Terre 319 (vue de la Lune).

Ecliptique : 26; — angle 305 (avec le méridien du lieu); — déplacement 119 (cause); — inclinaison 109 (sur l'équateur); — invariable 20; — obliquité 99 (détermination par les anciens), 118, 128 (résultat); — plan 2, 5, 17 (définition), 109, 111 (position), 177; — pôle 2, 22 26, 118 (pas fixe), 119, 156 (austral, boréal); — variation 118.
Ecrevisse 201 (θ et ζ).
Eiffel : voy. Tour.
Eléments : géocentriques, héliocentrique (relatifs), 246.
Ellipses : d'aberration 31, 63; — déformée s 157, 250; — équations, excentricité, 8 3; — au mieux 66; — osculatrice 231 (à la trajectoire réelle); — de parallaxe 34, 63; — paramètre 83, 262; — série 157 (arcs); — troublée 253, 262.
Ellipsoïde : d'inertie 150; — de révolution 233 (aplati).
Elongations maxima 189 (planètes inf.).
Emersions : 217, 327, 340.
Encke : 248, 267 (comète).
Energies : cinétique (augmentation) potentielle (diminution), 170.
Epacte 309.
Epi (L') de la Vierge 280.
Epoque des moyens mouvements : 186, 287 (importance, valeur numérique).
Equateur : 5; — 6; — 16, 22 (pôle : déplacement), 25 (deux définitions), 109 (et étoiles), 118 (et écliptique).
Equations : ajoutée 186; — annuelle 260, 292, 293; — au centre 89, 185, 289, 293; — définition 89 (générale), 120; — deux 92 (transcendantes à deux inconnues : résolution); — (générales 171 (points en nombre quelconque : mouvement); — voy. Képler; — maxima, minima, 90; — personnelle 79 (des observateurs, des parleurs), 113 (incriminée); — polaires et différentielles des coniques 83; — possibilité 221; — de quinzaine 300; — du temps 128, 129 (cas simple), 130 (représentation : formule numérique à deux termes), 142 (à connaître); — transformation 176; — valeur 194.
Equatorial : 28 *bis*, 152 (utilisé).
Equinoxes : d'automne 26, 352; — voy. Colure; — date 146 (calendrier Julien), 147; — définition 122 (à chaque instant); — détermination 111; — étymologie 100; — fixe 116, 126, 274; — voy. Ligne; — mobile 116, 122, 284; — — voy. Précession; — du printemps 26, 111 (♈), 146, 186 (moyen), 352; — rétrogradation 126, 283; — voisinage 104, 147; — vrai 122 (du jour), 274; — 99, 105.
Eratosthène 118.
Eres ; chrétienne, de Dioclétien, Hégire, Julienne, des Martyrs, 148.
Eros 241.
Erreurs : accidentelles 48 (éliminées); — en angle 353; — d'azimut, de collimation (nulle), 38; — constante 249; — en distance linéaire 353; — due à la flexion 44; — évoquées 103 (par les mots été, automne, hiver, printemps); — d'inclinaison 38; — en latitude, en longitude, 266; — météorologiques 48; — moyennes 59; — probables 59, 240; — relatives 66 (énormes); — voy. Sol; — subsistant 120 (faible).
Espace absolu 2.
Essaims périodiques : 272, 275 (nombreux).
Ether et mouvement 170 (planètes, satellites).
Etoiles : 1,. —., 82; — angles horaires 133; — apparition 56 (soudaine); — australes 21, 28 *bis*, 31; — du Berger 197; — boréales 21, 31; — brillantes (les plus) 61; — caractérisation 1; — catalogues 47, 57 (définition; principaux), 58 (photographique); — champ 97 (déplacement du Soleil); — classes 55 (du P. Secchi); — classification 6 (trois groupes); et distribution 51,.—., 63; — circumpolaires 2, 28 *bis*, 43, 48; — colorées 74; — voy. Compagnon; — de comparaison 111, 122; — coucher 13; héliaque 97, 133; — couleurs 55; — désignation 1; — distance polaire 6; — distinction 1; — distribution (voy. classification); — doubles 56; 66; photométriques 72, 73; 75 (spectroscopiques), 166 (trajectoires); — éclat 51, 52, 56 (changements; — équatoriales 2, 3 (utilisation), 111, 122, 128; — filantes 268 (courant filiforme), 269 (pluies); 270,. —., 275; — fixe 116; — fixité 1; — fondamentales 1, 48 (choix), 49 (positions moyennes au 1er janvier 1915), 57 (catalogues), 133; — grandeurs 51 (définition et mesure), 52 (séries), 53 (photométrie), 54 (détermination), 55 (visuelle, photographique), 70 (et masse); — guides 4, 58; — hauteur 4; la même 43, 133; — image 50, 53 (disparaissant), 58 (quasi punctiformes; fausses), 59 (elliptiques), 60 (clichés photographiques); — invisible 54, 56 (devenue); — lever 13, 97 (héliaque), 133 (heure); — masses 70; — du Matin 197; — mouvements : propres 1, 3, 4; 64 (définition), 65; — nombre 61; — voy. Occultations, Orbites réelles, Parallaxes stellaires; — passage : dans l'horizon 36 *bis*; au méridien 13, 36 *bis*, 43, 133 (calcul); — phénomène 29; — photographie 58; — la plus proche 5; — et pôle nord 350; — positions : relatives 1, 47; 6 (représentation), 18, 28 *bis* (apparente, vraie), 29 (apparente vraie actuelle : direction; vraie; apparente), 36 *bis*, 48) moyennes

ét. fond.), 58 (détermination); — principale 66, 70 (masse); — de repère 60; — rotation 2; — simultanément dans un même vertical 133; — situation 3, 4; — du Soir 197; — spectres 55; — spectroscopiques 72, 75; — trajectoires apparentes 6, 28 *bis*; — visibilité 8 (pendant le jour), 54 (limite), 97 (durée); — visibles 61 (à l'œil nu); — vision 3, 54 (à travers une lunette diaphragmée); — voisines du pôle 23 (coord. équat. : variations).
Euler : 107 *bis* (méthode : durée du crépuscule), 291.
Evection 291, 293.
Excentricité : accroissement 257, 259; — détermination 115 (une méthode); — diminution 259; — de l'ellipse, de l'hyperbole, 83; — voy. Mars; — mesure 110 (peu précise); — de l'orbite 89 (terrestre), 112; — Saturne 194; — valeur 289; — variation 290.
Expériences : photométriques 208; — en physique 121.
Explications scientifiques 210 (nature).
Expressions : être en retard sur, retarder sur, 194.

F

Facules : 150, 151.
Fausse analogie 343.
Fechner 51 (loi).
Fêtes : mobiles 147 *bis*; — voy. Pâques; — religieuses 147 (concile de Nicée).
Figure de configuration déterminée 254.
Fils : deux 310 (parallèles mobiles); — horizontaux 46 (ou de déclinaison); — à plomb 9, 13 *bis*; — de réticule : croisée 28 *bis*, 41; 46, 310; — sans collimation 38; — valeurs en temps 46; — verticaux 46 (ou d'ascension droite), 50.
Firmament 36 *bis* (fixité).
Fizeau : 65, 158, 249.
Flammarion 107.
Flamsted 111 (méthode : colure des solstices).
Flexions : astronomique 44 (horizontale : mesure); — diminuées 37; — formule représentative, latérale, mécanique, verticale (ordinaire), 44.
Flora 241.
Fluide : mot 150 (sens).
Fonction perturbatrice : 176, 251 (calcul); — développement 262 (en série), 295 (général).
Fontenelle : 4, 5, 107 (*Pluralité des Mondes*), 210 (philosophie, philosophes, nature), 339 (éclipses), 343, 344, 346, 347.
Forces : accélératrice 257 (tangentielle); — attirante 160 (travail); — centrale 160, 162, 171; — centrifuge 5 (valeur); — normale 259 (à trajectoire); — perturbatrices 251 (admettant un potentiel), 252 (différence), 254; — radiale 260 (effet moyen); — tangentielle 257; — vives : théorème 173, 175.
Formules : demi-empiriques 294; — élémentatres 117; — empiriques 294; — exactes 128 (des astronomes); — voy. Gauss; — de transformation 182 (des coord. hélioc. en coord. géocentr.); — usuelles de trigonométrie sphérique, App. III 354,..., 358.
Fuseaux horaires 135.

G

Galilée : 78, 197, 216, 304 *bis*, 313.
Galle 213.
Garde-temps : 10, 78.
Gauss 86 (formule).
Gay-Lussac 28.
Gloire 159.
Gnomon : 98, 98 *bis* (célèbres); — emploi 99, 127; — 138 (différence avec cadran solaire), 142 (cadran horizontal).
Gnomonique (Traités de) 141.
Grand Chien : α (voy. Sirius).
Grande Ourse 11.
Grandeurs stellaires : voy. Étoiles.
Gravitation : voy. Constante; — universelle 160,.—., 176.
Greenwich : longitude (relative à Paris) 79, 80, 135; — méridien (origine) 130, 135.
Grégoire XIII 147.
Grilles 54.
Grimaldi 313.
Grossissement : 8, 248 (et pénétration).
Groupe optique 66.

H

Habitabilité des Mondes : 343,.—., 349; — communications 348 (interstellaires), 349 (télégraphiques interplanétaires); — conditions de vie 347 (êtres analogues à ceux que nous connaissons); — problème : manières de le poser 343 (absurdes), 344 (pittoresque), 345 (philosophique), 346 (sensée).
Halley : comète 267; — construction 198; — méthode (passage de Vénus sur le Soleil) 243, 247, 248 (résultats), 249.
Hansen : 39 (formule), 288 (tables).
Harrison 78.
Hauteurs : croissantes, décroissantes, 10; — définition 12; — égales : voy. Méthode; — voy. Étoiles; — au-dessus de l'horizon : voy. Étoiles, Pôle; — la même 42; — voy. Soleil.
Hégire : 148, 307 (origine).
Héliomètre : 63, 248, 310.
Hercule : 62 (π), 76 (τ).

Hérédia (de) 103.
Herschel : 52 (et son fils), 62, 211, 213 254 (J.)
Heure : choisie 278; — conventionnelle, 134; — légale française 134 (ancienne), 135 (actuelle); — locale 78 (conservée par chronomètre), 218; — moyenne 135 (locale et légale : écart); — du passage au méridien 10 (détermination), 299 (calcul); — sidérale 12; locale 13 *bi* 78; — solaire 138 (vraie : fournie).
Hipparque : 51, 57 (catalogue), 78, 99, 118, 124, 125, 148; — méthode 242, 330; — 288.
Horizon : 4, 6 (notre); voy. Plan; 9 (d'un lieu), 42 (artificiel : bain de mercure), 103 (astronomique : le même).
Horloge : avance 79; — comparaison 79, 81; — directrice 79; — emploi 2; — exacte (nécessaire), marche (irrégularités), 45; — mère 45 (Observatoire de Paris : marche diurne), 79; — portatives 78 (montres); — précises 28; — publiques 135 (de Paris); — réglage : sur temps moyen 2, 121, 133; en temps sidéral 3, 10, 79 (local), 111, 121; — réglées 121 (parfaitement), 124 (sur le temps vrai), 133 (sur les étoiles : rot. de la Terre); — régularité 48; — sidérales 81 (battements).
Huyghens : 78 (montres : ressort spiral), 228 (anneau de Saturne).
Hyperbole 83 (équations, excentricité).
Hypothèse : elliptique simple 85; — naturelle 243 (s'imposant).

I

Ides : 145, 148 (de mars).
Immersions : 217, 225 (durées : variations), 327, 340.
Inclinaison : voy. Erreur; — 177 (définition); — voy. Mars : orbite; — relative 246, 326; — 255 (diminution, augmentation), 265, 281 (variation).
Indices : variation 27 (loi).
Inégalités : 120; — s'ajoutant 124; — calcul 262; — décalées 300; — découvertes 293 (quatre grandes : Lune); — détermination 121 (grossière); — deux 282 (représentation simultanée); — grande 258 (Jupiter, Saturne), 281 (la plus); — des jours et des nuits 100; — voy. Jupiter (satellites), Lune; — périodes 121, 254 (longue), 286 (courtes, longues), 295 (différentes); — périodique 124, 250; — des pouvoirs diffusifs 304 *bis*; — principales 128, 219; — des retards 79; — des saisons 127; — séculaires 120, 124, 125, 250, 254, 261 (aucune : grands axes), 286; — supprimées 286; — d'Uranus 211; — valeurs 294 (numériques).
Instant 78 (le même).
Intervalles courts 45.
Irradiation : 195, 304 *bis*.

J

Jésus-Christ 148 (naissance, circoncision, crucifiement).
Jets 159.
Jones 279 (observation).
Jours : s'allongeant 103; — et années 120, —., 133; — apparents 136; — astronomique 134; — changement de nom 137; — civil 134; — décalage 135 (d'une heure); — définition 100 (Soleil au-dessus de l'horizon); — diminuant 103; — diminution 187; — durées limites (extrêmes) 100, 101; — longueur 106 (pratique), 107 (crépuscule compris), 130 (avant et après midi moyen); — lunaire 299 (moyen, vrai), 300 (vrai : calcul approché de la variation); — moyen : détermination 120, 121 (précision; mauvaises définitions); 124, 128 (emploi; longueur), 131, 133 (unité arbitrairement choisie), 136 (vrai); — et nuit 26 (égaux), 100 (inégalité); — origine 134; — sidéral : définition 2, 24 (précise), 97; constance 2, 288; 3 (détermination pratique), 121, 122, 124, 128, 133 (unique étalon de durée), 187 (pratiquement constant); — solaire : moyen 122 (rapport au j. sidéral : détermination), 124, 299; vrai 97 (définition), 121; — de temps moyen 2, 133 (seconde unité de temps), 351; — vrais 121; excès sur j. moyen 129, , 131.
Jules César : 145, 148.
Jupiter : 214, .—., 226; — données fondamentales 214; — équateur 221; — influence 254, 256; — masse 119; — mouvement 219 (inégalité); — nuages 215; — orbite 119, 214 (inclinaison); — rotation 215; — satellites 78 (occultation), 216 (importance; paramètres); éclipses 217, 222 (durée), 223 (déterminations photométriques), 225 (durées d'immersion); 218 (détermination des longitudes terrestres); inégalités 219 (principale), 221 (autres); vitesse de la lumière 220, 243; 224 (trajectoire), 226 (configuration), 340 (emploi); — et seconde loi de Képler 166; — trajectoire 219 (excentricité).

K

Kant : 343, 345.
Kelvin (Lord) 348.
Képler : bissection de l'excentrique pour la Terre 85; — distances relatives 232 (des planètes au Soleil); — équation (résolution : procédés graphiques) 86,

87; — hauteur de l'atmosphère 107 *bis*; — lois 67, Ch. I (Soleil), 114, 165 (énoncé), 166 (seconde), 177, 180 (héliocentriques), 182, 188, 191, 194, 203, 204, 206, 209, 216, 220, 232, 240, 244, 250, 251, 257, 261, 267, 272, 273, 289; — observation 303; — problème 84; — 113, 207, 218.
Kilogramme-masse 168 (poids).

L

La Caille : 28, 57 (catalogue); — méthode (ligne des apsides) 91 (principe), 116; — 180, 181, 236, 338.
Lâcher : de l'astre moyen 186; — du Soleil moyen en ascensions droites 132 (convention).
Lagrange : 84 (problème de Képler), 88 (série), 261 (stabilité du syst. solaire : proposition fondamentale).
La Hire : 107 *bis* (hauteur de l'atmosphère).
Lalande : 5, 7, 56, 57 (catalogue), 85 (et Képler), 92 (méthode : orbite d'une planète), 98 *bis* (*Voyage en Italie*), 125, 154 (pôles de la rotation solaire), 186, 236, 239, 246, 252, 294, 323, 328, 332, 341, 343.
Lambert : loi 198 (appliquée à un corps lumineux par lui-même), 199 (corps non lumineux par lui-même), 200, 208, 223; — théorème, 95.
Laplace : 28, 174 (plan invariable), 248, 294, 315.
Latitude : astronomique 103 (définition et forme de la Terre); — céleste 18; — constante 20 (variat. des coord. équat.); — définition 77 (expérimentale); — détermination 100 (par les anciens), 105 (méthode rapide grossière); — géocentrique 18, 182, 245; — géographique 16 (astre), 25 (variation); 75,., 77; 234; — et hauteur du Soleil 98 (à midi); — héliocentrique 18, 178, 182, 245; — invariabilité 77; — d'un lieu 16 (définition), 25 (variation périodique); — mesure (au cercle méridien), de Nice (observatoire), 76; — notion 16; — de Paris 75; — terrestre 4; — à trouver 13 *bis*.
Laugier 75.
Le Gentil 248.
Le Monnier 98 *bis*.
Lentille lumineuse : 278, 279.
Léonides : 272; — 274; — 275.
Lescarbault 201.
Lettre dominicale 149.
Lever : voy. Étoiles; — héliaque 97; de Sirius 126, 146; — voy. Lune; — du Soleil 100 (en mer), 105 (durée); et éclipse 334, 338.
Le Verrier : 117, 201, 207, 208, 211,., 213, 248, 249, 288, 295.
Librations : 302, 313 (en longitude), 315 (en latitude; diurne), 315 *bis* (réelle), 350.
Ligament noir 248.
Ligne : des apsides 89; détermination 91 (La Caille), 116 (rotation); 250, 257,., 259; — de changement de nom du jour 137; — des cornes de la Lune 155 (orientation), 303,., 305 (angle avec un vertical), 310, 340; — des équinoxes 111, 116, 177, 187; — des nœuds 2, 23, 156, 177 (définition), 180 (détermination), 224 (direction), 245 (points la définissant), 250, 255 (rétrogradation), 280; — des sommets (apsides) 33; — de symétrie 305, 340 (disque lunaire écorné); — des syzygies 290.
Lion 280 (α).
Locutions vicienses 168 (remarques).
Lœvy 44 (appareil pour déterminer la flexion).
Loi : des aires 31, 69; mouvements coniques 83,.., 95; 114, 162 (démonstration), 177; — voy. Bode, Coulvier-Gravier; — de distribution moyenne 271; — voy. Fechner; — de la gravitation 71 (et phénomènes), 75 (générale); — de Képler-Newton (voy. Képler); — voy. Lambert, Ohm.
Longitude : et anomalie 89; — astronomique 103 (définition et forme de la Terre); — calculée 89; — céleste 18; — détermination 353 (exacte); — et éclipses 329 (de Lune); — de l'époque 293; — géocentrique 18, 30 (vraie), 33, 108, 128 (solaire : variation), 178 (nœud),..., 182; — géographique 16 (occident. : astre) 75, 78,.., 81; 234; — voy. Greenwich; — héliocentrique 18, 108, 153, 156, 177 (au périhélie),.., 180, 182; — jovicentrique 221; — d'un lieu 16 (notion, définition); — lunaire 294; — mesure 78 (difficulté), 79 (au cercle méridien; — méthode des parleurs), 80 (emploi d'un chronographe à bandes), 81 (emploi de la télégraphie sans fil); — moyenne 89, 186 (planète), 187, 286, 289, 292; — observée 89; — et occultations 340; — origine 187 (mouvement); — d'un point voisin du pôle 353; — solaire 33, 89 (moyenné), 112, 156 (géocentrique); — terrestre 218 (détermination : emploi des satellites de Jupiter); — tropique 280; — variation 186; — vraie 89, 186, 289, 292, 293; — voy. Washington.
Longomontanus 218.
Lucifer 197.
Lueur cendrée 304 *bis*.
Lumière : cendrée 304 *bis*, 310; — et corpuscules 348; — diffusée 8; — propagation 3 (non instantanée); — quantité 200 (émise); — voy. Réfraction; — solaire

279 (réfléchie); — vitesse 29, 220, 243 (et parallaxe solaire); — zodiacale 278, 279 (origine).
Lunaison 307.
Lune : 280,.. —., 342; — âge 304, 309; — ascensions droites 297,.. —., 301; 310 (mesure); — aspect 316; — bord observable 305 *bis* (en déclinaison); — carte 316; — chaînes 317; — voy. Conjonction; — constitution 317; — voy. Cornes; — couchers 299 (pas), 301; — voy. Croissant, Déclin; — déclinaisons 237; 297,.. —., 301; 306; — voy. Décours; — déplacement par rapport aux étoiles 304, 305 *bis*; — diamètre apparent (angulaire) 59, 304, 310 (mesure), 311 (variations), 340 (et occultations); — voy. Disque; — éclat 304 *bis*; — éclipsée 28 (Soleil sur l'horizon); — voy. Eclipses, Epoque, Evection; — figure d'équilibre 315; — forme 314; — grandeur 312; — hauteur 306 (maxima, minima); — inégalités 281, 282; en longitude 289, ..., 293; 295 (Delaunay); — jeune 304; — levers 299 (pas), 301; — voy. Librations, Ligne des cornes, Longitude; — masse 312; — voy. Mers; — modifications 316; — de Moisson 306; — voy. Montagnes — mouvements 194 (géocentrique), 260 (et planète); moyens 280,.., 282, détermination 284 (tropique) et 285 (autres), 286 (accélération séculaire trop. et sidér.), 287 (époque), 288 (accél. sécul. sidér.); vrais 289,. —., 301; 302 (représentation); — voy. Nœuds; — noms 307 *bis*; — nouvelle 302,.., 304 *bis* (Terre pleine), 307; — voy. Opposition; — parallaxe : horizontale 169 (moyenne), 311, 325, 332; 237; — partie : éclairée 305 (droite de symétrie); éclipsée 327; — voy. Périgée, Phases; — plan orbital 280,.., 282; 297 (inclinaison sur l'équateur), 306 (et écliptique); — pleine 302,.., 304 *bis* (éclairement de la Terre), 306 (hauteur : maxima, minima); heures 313 (1915), 328; 352; — et pôle nord 352; — positions 1; — en quadrature 290, 302, 304, 317; — voy. Quartiers; — renversée 313; — révolutions lunaires 283,. —., 288; 307 (synodique), 313 (sidérale; donnée), 323 (draconitique); — rotation 313 (vitesse uniforme); — rousse 307 *bis*; — surface 316 (étude); — tables 234 (précises), 255, 288, 293; 294,.., 296; 302, 340 (correctes); — théorie 294, 295; — trajectoire 237 (plan), 302 (forme générale); relative 320, 326; — voy. Sélénographie; — visible 303 (Képler), 304 *bis* (nouvelle); — vitesse 301 (en angles horaires); — volume 312.
Lunette : axe optique 36 *bis* (direction), 38 (définition matérielle); réglage 41 (méth. de retournement), 42 (bain nadiral); 44 (excentré); — axe de rotation 50 (réglage théorique); — diamètre apparent 113 (moyen); — équatoriale coudée 50; — invention 197, 242; — méridienne 12, 18, 27, 37 (description), 38 (réglage, emploi), 40 (axe de rotation : réglage horizontal), 43 (réglage dans le méridien; ordinaire), 44 (flexions); utilisée 111, 152; 178 (avant), 305 *bis*, 310; — non parallactique 155; — parallactique 50, 178, 238, 350; — scellée au mur 2, 3 (expér.); — utilisées 195; — vision 8 (théorie).
Lyre : α (type) 71, 73; — β 73 (variations d'éclat).

M

Manfredi 311 (figure de la Terre : méthode).
Manipulations bonnes 13 *bis*.
Maraldi 230.
Marées : effet 2, 288, 315; — frottement 187; — lunaires 315; — théorie 252 (ancienne).
Marins : voy. Méthode, Réfraction moyenne.
Mars : 202,..., 206; — aberration 36 *ter*; — calendes 145; — canaux 349; — dans l'écliptique 180; — éléments 203; — généralités 202; — excentricité 202,.. 204, 240; — ides 148; — nœuds 180 (ligne), 205; — en opposition 240; — orbite 205 nœuds), 206 (inclinaison); — parallaxe : mesure 236, 239; — périhélie 204 (position); — tables 207; — vu 190.
Masses : détachée d'une planète 277 (orbite); — voy. Lune; — mesure 70; — nombre quelconque (voy. Plan invariable); — voy. Planètes; — prédominante 176 (équations); — rapport 70; — voy. Soleil, Terre.
Maupertuis 100.
Mauvais 75.
Mayer : 294; — règle 325, 327.
Mercure : 196,. —., 201; — albedo 197; — diamètre apparent 189; — distance au Soleil 188; — élongation 189; — ligne des nœuds 180; — mouvement 191, 192; — passages 78; — phases 189, 197, 200 (ronde); — et les planètes intra-mercurielles 201; — révolution 185 (sidérale, synodique); — rotation 196; — trajectoire 189.
Méridien : azimut 10 (détermination); — défini 16 (sans ambiguité); — géographique (définition), d'un lieu, 9; — normaux 135; — origine 12; du temps moyen (Greenwich) 130, 135; — voy. Passages; — des pôles de l'équateur et de l'horizon 18.

Méridienne : 99 (détermination), 142 (du temps moyen; vraie).
Mers : des Crises 313, 317; — lunaires 317 (Pluies, Sérénité, Tranquillité, Fécondité, ...).
Mesures : absolues 232, 235 (remplacées par des mes. différentielles); — différentielles 63, 235 (substituées aux mes. absolues); — voy. Masses; — photographique 249; — précision 75.
Météorites 348.
Méthodes : voy. Alembert (d'), Aristarque, Cassini, Clairaut; — des coïncidences 81; — voy. Euler; — de fausse position 92; — voy. Flamsted, Halley; — des hauteurs égales (ou correspondantes) 10, 43, 99, 99 *bis* (avec le Soleil), 111 (méth. identique), 123, 127; — voy. Hipparque, La Caille, Lalande, Manfredi; — des marins 98 (latitude), 100 (acceptable); — mauvaise 248 (en soi); — d'observation 110; — de l'œil 80 (et de : la main, l'oreille); — voy. Ombres égales; — des parleurs 79; — des plus grandes déclinaisons 237; — des séries 52; — spectroscopique 158; — de la variation des constantes 251.
Méton 308 (cycle).
Micromètre 310 (à deux fils parallèles mobiles).
Microscope 37.
Midi : correction 99 *bis*; — moyen 16, 124, 130, 133 (de Paris; temps local), 142, 299, 305; — vrai 142 (voisinage).
Milieu résistant : 170 (existence : effet), 258.
Mimétisme 343.
Minute 79 (certaine).
Mires fixes 43 (emploi).
Miroir horizontal 42.
Mobilité : voy. Soleil.
Mois : commencement 304 (Arabes); — lunaires 307 (valeur moyenne), 308 (groupements solaires); — synodique 302.
Moments astronomiques 22.
Montagnes de la Lune : 317, 318 (hauteur : mesure).
Montres 78.
Montucla 36 *bis*,
Mouvements : apparents réels (planètes) 192, 193; — célestes 187 (uniformes); — du centre de gravité 171; — circulaire 160; — coniques suivant la loi des aires 83,. — ., 95; — direct 191, 281, 283; — diurne : apparent 12 (sens), 96, 97; 50 (suivi commodément); réel 97, 129; 320 (en longitude); — elliptique : troublé 250, 251; 289, 313 (simple); — voy. Etoiles; — horaire 246; — voy. Lune; — moyen 326 (horaire); — voy. Neptune, Nœuds, Planètes; — rectiligne 160; — relatif 166 (deux points matériels s'attirant), 246 (héliocentrique), 320; — voy. Solaire (Syst.), Soleil; — suivant le rayon visuel 65; — voy. Terre; — de translation 175 rectiligne et uniforme); — voy. Vénus.
Moyennes : mesure (précise), notion (définition), 121; — quantités 120; — rôle 323 (en Astronomie).

N

Nadir 9.
Néoménie 304.
Neptune : 210, .., 213; — découverte 212; — distance au Soleil 188; — éléments 213 (prévus, réels); — mouvement 193; — observations 213.
Newcomb : 57 (catalogue), 288.
Newton : hypothèse 67, 165 (interprétation des lois de Képler), 167 (pesanteur : théorème), 207, 208, 211; — 212 (*Philosophie naturelle*), 237 (parallaxe moyenne horizontale lunaire).
Nil : inondation 126 (commencement).
Niveaux des astronomes 40.
Nœuds : ascendant 68, 124, 177, 180, 250, 280, 339 (Lune : tête du Dragon); — déplacement 205; — descendant 180, 339 (Lune : queue du Dragon); — voy. Ligne, Mars; — mouvement 255 (oscillation); — rétrogradation 255, 256 (séculaire : calcul), 281 (non-uniformité), 283; — voy. Soleil, Surface solaire; — voisinage 275.
Nombres : horaires 271 (14); — d'or 308.
Nones 145.
Noyau solaire 150 (structure).
Nuages : voy. Jupiter.
Nuit : définition 100 (Soleil au-dessous de l'horizon); — et jour 26 (égaux), 100 (inégalité); — longueur pratique 106.
Nutation : 22, 350; — durée 48; — effet 29, 77; — mesure 2.

O

Obbers 268.
Observations : anciennes 127; — des Arabes 288; — astronomiques 75 (les plus précises); — des Chaldéens 285, 288; — voy. Jones; — de Maraldi 230; — méridiennes 37,. — ., 50; 63 (utilisées), 109; — de nuit 48; — observateur 340 (position); — à l'œil nu 52 (résultats); — photographiques 59 (et coordonnées : précision); — retard 340 (dû à la surprise).
Observatoires : Annales 46; — Carte du Ciel 58; — français 82 (positions); — voy. Greenwich; — de Marseille 99; — de Melbourne 58; — de Nice 76, 82; —

d'Oxford 59; — de Paris 45, 82; — de Toulouse 58, 82.
Occultations : 78; — 280; 340,., 342; — calcul 340, 341 (cas schématique), 342 (cas général); — définition 340; — durée 341 (allongée), 342 (moyenne); — généralités, visibles (de Paris), 340.
Octants 293.
Ohm 284 (loi).
Ombres : du centre de la Lune sur le disque terrestre 332 (trajectoire); — voy. Eclipses; — égales (méthode) 99, 127; — longueur 98 *bis* (variation), 139 (cadran solaires), 144 (calcul); — de la Terre 325; — voy. Vénus.
Opposition : 31, 179 (définition; — temps calcul), 190 (planètes supér.); Lune 302, 304, 306, 352.
Orbites : circulaire 170; — voy. Comètes; — elliptique 262 (troublée); — excentricité 89, 112; — inclinaison 281 (variation); — voy. Jupiter, Mars, Masses; — paraboliques 93 (calcul), 94 (détermination connaissant deux rayons vecteurs et l'angle compris); — d'une planète 92 (détermination par trois observations), 181 (plan : inclinaison), 260 (grosse stabilité); — pôles 119 (rotation); — positions relatives 119 (actuelles); — réelles 68; — terrestre 260 (déformation à longue période); — voy. Vénus.
Origine cosmique 271 (étoiles filantes).
Orion : 49, 71 (α, β).

P

Pâques : fête 147 (*note* 2), 147 *bis*.
Parabole 83 (distance périhélie; équations).
Parallaxe : annuelle 30, 34 (phénomènes dus), 232; — définition 233 (direction : changement); — diverses 234; — effet 247; — voy. Ellipse; — de hauteur 233, 235; — horizontale 167, 169 (moyennes), 233, 325 (solaire et lunaire); — voy. Lune, Mars; — solaire 31, 169, 184; 240,.., 243; 244, 249, 325, 330 (méthode d'Hipparque); — stellaires 62, 67, 70 (emploi); — théorique 67; — voy. Vénus.
Parallèles : célestes 6; — de déclinaison 152; — solaires 156 (vus en projection : formes instantanées); — terrestres 16.
Paramètres : de l'ellipse 83, 262; — variables 251.
Paris : latitude 75; — observatoire 45, 82.
Parleurs : voy. Équation personnelle, méthodes.
Passages : des coordonnées équat. loc. aux coord. horiz. 12; — du demi-diamètre 110 (Soleil); — dans l'écliptique 178 (planète); — dans l'horizon 36 *bis*; — inférieur (au méridien) 10, 43; — voy. Mercure; — au méridien : voy. Heure, 13, 16, voy. Soleil, 36 *bis*, 133 (étoiles fondam.), 301 (de Paris); — supérieur (au méridien) 10 (culmination), 43; — voy. Temps; — trois consécutifs 43 (temps); — voy. Vénus.
Pays : catholiques allemands, hérétiques protestants, schismatiques orthodoxes, 147.
Peary : App. II 351, 352.
Pénétration et grossissement 248.
Pénombre : voy. Éclipses.
Périastre 69.
Périgée : 33, 108; — lunaire 290 (mouvements : séculaire, oscillatoire); — solaire 89 (périhélie terrestre).
Périhélie : définition 89, 177; — voy. Distance, Mars; — origine 92; — terrestre 89 (périgée solaire); — 108.
Périodes : annuelle 128, 157; — anomalistique 84, 91, 291; — apparente 157; — caniculaire 146; — courtes 254, 267, 268; — de l'évection 291; — longues 250, 254, 260; — moyenne 219; — octonaire 245; — des passages de Vénus sur le Soleil 245; — semi-annuelle (semestrielle) 128; — sothiaque 146; — synodique 291; — tropique 307; — vraie 157.
Perrotin 76.
Persée : β (Algol) 72, 75; — 278.
Perséides 275.
Perspective 273 (effet).
Perturbations : 250,.—., 262; — calcul 253, 262, 295; — causes 252; — compensées 254; — continues 255, 258; — développements 294; — étude 254; — instantanées 254 (petites), 255, 257; — non compensée 254; — normale 255 (au plan de l'orbite), 259; — solaire 292; — tangentielle 257 (instantanée), 258 (continue).
Pesanteur : intensité 168 (à la surface du Soleil); — théorème de Newton 167.
Petite Ourse : 22 (α), 23 (α, λ), 76 (1 H).
Phases : Lune 189; 302, 303 (problème : résolution *in abstracto*), 304,.—., 309; — voy. Mercure; — planètes : inférieures 189, supérieures 190 (pas); — ronde 200 (distribution des éclats), 202, 229, 230; — voy. Vénus.
Phénomènes : analogues 67 (et hypothèse); — astronomiques vus du Pôle Nord 350,.., 353; — célestes 7 (représentation); — à courte période 255; — date 144 Calend. (avance, recul); — dus à la parallaxe annuelle 34 (nature); — étoile 29; — instantané 218 (observé), 340; — d'irradiation 304 *bis*; — locaux 331; — et loi de la gravitation 77; — à longue période 255; — lunisolaires 323 (ensemble); — périodiques 62, 119, 250 (à longue période), 254 (à courtes périodes); — produits par l'aberration annuelle 31; — représentation analytique 255; — séculaires 62, 119 (paraissant), 250; — temps 80 (détermination); — visibles 78.

Photographie : voy. Ciel; — emploi 249, 316 (Lune); — voy. Étoiles; — utilisée 63, 178, 244.
Photométrie : stellaire 52 (principe); — visuelle 53.
Photosphère 159.
Picard : Abbé 218; — Émile 295.
Pingré 248.
Plan : équatorial 111 (terrestre); — horaire 11, 12; — horizon 6 (remplacement), 103 (matériel); — invariable 171,.—. 176; — voy. Laplace; — du maximum des aires 172, 174; — méridien 4, 10; — parallèle à l'horizon 115 (traversé par le Soleil : temps); — quasi : invariable 109; parallèles 174 (intersection); — de référence 118, 255, 280; — voy. Vertical.
Planètes : aberration 36 *ter*; — à chercher 211; — et comètes 160,.—., 279; — diamètres 195 (apparents), 208 (mesure); — distances au Soleil 188 (relatives), 232; — diverses 196,.—., 231; — de l'écliptique 214; — éléments 183, 184, 203; — étude 47 (précise); — fictive 89; — inférieures 189 (généralités), 192 (mouv. app. réels); — intramercurielles 201; — marche 295 (à trouver); — masses 169 (comparées à la m. du Soleil; rapportées à la m. terrestre prise pour unité); — mouvements 177,.—., 195; moyen 185, 186 (en longitude); 195 (direct; station, rétrogradation); apparents réels 192, 193; 194 (héliocentrique); — moyenne 90, 186; — orbite : détermination 92 (par trois observations), 194; 181 (plan : inclinaison), 212; — voy. Passages; — perturbations 295 (exagérées); — petites (voy. Pl. télescopiques); — positions 1; — voy. Problèmes; — révolutions 165 (carrés des temps), 185 (moyennes : sidérales et synodiques); — rôle 277; — voy. Satellites; — supérieures 190 (généralités), 193 (mouv. app. réels); — surfaces 168 (accélérations dues à l'action solaire); — télescopiques 188, 190, 207 (généralités), 208 (comparaison des éclats, mesure directe des diamètres), 209 (éléments), 254 (théorie; lacunes); — théorie 185 (élément important); — trajectoires 165; — troublante 212; — vraie 90.
Pléna 294.
Pluies : 269, 272 (périodiques).
Poids vers le Soleil 168.
Poinsot : 150, 174 (et Laplace).
Point : attiré par un centre fixe 160 (vitesses radiale et circulaire); — de déclinaison nulle 298 (Lune : $\mathcal{R}$); — deux 166 (s'attirant : mouvement relatif); — de direction 191; — d'égalité 85; — sur l'équateur 104; — d'équation max. ou min. 90; — de l'hémisphère nord 104; — de l'horizon 104 (où le Soleil se lève et se couche), 353 (repérage en longitude : pôle); — de mire 270 (apex); — position 333 (éclipse solaire partielle); — vernal (γ) 11, 12 (angle horaire); 18; 26, 33, 111 ($\mathcal{R}$), 133 (position), 177, 351; — de vitesse moyenne 90; — voisin du pôle 353 (longitude).
Poissons : 278, 280.
Polaire (Étoile) : 11, 22, 23.
Pôles : astronomique 16; — célestes 4, 6; — crépuscule 107; — définitions 25 (deux); — se déplaçant 20; — déplacement 282 (sur un épicycle); — voy. Écliptique; — de l'équateur 22 (déplacement); — géométrique 16; — hauteur (au-dessus de l'horizon) 4; — ligne 6; — nord 25 (deux sens distincts); principaux phénomènes astronomiques 350; 351,., 353; — voy. Orbites; — position 25 (instantanée), 48 (détermination); — de la rotation solaire 154, 156; — terrestres 2; — 115.
Pontécoulant : 174, 294.
Position : apparente, apparente vraie (actuelle : direction), 29; — fixe 1; — vraie 29.
Potentiel 171.
Pouvoirs diffusants 304 *bis*.
Précession : 22, 350; — effet 77; — des équinoxes 22, 47 (et Grecs), 116, 120, 250, 283; — lunisolaire 119; — mesure 2; — planétaire, totale, 119; — uniforme 200
Pression : atmosphérique 45 (intervenant). — de radiation 269, 348.
Principe : de Döppler-Fizeau 65, 158; — de l'inertie 168.
Printemps 103 (climatologiques; — et hémisphères).
Probabilités 48 (théorie).
Problèmes : analogues 348; — curieux 394 *bis* (posés par la lumière cendrée); — voy. Distances, Habitabilité des Mondes, Képler, Phases de la Lune; — des quatre corps 294; — relatifs aux planètes 180 (difficulté); — du « *Tour du Monde en 80 jours* » 136; — des *Trois corps* 262, 294, 296 (solution).
Procédés graphiques : 86, 87.
Procyon 71 (α Petit Chien).
Projection orthogonale 68.
Protubérances solaires 159.
Ptolémée : 1 (alignements), 57 (catalogue), 99, 100, 116 (équinoxe), 118 (non-fixité de l'écliptique), 141, 148, 203, 237 (parallaxe de la Lune), 284, 290, 330.
Pythéas : 99, 118.

Q; R

Quadrature : voy. Lune; — planètes supér. 190.
Quartiers (premier, dernier) 302, 304, 352.

Radiant : 273 (absolu, relatif), 277 (des bolides).
Radiation divergente 273.
Raies : brillantes 158, 159 (très) ; — faibles 159 ; — noires 158.
Ramadan : 304, 307.
Réduction au Soleil 65.
Réfraction : atmosphérique 27, 106, 324 ; — cause d'erreur 3, 235 (éliminée) ; — et distance zénithale 233 ; — horizontale 351 ; — moyenne 100 (utilisée à l'horizon : marins) ; — tables 28 ; — 28 *bis*.
Réglages : voy. Lunette ; — à répéter 43 (très souvent).
Régulus 280.
Repère 38 (place arbitraire dans plan foc. princ.).
Réseau 58 (impression).
Résistance du milieu 170 (influence).
Ressort spiral 78.
Retards : voy. Inégalités ; — 80 (provenant de la transmission).
Réticule : 36 *bis*, 41 ; voy. Fils.
Rétrogradation : 191, 193 (arc, durée) ; voy. Ligne des Nœuds, Nœuds.
Révolution : anomalistique 91 (demi), 283, 289 ; — draconitique 283, 323 ; — durées 254 (moyennes : incommensurables), 261 (constante en moyenne), 283 ; — lunaires 283 (moyennes),.—., 288 ; — voy. Planètes ; — sidérale 185, 216, 283, 284 ; — synodique 185, 216, 283, 307, 320 (Soleil : déplacement) ; — tropique 283, 284 (moyenne).
Riccioli 218.
Richer 248.
Rœmer : 218, 220, 221, 243.
Rotation : apparente 157 (Soleil) ; — axe 40 (réglage horizontal) ; — durée 157 (Soleil) ; — instantanée 2 ; — voy. Jupiter, Lune ; — négligées 294 ; — sens 7 (intervertis) ; — voy. Sphère céleste, Soleil, Terre, Vénus ; — vitesses 5 (invraisemblables), 313 (uniforme), 315 (diminution).

S

Saint-Sulpice 98 *bis*.
Saisons : astronomiques et climatologiques, humide (des pluies), 103 ; — limites (par convention), longueur, 127 ; — sèche 103.
Satellites : anciens 218 ; — voy. Jupiter ; — un 169, 294 (théorie générale).
Saturne : 227,..., 231 ; — voy. Anneau ; — anses 229, 230 ; — excentricité, moyen, mouvement, 194 ; — orbite 191 (plan ; inclinaison) ; — phase ronde 229, 230 — vitesse angulaire 194.
Savant : âme 210 (état), 213.
Schiaparelli : théorie 272, 275.
Scorpion 279.
Secchi (Le P.) : 55, 268.
Seconde : 79 (reprise), 129 (de temps).
Sélénographie : 302 ; — 310,.—., 316,., 318.
Sens : austral, boréal, 18 ; — dextrorsum 22 ; — direct 12, 18, 26, 96, 97, 108, 119, 150, 177, 191 ; — est-sud-ouest 104 ; — rétrograde 7, 12, 22 ; — voy. Rotation ; — sinistrorsum 22.
Série : voy. Lagrange.
Sextant 1 (utilisation).
Signaux radiotélégraphiques 81 (enregistrement).
Signes : voy. Cancer, Capricorne ; — et constellations 26, 270 ; — six 194 ; — du Zodiaque 26, 230 (utilisation).
Sinusoïde : courbe analogue 297.
Sirius (α Grand Chien) : 52, 71 ; — lever héliaque 126, 146 ; — 133.
Sol invariable 43 (erreur grossière).
Solaire (Système) : constantes 31 ; — déplacement : 1 ; mouvements dus 62, 63 ; — explication 5 ; — mouvement 62 (rectiligne et uniforme), 171 ; — stabilité 261 ; — translation 36 *bis* (d'ensemble) ; — vitesse 29 (d'ensemble).
Soleil : 83,.—., 159 ; — aberration 33 ; — action 269 ; — voy. Aigrettes ; — atmosphère 279 ; — voy. Banderolles ; — bords 248, 351 (supérieur) ; — cessant de se lever 101 (tous les jours) ; — chevelure 278 ; — voy. Chromosphère ; — compensateur 53 ; — constitution 158 ; — coordonnées 109 (Æ et D : 1915) ; — ne se couchant pas 101 ; — coucher 104, 105 (durée) ; et éclipses 334, 338 ; — voy. Couronne, Déclinaison ; — déplacement 96, 97 (dans le champ des étoiles) ; — diamètre apparent (angulaire) 59, 106, 110 (correction), 112 (variation), 113 (mesure : difficulté), 159, 249, 325 (demi) ; — voy. Disque, Distances ; — étoile de déclinaison variable 96,.—., 107 *bis* ; — voy. Facules ; — fictif (moyen) 128,..., 132 (lâcher : convention), 270 ; — voy. Gloire ; — hauteur 98 (à midi) ; — voy. Jets, Lever ; — longitudes 33, 89 (moyenne), 112, 156 ; — masse 167 (et m. de la Terre), 169 (et m. des planètes) ; — mobilité 166 ; — mouvement 26, 62 ; apparent 89, étude précise 108,.—., 119 ; 96 (première approximation), 108 (réel), 194 (géocentrique) ; — moyen : en ascensions droites 120,. —., 137 ; 186 (deux : en Æ et longitudes) ; — et nœuds 320 (avance). — voy. Noyau, Parallaxe, Parallèles ; — passage au méridien : temps 33, 110, 115 ; — voy. Photosphère, Pôles ; — positions 1, 36 *bis* ; définie 98, 108 ; — voy. Protubérances ; — rayon 152 ; — renflement équatorial 201 (hypothétique) ; — rotation 150,.—., 159 ; — voy. Surface sol., Tables,

Tâches; — température 150; — trajectoire 98 (quotidienne : dans le Ciel), 105 (angle avec l'horizon au lever et au coucher), 109 (plan écliptique), 114; — traversant 115 (vertical quelconque ou un plan parallèle à l'horizon); — vitesse 33 (apparente); — vrai (et S. moyen) 128,.., 131.
Solide : de diffraction 54 (restant le même); — mot (sens), de révolution (quasi sphérique), 150.
Solstices : voy. Colure; — et déclinaison solaire 99 (momentanément invariable); — d'été 98 *bis*, 99, 352; — détermination 127 (anciens); — d'hiver 98 *bis*, 99, 352; — voisinage 104.
Sosigènes 145.
Spectres : continu 158, 159; — dédoublé 75; — étudiés 158; — stellaires 55.
Spectroscope : emploi 62, 158.
Sphère : apparence 200 (disque plat); — céleste 1, 2 (rotation apparente), 6, 7 (vue; du dehors, du dedans), 38 (et étoiles : mise en place), 103 (cercles polaires et tropiques); — éclat 198 (uniforme); — terrestre 336 (rayon conventionnel).
Station 191.
Struve 64.
Style : ancien (julien) 147, 148; — nouveau (grégorien) 147.
Sundmann 295.
Support 3 (mobilité).
Surfaces : équiindices 27 (planes); — voy. Planètes; — solaire 151, 156 (nœuds), 168 (intensité de la pesanteur); — terrestre 247 (point : circonstances du passage de Vénus sur le disque solaire), 252 (actions et perturbations du Soleil et de la Lune).
Systèmes : binaires 66 (définition, observation); — cas d'une masse prédominante 176; — du monde 174 (théorie); — métaphysique 345 (et philosophes); — multiples 66,.—., 75; — réduit à trois corps 254; — de repères 1; — voy. Solaire (Syst.).
Syzygies : 34, 290 (ligne).

T

Tables : voy. Connaissance des Temps; — construction 218; — voy. Hansen, Lune, Mars; — à posséder 142; — voy. Réfraction; — du Soleil 110, 249; — voy. Vénus,
Tâches : lumineuse 54 (centrale); — solaires 50, 150,., 152 (repérage), 153 (centre : coord. écliptiques), 155 (étude : clichés), 156 (tournant inf. vite : trajectoire; — dérivant), 157 (trajectoire apparente : influence du mouvement annuel; — taches : équatoriales, non équator.; — trajectoires réelles), 201 (petite).
Tâtonnements : 266, 294 (arbitraire).
Taureau 278.
Télégraphie : avec fil 78; — sans fil 78, 81 (emploi).
Téléphone 80.
Tempel 275 (comète).
Temps : absolu 2; — astronomique 134, 217; — civil 134; — conversion en angles 15; — légal 135; — local 79, 133; — moyen 2 (jour), 5, 111, 115, 132 (origine), 133 (de Paris), 135 (horloges publiques de Paris : 1816), 142 (méridienne), 351; — origine 38, 132, 232; — de passage 39 (retard), 115 (du disque solaire sur les fils d'une lunette), 239 (différence : diminution due à la parallaxe); — plus court 258; — sidéral 12, 13 *bis*; à midi moyen 16, 124, 133 (importance), 299 (emploi), 305; 38 (origine), 79 (local), 110, 111; — unité : fondamentale (jour sidéral) 2, 3; légale 121; arbitraire 133 (jour de temps moyen); — vrai 142 (donné?; — à midi moyen).
Termes périodiques 120 (correctifs).
Terminateur 304 (courbe terminatrice).
Terre : axe 1., —., 6,.—., 16; 25 (instantané); — centre 246 (circonstances d'un passage de Vénus sur le disque solaire); — déplacements : annuel 35 (influence sur les coord. équat.); mouvements dus 62, 63; — diamètre 232 (équatorial); — distance au Soleil 188, 220 (moyenne); — figure 311 (Manfredi); — forme 2, 4 (notions fondamentales : acquisition), 103; — masse 167 (rapport à celle du Soleil), 168 (déterminée); — mouvement 5 (et air; — diurne, annuel), 6 (diurne), 30 (annuel : influence sur les coord. éclipt. géocentr.), 85 (représentation); — moyenne 186, 187; — nouvelle 304 *bis*; — ombre 325; — voy. Orbite; — partie éclairée 247; — pleine 304 *bis* (éclairement de la Lune); — poids 168 (vers le Soleil : variable); — position 108 (définie); — rayon 161 (moyen); — refroidissement 187; — rotation 2 (vitesse), 5 (raisons), 25 (axe instantané), 36 *bis* (preuve), 155, 187 (ralentissement); — et seconde loi de Képler 166; — voy. Surface; — trajectoire 161, 166, 177 (plan); — vitesse 29, 65 (par rapport au Soleil), 161 (circulaire, parabolique), 187 (moyenne par siècle).
Théodolite : 10, 12, 28, 104, 350, 353.
Théorèmes : voy. Aires balayées, Forces vives; — généralisés 175; — voy. Lambert, Newton.
Théories : formes 294 (très différentes); — voy. Lune, Planètes, Probabilités, Satellites, Schiaparelli.

Tisserand : 58, 212, 248, 249, 288.
Tour Eiffel 78.
Trajectoires : de l'antisoleil 332, 336; — apparentes 157; — changement 170; — circulaires 169; — construction 164; — définie 265; — elliptiques 163; — voy. Étoiles doubles; — hyperboliques 163; — identité 275 (et origines); — instantanées 156, 157; — voy. Lune; — paraboliques 163, 273; — voy. Planètes; — portions visibles 273; — rectilignes 337 (obtention des équations); — réelles 157; — voy. Soleil, Tâches, Terre; — visible 273; — vue du Soleil 224 (satellites de Jupiter).
Triangle de position 12, 115.
Trigonométrie sphérique : Formules usuelles 354 (relation fondamentale), 355 (propriétés des sinus), 356 (projections des aires), 357 (autres relations), 358 (triangles rectangles).
Tropiques : voy. Cancer, Capricorne; — 103 (sens du mot).
Tubes géométriques 272 (permanents).
Tuttle 275 (comète).
Tycho Brahé : 56, 85, 118, 218, 282.

U, V

Uranus : inégalités (perturbations) 211.
Variation 293.
Vendelinus 242.
Vents alisés 5.
Vénus : 196., —., 201; — albedo 197; — action 119; — en conjonction inférieure 240, 244; — diamètre apparent 189; — voy. Disque; — éclat 198 (périodicité), 200 (distribution); — élongation 189; — ligne des nœuds 180; — longitude 186 (moyenne); — lumière cendrée 304 *bis*; — mouvement 191; — ombre 198; — orbite 119; — parallaxe 240; — passages sur le Soleil (disque solaire) 197; 244,. —., 249; — phases 189, 197, 200 (ronde); — rotation 196; — tables 246, 249.
Verseau : 236 (λ), 279, 280.
Vertical : angle 107 *bis* (avec le cercle de déclinaison); — méridien 43; — plan 46; — premier 9, 38; cadran solaire 141, 142; — quelconque 115 (traversé par le Soleil : temps); — de référence 10.
Verticale : 9 (définition), 103 (et surface terrestre).
Vesper 197.
Vierge : 279, 280 (l'Épi).
Vitesses : absolue 65; — actuelle 257, 258; — angulaire 89 (uniforme), 116 (en longitude), 160; — aréolaire 90; — circulaire 160, 161; — cométaire 163; — détermination 158 (méthode spectroscopique); — linéaire 158 (équatoriale : Soleil), 160 (circulaire), 165, 258; — voy. Lumière, Lune; — et milieu résistant 170, 258; — moyenne 90, 292; — parabolique 160, 161, 163; — en un point quelconque 163; — radiales 62 (emploi), 65, 70 (mesure), 75 (variable), 160; — relative 65 (nulle), 326; — voy. Rotation, Terre; — uniforme 313 (de rotation); — variation 257 (augmentation, diminution), 292 (négligées); — vraie 292 (en longitude).
Vogel 72.
Vulcain 201.

W, —, Z

Washington : longitude 81 (différence avec Paris).
Watson 201.
Zedu 40.
Zénith : 9, 16, 115.
Zodiaque : signes (utilisation) 26, 230; — 278.
Zones : glaciales 103, 105; — royales 151; — tempérées, torride, 103.

TABLE DES CHAPITRES

Pages.

De l'Enseignement des Sciences inutiles v

Les Étoiles.

CHAPITRE I. — *L'axe de la Terre et les coordonnées équatoriales* 1
— II. — *Coordonnées écliptiques* 32
Réfraction 48
Parallaxe. Aberration. 56
— III. — *Observations méridiennes* 73
— IV. — *Classification et distribution des Étoiles* 99
Mouvements dus aux déplacements de la Terre et du système solaire 113
— V. — *Mouvements propres. Systèmes multiples.* 118
Mouvement suivant le rayon visuel 118
Étoiles doubles, triples 120
— VI. — *Latitudes et Longitudes géographiques* 137

Le Soleil.

CHAPITRE I. — *Mouvements coniques suivant la loi des aires* 149
— II. — *Le Soleil considéré comme une étoile de déclinaison variable* . . . 173
— III. — *Étude précise du Mouvement solaire apparent.* 204
— IV. — *Soleil moyen en ascensions droites* 224
Jours et Années 224
Conventions horaires. 251
— V. — *Cadrans solaires. Calendriers* 258
Cadrans solaires 258
Calendriers 272
— VI. — *Rotation du Soleil* 284

Planètes et Comètes.

CHAPITRE I. — *Gravitation universelle.* 301
Plan invariable. 316
— II. — *Mouvements des Planètes* 324
— III. — *Particularités des diverses Planètes.* 351
Mercure et Vénus. 351
Mars. 361
Les petites Planètes. 367
Neptune. 370
— IV. — *Particularités des diverses Planètes (Suite)*, ... 375
Jupiter et ses satellites. 375
Saturne et son anneau. 393

CHAPITRE V. — *Distances en astronomie* 400
Passages de Vénus sur le Soleil. 416
— VI. — *Perturbations*. 433
— VII. — *Comètes. Étoiles filantes. Bolides* 457
Etoiles filantes 464
Bolides et Aérolithes. 472
Lumière zodiacale 474

La Lune.

CHAPITRE I. — *Plan orbital et Moyens mouvements* 479
Plan orbital 479
Révolutions lunaires 486
— II. — *Mouvements vrais* 494
Inégalités en longitude 494
Tables de la Lune 501
Ascensions droites et Déclinaisons de la Lune 506
— III. — *Phases. Sélénographie* 519
Phases. Année lunisolaire 519
Sélénographie. 539
— IV. — *Eclipses* 554
Eclipses de Lune. 554
Eclipses de Soleil. 570

Appendices.

APPENDICE I. — *Habitabilité des Mondes* 595
— II. — *Les Principaux phénomènes astronomiques vus du Pôle Nord* 605
— III. — *Formules usuelles de Trigonométrie sphérique* 609

16334-5-21

IMPRIMERIE DELAGRAVE
VILLEFRANCHE-DE-ROUERGUE

Astron
B

172035

Author Bouasse, Henri

Title Astronomie théorique et pratique.

University of Toronto
Library

DO NOT
REMOVE
THE
CARD
FROM
THIS
POCKET

Acme Library Card Pocket
Under Pat. "Ref. Index File"
Made by LIBRARY BUREAU